Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Volumen III

Compiladoras

Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

Uruguay

1ª edición: diciembre de 2016

Diseño de portada: Santiago Raía Scialó

Edición: Verónica Molfino y Cristina Ochoviet

ISBN 978-9974-91-477-3

Departamento de Matemática

Montevideo, Uruguay

Por sugerencias o comentarios acerca del contenido de esta obra dirigirse a: depdematematica@gmail.com

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

El *Misterioso jarrón multiplicador* de Masaichiro y Mitsumasa Anno comienza así:

> Esta es la historia de un jarrón y de lo que en él había. En el jarrón había agua, y parecía como si soplara un viento ligero en su interior, porque el agua formaba un oleaje. El oleaje se convirtió en un mar ancho y profundo. En el mar había 1 isla. En la isla había 2 países. En cada país había 3 montañas. Sobre cada montaña había 4 reinos amurallados. Dentro de cada reino amurallado había 5 aldeas. En cada aldea había 6 casas. En cada casa había 7 habitaciones. En cada habitación había 8 armarios. Dentro de cada armario había 9 cajas. Dentro de cada caja había 10 jarrones.

La historia continúa y plantea la cuestión de cuántos jarrones había en todas las cajas, invitando al lector al cálculo de factorial de 10 para luego intentar poner en evidencia lo grande que es este número. Además, la historia puede ser continuada agregando otros objetos dentro de los jarrones y así sucesivamente. Utilizamos el jarrón multiplicador como metáfora porque más que nunca sentimos que estamos ya ante un proyecto consolidado que va creciendo en el número de docentes y estudiantes que se integran, y en la calidad de los trabajos. Al mismo tiempo, el proyecto puede entenderse como un jarrón multiplicador que invita al nacimiento de trabajos en su interior para después favorecer su desarrollo en un ir y venir hasta quedar listos para ser compartidos con la comunidad de docentes y estudiantes. Por otra parte, entendemos que este jarrón multiplicador concibe en su interior otros proyectos que se entrelazan con el del libro, relativos a la formación continua del profesorado. En este caso, tres de los trabajos surgen a partir de iniciativas de docentes del profesorado en distintos procesos de formación, tanto en el Diploma en

Matemática como en cursos de actualización organizados por el Departamento de Matemática.

Este tercer volumen contiene ocho artículos que tienen como característica común el centrarse en el diseño, ya sea para la enseñanza o desde la investigación, y utilizarlo con diferentes objetivos. Wittmann (1998) propone considerar a la matemática educativa como una ciencia del diseño, basándose en que esta disciplina debe orientarse hacia la mejora de las prácticas educativas. Este autor concibe a la matemática como un fenómeno social. Ello implica considerarla desde una perspectiva amplia, que incluye la relación de esta disciplina con todas las profesiones, el comercio, el arte, la vida diaria; en fin, con todas las situaciones en las que nuestra sociedad requiere de esta ciencia. La matemática así entendida se constituye en centro de atención para la investigación didáctica. Alejado de una visión tradicional de la enseñanza, Wittmann concibe al estudiante aprendiendo en interacción con otros estudiantes y con el profesor. Se espera que el docente adapte, tome decisiones y haga un uso flexible de los materiales o unidades didácticas producidas por la matemática educativa concebida como ciencia del diseño. Para el diseño de esas unidades de enseñanza es necesaria investigación empírica. Este enfoque aporta un encuadre para este proyecto dado que permite entrelazar la enseñanza con la investigación y ambas con la formación de los futuros docentes.

Según la manera en que se usan esos diseños los hemos organizado en tres secciones: (1) diseños para la enseñanza, (2) análisis de implementación de diseños: relatos de aula, y (3) micro diseños de investigación. En la primera sección presentamos cuatro artículos, el primero realiza una revisión del discurso matemático escolar en un libro de texto de Uruguay. Los otros tres son propuestas de enseñanza de la matemática para la justicia social.

En la segunda sección se incluyen tres trabajos, el primero describe el desarrollo de un Recorrido de Estudio e Investigación en torno al concepto de derivada en el marco de un curso de Análisis I: los estudiantes primero lo experimentaron para luego adaptarlo a sus propias clases de secundaria e implementarlo. Los otros dos presentan propuestas para la enseñanza de la matemática para la justicia social y desarrollan su puesta en práctica y el análisis de tal implementación.

La última sección incluye un artículo en el que se describe un estudio sobre las concepciones de estudiantes de primer y segundo año de secundaria respecto a la división entre cero.

Invitamos a todos los actores involucrados con el gran proyecto de la enseñanza de la matemática a ser parte de este jarrón multiplicador, no sólo leyendo estos artículos sino también haciendo uso de ellos en sus clases y, por qué no, difundiendo mediante esta vía sus propias experiencias, o sumándose a los proyectos de formación. Creemos que ese es un camino para seguir estrechando lazos entre investigación y formación en matemática educativa.

Diciembre de 2016,

GABRIELA BUENDÍA, VERÓNICA MOLFINO, CRISTINA OCHOVIET

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Wittmann, E. (1998). Mathematics Education as a “Design Science”. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 87-103). Great Britain: Kluwer Academic Publishers.

Sección 1

Diseños para la enseñanza

EL SIGNO DE IGUAL: ACTIVIDADES QUE PROMUEVEN SU USO RELACIONAL

NATALI AVELLANEDA, JOAQUÍN BATISTA, STEFANI FLEITAS, ANA MARTÍNEZ, CLAUDIO MEIRAS, ROSANA MIDAGLIA, GIMENA NEGRETTE, SILVIA ROMANIELLO

Resumen
El signo de *igual* es utilizado habitualmente en los libros de texto para primer año de enseñanza secundaria de forma operacional, esto es, como el indicador del resultado de una operación y no en forma relacional, es decir, como el indicador de una relación de equivalencia. En este trabajo reformulamos actividades tomadas de un libro de texto para favorecer dicho uso relacional. Las modificaciones se realizaron atendiendo resultados de investigación en los que se plantea que una adecuada comprensión del signo de igual constituye un requisito imprescindible para el aprendizaje del álgebra.

Palabras claves: signo de igual, diseño de actividades, educación secundaria.

Abstract
The *equal* sign is usually used in textbooks for the first grade of the secondary school in an operational way, that is, as the indicator of the result of an operation and not in a relational way, that is to say, as the indicator of an equivalence relation. In this paper some activities taken from a textbook are reformulated in order to foster the relational use of the equal sign. These reformulations were made taking into account some research results in which it is stated that an adequate understanding of the equal sign is an indispensable requisite to learn algebra.

Key Words: equal sign, task design, secondary school.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge en el marco de un grupo de estudio formado a partir del curso de la asignatura Didáctica I, correspondiente al segundo año de la carrera de Profesorado de Matemática del Instituto de Profesores Artigas (IPA).

En el año 2014 y luego de haber cursado y aprobado Didáctica I, el grupo de estudiantes manifestó a la docente del grupo la necesidad y el deseo de seguir estudiando didáctica junto a ella. Fue así que a partir de marzo de 2015 se conformó el grupo que se denomina DID1BB14 integrado por siete estudiantes del Profesorado de Matemática y una profesora de didáctica del Instituto de Profesores Artigas (IPA). Comenzamos a trabajar con reuniones periódicas en las que estudiamos y analizamos diferentes trabajos de investigación en el campo de la Matemática Educativa.

En 2016 leímos la tesis de Federico Burgell (2012) referida a los significados que atribuyen al signo de igual los estudiantes de primer año del Ciclo Básico de enseñanza secundaria. Surgió la inquietud de analizar las actividades que proponen los libros de texto ya que Burgell plantea que en los libros analizados en su investigación aparecen pocos ejemplos que favorezcan el desarrollo de la visión relacional del signo de igual, así como una ausencia casi total de referencias a la igualdad y los significados de dicho signo.

Seleccionamos uno de los textos para primer año de enseñanza secundaria analizados por Burgell (2012) y reformulamos algunos ejercicios de ese texto atendiendo a los resultados de dicha investigación.

ANÁLISIS DE BURGELL

La investigación realizada por Burgell (2012) plantea dos problemas en relación con la igualdad matemática y a los significados del signo de igual. Uno de estos problemas es el hecho de constatar que gran parte de los estudiantes de primer año del Ciclo Básico que participaron en la investigación interpretan el signo de igual de forma exclusivamente operacional, es decir, como indicador del resultado de una operación, y no de forma relacional, esto es, como el indicador de una relación de equivalencia. Este problema es considerado por varios autores (Kieran, 1992; Stacey y MacGregor, 1997; MacGregor y Stacey, 1999; Falkner, Levi y Carpenter, 1999; Knuth, Stephens, McNeil y Alibali, 2006, 2008) como uno de los obstáculos que tienen lo estudiantes en el aprendizaje del álgebra.

El segundo problema refiere a que tanto los docentes como los libros de texto no brindan al tema una atención especial. Esto, como lo indica Burgell (2012), transforma al problema en "invisible" ya que los docentes no lo visualizan como una dificultad generalizada que amerite trabajar en ella e implementar las herramientas necesarias para resolverla.

Burgell (2012) realiza un análisis de los libros de texto más usados en primer año del Ciclo Básico. Primero, siguiendo a McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur y Krill (2006) y Ramírez y Rodríguez (2011), reporta la frecuencia con que aparece el signo de igual en los diferentes contextos planteados en la tesis (estándar de operaciones-igual-respuesta, operaciones en ambos lados, operaciones del lado derecho, sin operaciones explícitas y otros contextos). Esta mirada permite apreciar un panorama general respecto a cómo se utilizó el signo de igual y sirve, además, para la segunda instancia donde se analizan y se muestran ejemplos de algunas actividades de las propuestas en las que se presenta dicho signo.

Burgell hace hincapié en el tipo de actividades propuestas y, dentro de estas, principalmente las que aparecen en las unidades relativas a números. Constata que en las actividades de aprendizaje que proponen los libros de texto existen pocos ejemplos que favorezcan el desarrollo de la visión relacional del signo de igual.

Para la clasificación de los distintos significados del signo de igual, Burgell (2012) se basa en Molina (2006) y en Molina, Castro y Castro (2009). Estos autores plantean once significados diferentes del signo de igual, distinguiendo entre los que tienen un significado reconocido por la comunidad matemática, los que son propios de la matemática del liceo y los que surgen de interpretaciones de los estudiantes que pueden ser o no matemáticamente correctos.

Se presentan a continuación los significados del signo de igual:

1. *Propuesta de actividad.* Refiere al uso del signo de igual en expresiones incompletas, cadenas de números y símbolos a la izquierda y a la derecha un espacio vacío. Ejemplos: $27 \times 2 =; (x+3)2-5x(2-x) =$.

2. *Operador.* Refiere al uso del signo como un símbolo que separa una secuencia de operaciones a la izquierda y su resultado a la derecha. Ejemplos: $4 \times 5 = 20; x(x-2)+3x^2 = 4x^2-2x$.

3. *Expresión de una acción.* Describe un significado bidireccional; extiende el de operador. En este caso la cadena o secuencia de operaciones va indistintamente a la izquierda o a la derecha del signo de igual y el resultado en el otro miembro. Según Molina (2006) este significado "implica una interpretación operacional del signo igual y la interpretación de la sentencia numérica como la expresión de una acción (de ahí su nombre)" (p. 149-150). Ejemplos: $2x = x(x-2)-x^2+4x$; $24 = 12+12; 12+12 = 24$.

En Burgell (2012) se toma este significado únicamente cuando el resultado está a la izquierda. Si el resultado aparece a la derecha se lo considera un uso de operador.

4. *Separador.* Este es un uso matemáticamente incorrecto del signo de igual. Es utilizado por los estudiantes en contextos algebraicos vinculando expresiones que no son iguales como separador de los pasos realizados.

Ejemplo: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x} = x^2+1 = x = x^2-x+1 = 0$. Los signos de igual que cumplen el papel de separador son el segundo y el cuarto (de izquierda a derecha). El signo de igual utilizado de esta manera vincula expresiones algebraicas que no son iguales pero que son pasos sucesivos en la resolución de la actividad.

5. *Expresión de una equivalencia.* Refiere al uso del signo para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático.

5.1. *Equivalencia numérica.* Indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas de ambos miembros.

Ejemplos: $4+5=3+6; 2\sqrt{3}=\sqrt{12}$.

5.2. *Equivalencia simbólica.* Indica el mismo valor numérico de dos expresiones algebraicas para todos los valores de la o las variables. Ejemplos: $x^2+2x=x(x+2); a+b=b+a$.

5.3. *Identidad estricta.* En ambos lados las expresiones representan el mismo objeto matemático con el mismo representante.

Ejemplos: $3=3; x+5=5+x$.

5.4. *Equivalencia por definición o notación.* Indica la equivalencia de dos expresiones por definición o por el significado de la notación utilizada.

Ejemplos: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$; $100\ cm=1\ m$; $\frac{a}{b}=ab^{-1}$.

6. *Expresión de una equivalencia condicional (ecuación).* La equivalencia expresada por el signo de igual es cierta para algún o algunos valores de la o las variables. Ejemplo: $x^2+4x=5x+6$.

7. *Definición de un objeto matemático.* Se utiliza para definir o asignar nombre a una función u otro objeto matemático. Ejemplos: $a^0=1; f(x)=2x+3$.

8. *Expresión de una relación funcional o de dependencia.* Se utiliza el signo de igual para indicar una relación de dependencia entre variables o parámetros.

Ejemplos: $l=2\pi r; y=3x+2$.

9. *Indicador de cierta conexión o correspondencia.* Significado impreciso. Refiere al uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, por ejemplo entre imágenes o figuras y números. Ejemplos:  $= 3$; precio bici $= 3x + 5$ siendo x el precio de la pelota de básquetbol.

10. *Aproximación.* Se utiliza el signo para relacionar expresiones aritméticas y una aproximación de su valor numérico. Ejemplo: $1/3 = 0{,}33$.

11. *Asignación de un valor numérico.* Asigna un valor numérico a un símbolo. Ejemplo: Si $x = 4$, ¿cuál es el valor de $x^2 - 5$?

Burgell (2012) realiza un aporte a esta clasificación identificando un nuevo significado del signo de igual que no está dentro de las clasificaciones de Molina (2006) y Molina et al. (2009) y que podría incluirse como una ampliación del significado *indicador de cierta conexión o correspondencia*. Este nuevo significado se puede ver en las interpretaciones del signo de igual que realizaron algunos alumnos participantes de la investigación de Burgell, considerando que $8 = 16$ o $4 = 0$ son sentencias verdaderas. Los estudiantes argumentan que son verdaderas porque encuentran alguna operación que incluya el 8 y cuyo resultado sea 16 o que incluya al 4 y el resultado sea 0, o porque encuentran alguna otra correspondencia entre el 8 y el 16 y entre el 4 y el 0. El hecho de incluirlo como ampliación del significado *indicador de cierta conexión o correspondencia* se basa en que para Molina et al. (2009) este significado corresponde a un uso impreciso del signo de igual entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, por ejemplo entre imágenes y números o entre expresiones matemáticas y no matemáticas. La ampliación que propone Burgell sería admitir su uso también entre dos expresiones matemáticas.

McNeil et al. (2006) definen distintos contextos en los que se utiliza el signo de igual. En una primera clasificación identifican dos tipos de contextos: a) el contexto *estándar*, de *operaciones-igual-respuesta* (ejemplos: $3+4=7; 2x+5=7$), y b) el contexto *no estándar*, que incluye todos los demás casos. El contexto *no estándar* se subdivide a su vez en cuatro: i) el contexto de *operaciones a ambos lados* (ejemplos: $5+2=3+4; 3x+6=2x$); ii) el contexto de *operaciones del lado derecho* (ejemplos: $7=3+4; y=2x$); iii) el contexto *sin operaciones explícitas* (ejemplos: $7=7; a=5; 100\ cm=1\ m$), y iv) *otros contextos*. Esta clasificación complementa la anterior debido a que considera distintos aspectos del uso y el significado que se le da al signo de igual. Se puede ver un mismo significado del signo de igual en diferentes contextos así como distintos significados del signo de igual en un mismo contexto. Por ejemplo, el significado expresión de una equivalencia condicional (ecuación) se puede presentar en diferentes contextos: operaciones a ambos lados, operaciones-igual-respuesta, operaciones del lado derecho o sin operaciones explícitas.

Nos interesa por último hacer un comentario sobre la visión operacional y relacional del signo de igual ya que varios autores (Behr, Erlwanger y Nichols, 1976; Kieran, 1981; Knuth et al., 2006, entre otros) sólo trabajan con estas dos categorías. La visión operacional implica considerar el signo de igual como un operador o como una señal de hacer algo y la visión relacional implica ver el signo de igual como el indicador de una relación de equivalencia.

MÉTODO DE TRABAJO CON EL GRUPO DE ESTUDIANTES

En una primera etapa se revisó por capítulos la tesis de maestría de Burgell (2012). Cada capítulo era leído por los integrantes del equipo para luego, en sucesivos encuentros, plantear las reflexiones, dudas y comentarios que iban surgiendo.

Una vez terminada la lectura y reflexión sobre la tesis nos propusimos una actividad referida al uso del signo de igual en los libros de texto. Trabajamos con uno de los libros de texto para primer año de enseñanza secundaria analizados en la tesis: Borbonet, Burgos, Martínez y Ravaioli (2000).

Primero realizamos la selección de las actividades a trabajar, analizamos el contexto en el que estaban presentadas y clasificamos el uso del signo de igual según los significados de Molina (2006) y Molina et al. (2009). A partir de este análisis y en grupos de dos o tres integrantes, diseñamos para cada actividad seleccionada una reformulación en la que se promoviera el uso del signo de igual en forma relacional. Luego cada grupo presentó su trabajo al equipo, se intercambiaron opiniones y se realizaron ajustes.

Una vez terminada esta etapa contactamos al investigador Federico Burgell, autor de la tesis que estudiamos. Le planteamos la posibilidad de enviarle el trabajo realizado para que diera su opinión. Comienza entonces la etapa en la que se produce un intercambio entre el investigador y el equipo de trabajo. Después de este intercambio realizamos cambios y ajustes a partir de los comentarios y sugerencias del investigador.

REFORMULACIÓN DE ACTIVIDADES DE UN LIBRO DE TEXTO

Junto a los estudiantes trabajamos utilizando como marco la tesis del profesor Federico Burgell, elegimos actividades del libro Borbonet et al. (2000) en las que apareciera el signo de igual, clasificamos su uso y las reformulamos para que promovieran un uso relacional de este signo. Trabajamos en tres ejercicios o actividades seleccionadas del libro de texto. En cada instancia se transcribe la actividad original, se clasifica el contexto y el significado del uso del signo de igual y luego se plantea la actividad reformulada.

(1) Actividad tomada de Borbonet et al. (2000, p. 19)

Calcula mentalmente:

46 + 25 + 4 + 50 + 25 =

127 + 25 + 73 + 75 =

132 +0 + 48 + 9 =

a + 34 + b + 16= (sabiendo que $a + b = 30$)

Ubicamos a este ejercicio en un contexto estándar de operación-igual-respuesta en el que el signo de igual aparece cuatro veces con el significado de propuesta de actividad y una vez como asignación de un valor numérico.

Actividad reformulada

Indica cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas o falsas.

46 + 25 + 4 + 50 + 25 = 25 + 125

125 + 75 = 127 + 25 + 73 + 75

132 +0 + 48 + 9 = 189 + 11

80 = a + 34 + b + 16 (sabiendo que $a + b = 30$)

La propuesta de modificación para este ejercicio, basándose en la tesis de Burgell, consiste en plantear una lista de sentencias para que los estudiantes digan si son verdaderas o falsas a través de la aplicación de diferentes propiedades de la adición de números naturales.

Para la confección de esta lista tuvimos en cuenta que apareciera el signo de igual en un contexto no estándar, de operaciones a ambos lados y operaciones del lado derecho. El significado del signo de igual es el de equivalencia numérica ya que el estudiante podrá realizar operaciones y observar si en ambos miembros se obtiene o no el mismo número.

Se plantean dos sentencias falsas, a saber: $132+0+48+9=189+11$ y $125+75=127+25+73+75$. En la primera el alumno se enfrenta, tal como lo dice Burgell, a un error típico que cometen los alumnos al considerar el signo de igual exclusivamente en su carácter de operador. En ese caso considerarían que la sentencia es verdadera porque $132+0+48+9=189$. Pero los que interpreten el signo de igual en su carácter relacional, como la expresión de una equivalencia, dirán que es falsa ya que $132+0+48+9$ no es igual a 200 que surge de $189+11$. En la segunda sentencia pensamos que el estudiante puede determinar que es falsa sin necesidad de realizar cálculos; puede ver que en ambos miembros de la igualdad está el número 75 y que si se prescinde de dicho número en ambos miembros, les queda 125 del lado izquierdo y del lado derecho una suma de naturales en la que el primer sumando, 127, es mayor que 125. Realizando el razonamiento de esta manera, se estaría haciendo uso del signo de igual en forma relacional ya que para tomar su decisión, el estudiante tuvo que trabajar con ambos miembros de la igualdad.

(2) Actividad tomada de Borbonet et al. (2000, p. 25)

Aplica la propiedad distributiva para factorizar y calcula si es posible:

$4\times7+4\times25+4\times3=$

$2\times8+7\times8+8=$

$5\times3+10+15=$

$24+12+18=$

$7a+9b=$

La propuesta original se encuentra en un contexto estándar donde el signo de igual cumple el papel de propuesta de actividad si bien es cierto que para factorizar el signo de igual pasa a tener un significado relacional en un contexto de operaciones a ambos lados.

Actividad reformulada

La profesora planteó el siguiente ejercicio para evaluar lo trabajado en clase:

Factoriza aplicando propiedad distributiva:

(a) $4\times 7+4\times 25+4\times 3$

(b) $2\times 8+7\times 8+8$

(c) $5\times 3+10+15$

Para su calificación, adjudicó 4 puntos a cada una de las partes. A continuación te presentamos los trabajos de Juan, María y Pedro. Asigna a cada uno de los trabajos el puntaje que le correspondió.

Puntaje de Juan:

(a)	$4\times 7+4\times 25+4\times 3=4(7+25+3)$
(b)	$2\times 8+7\times 8+8=8(2+7+1)$
(c)	$5\times 3+10+15=(5+2+5)3$

Puntaje de María:

(a)	$4\times 7+4\times 25+4\times 3=4(35)$
(b)	$2\times 8+7\times 8+8=8(10)$
(c)	$5\times 3+10+15=(3+2+3)5$

Puntaje de Pedro:

(a)	$4\times 7+4\times 25+4\times 3=(4+25+3)7$
(b)	$2\times 8+7\times 8+8=8(2+7)$
(c)	$5\times 3+10+15=5(3+10+15)$

La nueva propuesta que planteamos consiste en un ejercicio en un contexto no estándar con operaciones a ambos lados en el que se presenta el signo de igual en un sentido relacional más evidente porque ya están realizados los planteos de la factorización. Con esto creemos que se evita que el significado relacional se vea como un paso previo para encontrar el resultado, que es lo que sucede en parte con la actividad original.

Eliminamos dos de las sentencias de la actividad original para que el trabajo resultara menos recargado. Una es "24 + 12 + 18 ="; la elección se debió a que una de las posibles dificultades que puede plantear esta sentencia (no "ver" el factor común) está contemplada, en parte, en la sentencia "$5\times3+10+15=$". La otra es "$7a+9b=$"; en este caso la elección se debió a que el trabajo de Burgell (2012) explora los diferentes significados del signo de igual en un contexto numérico.

Partiendo del ejercicio original, planteamos sentencias con posibles factorizaciones para que los estudiantes decidan cuáles son correctas y cuáles no. Para ello será necesario que analicen ambos miembros de la igualdad.

Para pensar las diferentes sentencias a proponer nos basamos en lo que creemos que son los errores más frecuentes de los alumnos. Por ejemplo, cuando se les pide factorizar $2\times8+7\times8+8$, los alumnos piensan que el 8 es un factor común y al "sacar factor común", que en este ejemplo sería "sacar el 8 como factor común", los lleva muchas veces a escribir como expresión factorizada de la anterior: $8(2+7)$, debido a que en el último término al sacar el 8 piensan que "no queda nada". Otro ejemplo es cuando se solicita factorizar $5\times3+10+15$. Los estudiantes pueden pensar en el 5 como factor común pero a la hora de escribir la expresión factorizada proponen $5(3+10+15)$ porque el único término en el que se "ve" el factor 5 es en el primero y es de allí que lo extraen.

La nueva formulación es, además, una actividad abierta debido a que los puntajes a adjudicar a cada parte pueden dar lugar a discusión. Esto es, si la parte está bien resuelta, no hay dudas que se le adjudicarán los 4 puntos que le corresponden. Pero si no está bien resuelta, hay diferentes matices. Por ejemplo, los errores que cometen Juan y Pedro en la parte (c), son diferentes. Mientras que el de Juan puede ser de distracción, el de Pedro parece ser más bien un error conceptual. Puede suceder entonces que los estudiantes adjudiquen diferentes puntajes a esas producciones y en ese caso deberán argumentar su decisión.

(3) Actividad tomada de Borbonet et al. (2000, p. 39)

Coloca los paréntesis que corresponda para que las igualdades sean verdaderas.

a) $9+3\times 15=180$

b) $2+3\times 5+4=45$

c) $8+9\times 6+4=106$

d) $2\times 3+5\times 8+2=160$

e) $9\times 5+17=198$

f) $5\times 9+5\times 4=145$

g) $5\times 9+5\times 4=280$

En este ejercicio aparece el signo de igual en un contexto estándar, como operador, operación-igual-respuesta.

Actividad modificada

Coloca los paréntesis que correspondan para que las sentencias sean verdaderas.

a) $9+3\times 15=10\times 18$

b) $2+3\times 5+4=3+2\times 9$

c) $106=8+9\times 6+4$

d) $20\times 8=2\times 3+5\times 8+2$

e) $9\times 5+17=9\times 22$

f) $5 \times 9 + 5 \times 4 = 145$

g) $5 \times 9 + 5 \times 4 = 5 \times 14 \times 4$

En el cambio que proponemos el signo de igual aparece nuevamente en los dos contextos, estándar y no estándar, de forma que el estudiante deberá trabajar con ambos miembros de la igualdad para poder validarlas.

REFLEXIONES FINALES

La lectura y análisis de la tesis así como las actividades realizadas nos hicieron tomar conciencia del uso casi exclusivamente operacional que hacemos del signo de igual. Creemos muy importante comenzar a cambiar nuestras prácticas de aula de forma de darle visibilidad al signo de igual y que deje de ser un símbolo invisible para pasar a ser problematizado y analizado. Estamos seguros de que si nos ocupamos de realizar actividades de enseñanza en las que el signo de igual se utilice en distintos contextos y situaciones, podremos poner de relieve y problematizar algunos de sus distintos usos y significados, evitando que siga siendo una "noción transparente" en el sentido planteado por Chevallard, Bosch y Gascón (1997).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). *How children view equality sentences*. Technical Report No. 3, Florida State University.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A. y Ravaioli, N. (2000). *Matemática I.* Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Burgell, F. (2012). *¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de primer año del Ciclo Básico de Enseñanza Media?* Tesis de maestría no publicada. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Comahue, Neuquén – Argentina.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de educación 22. Barcelona: Editorial Horsori.

Falkner, K., Levi, L. y Carpenter, T. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6(4)*, 232-236.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics, 12,* 317-326.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Knuth, E., Stephens A., McNeil, N. y Alibali, M. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36,* 297–312.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N. y Alibali, M. (2008). The importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 514-519.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1999). A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics, 6(2),* 78-85.

McNeil, N., Grandau, L., Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S. y Krill, D. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and Instruction*, *24*, 367–385.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria.* Tesis de Doctorado. Universidad de Granada. Recuperado desde http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary Students' Understanding of the Equal Sign in Number Sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(17), 341 – 368.

Ramírez, M. y Rodríguez, M. (2011). Interpretaciones del signo de igual. Un estudio de libros de texto. *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática*, 26, 41-55.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1997). Building Foundations for Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2*(4), 252-260.

CONSIGUIERON LA PAZ EN PLANILANDIA

VALERIA SCHAFFEL, CRISTINA OCHOVIET

... a quien tiene confianza en la creatividad infantil;
a quien sabe el valor liberador que puede tener la palabra.
«Todos los usos de las palabras para todos» me parece un buen lema,
tiene un bello sonido democrático.
No para que todos seamos artistas, sino para que ninguno sea esclavo.
Gianni Rodari

Resumen
A partir de la novela *Planilandia* escrita por Edwin Abbott se propone una secuencia didáctica enmarcada en la Educación Matemática para la Justicia Social para tercer año de Ciclo Básico. Propone trabajar con geometría del espacio y fomentar la reflexión sobre las desigualdades sociales. Se utiliza la narración oral como recurso para presentar un mundo plano habitado por figuras geométricas con injusticias análogas a las de nuestra sociedad. Este mundo ficticio invita al alumno a utilizar la matemática para hacer visibles las injusticias de nuestra sociedad y discutir sobre ellas.

Palabras claves: Planilandia, geometría, secciones planas, justicia social.

Abstract
Starting from the novel *Flatland* written by Edwin Abbott we propose a didactic sequence framed in the Mathematics Education for Social Justice for the third year of the secondary school. It proposes to work with space geometry and to reflect on social inequalities. Storytelling is used as a resource to present a flat world inhabited by geometric figures with analogous injustices to those of our society. This fictional world invites the student to use mathematics to make visible the injustices of our society as well as to discuss about them.

Keywords: Flatland, geometry, cross sections, social justice.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge en el curso de Didáctica III del Profesorado de Matemática como elaboración para el primer trabajo parcial cuya consigna solicitaba el diseño de una propuesta didáctica enmarcada en la perspectiva *enseñar matemática para la justicia social*. El recurso utilizado es la narración oral de un cuento que permite el trabajo en geometría y al mismo tiempo promueve la reflexión sobre las desigualdades sociales.

El cuento es un fragmento de *Planilandia. Una novela de muchas dimensiones,* escrita por el inglés Edwin Abbott en 1884, que fue adaptado para narrarlo oralmente. Como el subtítulo de la novela lo sugiere, esta abarca distintas dimensiones y no sólo en un sentido espacial. Se plantea la posibilidad de una cuarta dimensión (hay quienes consideraron que se adelantó a la Teoría de la Relatividad), pero también tiene una fuerte dimensión social. La novela se ha considerado una sátira a la sociedad victoriana de la época en que fue escrita. En la injusta sociedad creada por Abbott, los habitantes son clasificados de acuerdo a la cantidad de lados que tienen. Esto determina la calidad de vida de los mismos y su grado de integración social. Si bien el autor satirizó la época en que él vivió, creemos que lo que plantea permite interrogar también a la sociedad actual. En la propuesta de Llorente (2012) sobre Educación para la Justicia Social se enfatiza la importancia de formar ciudadanos capaces de convivir y participar del sistema democrático; la propuesta de enseñanza que realizamos está en consonancia con esto pues contribuye a la formación de sujetos capaces de convivir en pluralidad. Los alumnos deberán enfrentarse a diferentes opiniones y elaborar una respuesta en conjunto a lo planteado. Se busca fomentar, no sólo que los estudiantes cuestionen valoraciones sociales presentes en el mundo en que vivimos sino que generen junto a sus compañeros nuevas formas de manejarse en sociedad. Estimular esto resulta fundamental si entendemos que nuestros actuales alumnos son quienes tienen la posibilidad de superar las injusticias del mundo actual y del que está por venir: "Y aunque no cambiemos el mundo, habremos llenado de sentido nuestra vida" (Llorente, 2012, párr. 24).

En la actividad se formulan preguntas que buscan evidenciar las injusticias presentes en Planilandia, las que, como ya se dijo, presentan analogías con las de nuestra sociedad. El conocimiento matemático juega un rol fundamental en la comprensión de dichas injusticias. Es necesario conocer a los distintos polígonos para entender la organización social de Planilandia pues los derechos de estos polígonos –que son los habitantes– dependen del número de lados que tengan. También resultará necesaria una indagación sobre las distintas secciones de algunos sólidos para comprender las limitaciones de las clasificaciones sociales anteriores. Aplicando nuevamente la analogía entre Planilandia y nuestra sociedad, podremos ver cómo la actividad muestra la importancia de la matemática al generar una interpretación de la realidad que evidencie las injusticias que en esta se presentan. Esto fomenta la idea de que la matemática nos permite "Leer el mundo a partir de recursos matemáticos" (Skovsmose, 2012, p. 65). Si bien en algunas de las preguntas propuestas el mundo que se "lee" inicialmente por medio de la matemática es el mundo ficticio de Planilandia, se agregan otras que pretenden establecer analogías con el mundo en el que vivimos. Si entendemos como Skovsmose (2012) que la matemática como lenguaje no meramente describe el mundo sino que lo crea, debemos ser particularmente cuidadosos al hacer uso de este lenguaje para "formar" el mundo. Aquí es donde abrimos un pequeño intersticio en el que damos paso a lo que pueden hacer nuestros alumnos por una mejor sociedad. Por esto, en la actividad propuesta se busca que el estudiante cuestione las valoraciones sociales medibles tanto en Planilandia como en nuestra sociedad, haciéndole reflexionar sobre cómo dichas valoraciones no simplemente describen la realidad sino que la crean: crean la desigualdad y las injusticias. Por este motivo proponemos una búsqueda hacia la construcción de otro mundo.

Resulta relevante destacar que en esta propuesta se busca también evidenciar que las lecturas que se pueden hacer del mundo por medio de la matemática son múltiples. Esto lleva a advertir sobre las limitaciones que pueden presentar ciertas interpretaciones matemáticas de la realidad. Con esto nos referimos a aquellas interpretaciones reduccionistas que no logran dar cuenta de la complejidad de aquello que se analiza. Un buen manejo matemático permitirá dar cuenta de los usos abusivos de la matemática para interpretar el mundo. Esto promueve la idea de que a la matemática, así como a toda creación humana, se le puede dar distintos usos. Nos puede permitir realizar un análisis adecuado de la realidad así como nos puede conducir a simplificarla y cometer injusticias. En cualquier caso, queda claro en la actividad cómo la matemática permite hacer mejores interpretaciones de la realidad que en ausencia de ella, así como identificar cuándo se hace un uso abusivo de la misma.

EL LUGAR DEL CUENTO EN UNA PROPUESTA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA LA JUSTICIA SOCIAL

En una propuesta que apunta a educar para la justicia social resulta de suma relevancia lograr el involucramiento de los estudiantes. Iniciar la clase con la narración de un cuento favorece esto último. Según Green (2004) "las historias tienen una estructura poderosa para organizar y transmitir información, y para crear significado en nuestras vidas y entornos" (párr. 1). Zazkis y Liljedahl (2009) afirman que incluir historias en una clase de matemática favorece que el estudiante se comprometa con una actividad. Los cuentos evocan emociones en el estudiante permitiéndole acercarse a aquello que se pretende enseñar de forma significativa. También plantean que los cuentos aportan un enfoque humano de la matemática. Según Raines e Isbell (1994) la narración oral resulta más personalizada que la lectura pues el narrador puede establecer contacto visual con sus interlocutores y adaptar el discurso dependiendo de las necesidades de estos. Se espera que la narración del cuento capte la atención de los estudiantes, que los movilice frente a las injusticias que se presentan y que los invite a comprometerse con la actividad que luego se les presentará. Entendemos que el cuento, además de favorecer el involucramiento con la dimensión social de la actividad propuesta, acerca al estudiante al contenido matemático que se desea presentar. El cuento da sentido a la exploración de las secciones de sólidos. Esta exploración permite ver cómo son vistos los sólidos en Planilandia y analizar la pertinencia de las clasificaciones sociales en ese lugar.

UNA HISTORIA A PARTIR DE PLANILANDIA

La historia que se presenta a continuación es una adaptación a la oralidad de distintos fragmentos tomados de Planilandia. Se les dio continuidad para que la historia resultara autocontenida. También se actualizó el lenguaje utilizado en la novela para que no resultase ajeno al alumno.

Esta historia se narrará oralmente y a partir de ella se propondrán varias actividades. Si bien se presentarán conjuntamente esto no quiere decir que estén pensadas para llevar al aula en una sola sesión. Las actividades son para desarrollar a lo largo de la unidad de geometría del espacio, articulando con los distintos contenidos de esta y no necesariamente en forma lineal. Del mismo modo la narración se puede ir haciendo en distintas clases acompañando las diferentes actividades. Para la parte (4) de la actividad se le entregará a los alumnos material concreto: un prisma, una pirámide, un cono y un cilindro.

> Les contaré cómo es el mundo del que vengo: Planilandia. Lo llamo Planilandia, no porque nosotros le llamemos así, sino para que les

resulte más claro a ustedes, que tienen el privilegio de vivir en el espacio, cómo es nuestro mundo. Imaginen una hoja de papel en la que líneas rectas, triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y otras figuras, en vez de permanecer fijas en sus lugares, se moviesen libremente pero sin la capacidad de elevarse por encima ni de hundirse por debajo de la hoja. Si piensan en cómo se comportan las sombras, tendrán entonces una buena noción de cómo es Planilandia. Les contaré cómo son los habitantes de este lugar. La máxima longitud o anchura de un habitante plenamente desarrollado de Planilandia puede considerarse que es de unos doce centímetros y medio. Dentro de Planilandia consideramos inferiores a los polígonos que no son regulares (estos son los de la clase baja) y tenemos también una clasificación dentro de los regulares. Nuestra clase media está formada por triángulos equiláteros. Luego le siguen los profesionales, que son cuadrados (clase a la que yo mismo pertenezco) y figuras de cinco lados o pentágonos. Inmediatamente por encima de estos viene la nobleza, formada por figuras de seis lados o hexágonos. A partir de ahí va aumentando el número de lados hasta que reciben el honorable título de poligonales o de muchos lados. Finalmente, los de la clase más alta son aquellos cuyo número de lados es tan grande que su figura se asemeja a un círculo. Los polígonos irregulares tienen una vida dura, eso es indiscutible, no están bien integrados a la sociedad. Los intereses de la mayoría exigen que sea así. No se puede vivir bien con peligrosos polígonos irregulares, que al verlos uno de frente no puede saber qué forma esconden y qué peligro representan. Como les dije yo soy un cuadrado. Mi esposa también. Tuvimos un hijo pentágono y un nieto hexágono. Yo me llevo particularmente bien con mi nieto. Es un joven sumamente prometedor, de una inteligencia extraordinaria y una angularidad perfecta. Por las mañanas suelo enseñarle cosas a mi brillante nieto. Una mañana, en la que le estaba enseñando los fundamentos de la aritmética y su aplicación a la geometría, le enseñé que el número de metros cuadrados de un cuadrado se calcula elevando al cuadrado el número de metros de uno de sus lados. El pequeño hexágono reflexionó durante un largo momento y después dijo: "También me has enseñado a elevar números a una tercera potencia. Supongo que 3^3 debe tener algún sentido geométrico; ¿cuál es?" "Nada, absolutamente nada", repliqué, "al menos en la geometría, porque la geometría sólo tiene dos dimensiones". Y luego enseñé al muchacho cómo un punto que se desplaza tres metros genera una línea de tres metros, lo que se puede expresar con el número 3; y si una línea de tres metros se desplaza paralelamente a sí misma tres metros, genera un cuadrado de tres metros de lado, lo que se expresa aritméticamente por 3^2. Pero mi nieto insistía: "Pero si un punto, al desplazarse tres metros, genera una línea de tres metros, que se representa por el número 3, y si una recta, al desplazarse tres metros paralelamente a sí misma, genera un cuadrado de tres metros por lado, lo que se expresa por 3^2, entonces un cuadrado de tres metros por lado que se mueve de alguna manera (que no acierto a comprender) paralelamente a sí mismo, generará algo (aunque no puedo imaginarme qué) y este resultado podrá expresarse por 3^3. "Andá a la cama", le dije, algo molesto por su interrupción. –Ese chico es tonto; 3^3 no puede tener ningún significado en geometría. Y en ese mismo instante escucho una voz que me dice: –El chico no es ningún tonto; y 3^3 tiene un significado geométrico evidente. A primera vista parecía ser un segmento, visto de lado; pero unos instantes de observación me mostraron que los extremos se hacían borrosos con demasiada rapidez para que se tratase de un segmento, yo habría pensado que se trataba de un círculo si no pareciese cambiar de tamaño de una forma imposible en un círculo o en cualquier figura regular de la que yo hubiese tenido experiencia. –Soy una esfera, vengo de la tercera dimensión. Ese día aprendí lo que era una esfera y muchas cosas más que este cuerpo me contó sobre la tercera dimensión. Por eso escribo estas líneas, porque tengo la esperanza de que puedan, de alguna manera, no sé cómo, llegar hasta los seres de otras dimensiones y puedan impulsar la aparición de rebeldes que se nieguen a estar en una dimensionalidad limitada.

Actividad

¿Cómo imaginas Planilandia y a sus habitantes? Discútelo con tus compañeros y luego realicen o respondan lo siguiente:

(1) ¿Qué tipo de figuras geométricas habitan Planilandia?

(2) Representen en una cartulina, usando un sólo color, algunos habitantes de Planilandia.

(3) ¿Cómo clasifican en Planilandia a sus habitantes? Clasifiquen a los habitantes que dibujaron de acuerdo a ese criterio.

(4) Usando un color diferente al de la parte (2), representen cómo podrían verse en Planilandia los sólidos que se les entregaron

(prisma, pirámide, cono, cilindro), para alguien que no vive en Planilandia.

(5) Ingresen a https://www.geogebra.org/m/t5QdSD4F. A partir de experimentar moviendo la bola verde, ¿creen que el cubo podría verse en Planilandia como un hexágono para alguien que no vive en Planilandia? Discute con tus compañeros si cada sólido de la parte (4) puede ser visto de una forma distinta a la que representaron.

(6) ¿Se puede clasificar a la esfera en alguna de las clases sociales de Planilandia? ¿Y a los demás sólidos?

(7) En nuestra sociedad, ¿también hay valoraciones sociales que dependan de cosas medibles? ¿Cuáles?

(8) ¿Creen que existen características relevantes de las personas que no puedan ser expresadas a partir de cosas medibles? ¿Cuáles?

(9) La presencia de la matemática en los criterios dados en (7), ¿implica que estos sean objetivos? Es decir, ¿hace que admitan una única forma de clasificación una vez establecido el criterio?

(10) Considera el siguiente fragmento del cuento: "Los polígonos irregulares tienen una vida dura, eso es indiscutible, no están bien integrados a la sociedad. Los intereses de la mayoría exigen que sea así. No se puede vivir bien con peligrosos polígonos irregulares, que al verlos uno de frente no puede saber qué forma esconden y qué peligro representan." ¿Creen que en nuestra sociedad hay individuos que ocupen un lugar similar al que ocupan los polígonos irregulares en Planilandia? ¿Qué opinan de esto?

(11) Así como los habitantes de Planilandia no podían percibir la tercera dimensión, ¿creen que hay cosas que ustedes no pueden

percibir?

(12) ¿A qué se refiere el cuadrado, al final de la historia, cuando dice que espera que rebeldes se nieguen a vivir en una dimensión limitada? ¿Creen que en algún sentido ustedes viven en una dimensión limitada? ¿Pueden hacer algo para cambiar esto?

Algunas respuestas posibles

La pregunta (1) es simplemente para evaluar la comprensión de la lectura. Se espera que respondan, sin mayor dificultad, que en Planilandia viven polígonos. En (2) se espera que cada grupo represente polígonos distintos y que a partir de ellos respondan a la pregunta (3). Es de esperar que cada grupo clasifique a los habitantes de Planilandia que representaron, utilizando los criterios establecidos en el cuento. En (4) se pide a los estudiantes que usen un color diferente para que puedan distinguir esta representación de la anterior. Nuevamente resulta probable que cada grupo haga una representación distinta a partir de la cual contestarán la pregunta siguiente. En la parte (5) se proporciona una animación, disponible en internet, para que los alumnos experimenten moviendo la bola verde. Es posible que los estudiantes representen a los sólidos en Planilandia a partir de la intersección con planos paralelos a su base. Se espera que esta pregunta haga que consideren otras posibles intersecciones entre los sólidos y un plano. Se buscó elaborar una pregunta que ponga a los estudiantes en situación de hacer una primera indagación sobre intersecciones entre sólidos y planos. Creemos que el hecho de que esta exploración se haga con el propósito de responder cómo podrían verse en Planilandia algunos sólidos, hace significativa la búsqueda para los estudiantes. A partir del apoyo en GeoGebra y de la discusión entre pares es esperable que puedan concluir que el cubo puede ser visto como un hexágono en Planilandia. También se espera que puedan encontrar una sección más de cada sólido que la representada inicialmente. Para responder a la pregunta (6) posiblemente noten que los criterios de Planilandia no permiten clasificar a la esfera, ya que esta puede ser vista como un círculo o como un punto y en Planilandia no hay ni círculos ni puntos. La pregunta respecto a los demás sólidos admite distintas respuestas. Todos ellos pueden ser clasificados cuando se muestran de una manera pero no de otras; por ejemplo, es posible clasificar al cubo cuando es visto como un cuadrado pero no al ser visto como un punto. Esto puede llevar a la conclusión de que no hay una clasificación adecuada que abarque a todas las figuras o que la hay dependiendo de cómo sean vistos. En este último caso también se puede clasificar a cada sólido en distintas clases sociales, dependiendo de cómo se lo esté intersecando con el plano de referencia (Planilandia). La pregunta (7) admite muchísimas repuestas. Algunas de ellas son: la edad, la altura, el peso, los ingresos, la cantidad de amigos, la cantidad de virtudes. Algunos ejemplos que pueden considerar para responder (8) son: el carácter de la persona, los gustos, las habilidades, los defectos, las aspiraciones. La pregunta (9) podría ser interpretada metafóricamente. En este caso una posibilidad es que los alumnos digan cosas como que no pueden percibir el modo en que otras personas entienden el mundo. Nuevamente las respuestas posibles son múltiples. Se podría responder que no, ya que por ejemplo podemos considerar que la cantidad de habilidades que tiene una persona depende de quién lo evalúe. En caso de que todos los estudiantes contesten que sí, se les presentará este ejemplo para discutir. Para responder (10) es probable que noten que en nuestra sociedad también hay gente marginada para quienes la vida es muy dura. También podrían relacionar lo planteado en el cuento con la discusión sobre la inseguridad en nuestro país, ya que en el texto se plantea que los polígonos son peligrosos y que resulta conveniente para la mayoría no integrarlos a la sociedad. En caso de que no surja de ellos se presentará la analogía para discutirse en la puesta en común. Al preguntarles su opinión se busca que los estudiantes vean cómo en clase de matemática pueden ser relevantes sus opiniones personales. Además, se busca que la respuesta no quede en una mera descripción sobre nuestra sociedad sino que lleve a cuestionar si es deseable que lo sea de este modo. Una posibilidad frente a la pregunta (11) es que los estudiantes planteen que podría existir una cuarta dimensión que no nos es posible detectar. También podrían interpretar la pregunta metafóricamente. En este caso, una posibilidad es que digan cosas como que no pueden percibir el modo en que otras personas entienden el mundo, o cómo sienten. La pregunta (12) admite una interpretación literal y otra metafórica. En ambas se podría concluir que el cuadrado está invitando a los lectores a no quedarse con aquello a lo que acceden en las primeras instancias.

PRIMERAS OBSERVACIONES RECABADAS

La historia con la que se trabaja presenta a los alumnos situaciones de injusticia y se los invita a reflexionar sobre ellas. Si bien es claro que la reflexión por sí misma resulta valiosa, al implementarse estas actividades en un grupo de tercer año de Ciclo Básico, surgió la necesidad de llevar la discusión a la acción, dándoles a los alumnos la posibilidad de elaborar algo a partir de lo discutido. Para ilustrar el potencial de las actividades, presentaremos a continuación un ejemplo de las primeras observaciones recabadas.

Si bien no parece posible que los alumnos intervengan hoy de forma significativa en las injusticias de nuestra sociedad, se les dio la posibilidad de intervenir en las injusticias de Planilandia. Para esto se utilizó la escritura como recurso, invitándolos a continuar la escritura de partes de la historia. Esto les permitió pasar de un primer momento, en el que sólo se valoraba negativamente lo que sucedía en Planilandia, a otro en el que buscaban modificarlo.

Comenzando este proceso una alumna escribe sobre dos triángulos que "... no querían vivir en Planilandia. Ellos no querían ser planos. Querían saber cómo se sentía tener una altura y una profundidad. Pero no podían irse de Planilandia, por lo cual lo único que podían hacer era soñar."

La misma alumna, finalizando este proceso escribe: "…un día Rombito hizo una revolución y todos los polígonos irregulares se le sumaron y consiguieron la paz en Planilandia".

Al igual que esta alumna, la mayoría de los estudiantes vivieron un proceso similar. Comenzaron por discutir sobre un mundo plano e injusto hasta que finalmente los alumnos "consiguieron la paz en Planilandia".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abbott, E. (2010). *Planilandia*. España: Laertes Ediciones.

Green, M. (2004). El relato de historias en la enseñanza. *Observer*, 17 (4). Recuperado desde http://www.psychologicalscience.org/publications/observer/2004/april-04/storytelling-in-teaching.html?es=true

Llorente, M. (2012). Educar para la justicia social. *Ponencia presentada en el Foro Mundial de Educación* (Brasil). Recuperado desde http://www.concejoeducativo.org/article.php?id_article=436

Raines, S. e Isbell, R. (1994). *Stories: Children's Literature in Early Education*. Albany, NY: Delmar Publishers.

Skovsmose, O. (2012). Alfabetismo matemático y globalización. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del* *aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 65-105). Bogotá: una empresa docente. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/2003/1/Skovsmose2012Alfabetismo.pdf

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam: Sense Publishers.

UNA HISTORIA DE CONTADORES

MARINÉS DOLGAY, CRISTINA OCHOVIET

Dime un hecho y aprenderé. Dime la verdad y creeré.
Pero cuéntame una historia y la viviré en mi corazón por siempre.
Proverbio indio

Resumen
A partir de la narración oral de una historia proponemos reflexionar sobre una desigualdad frecuente en el Uruguay: la brecha salarial de género. Presentamos una actividad de enseñanza que involucra el concepto de porcentaje y está dirigida a estudiantes de primer año de enseñanza media. La propuesta está enmarcada en educación matemática para la justicia social.

Palabras clave: porcentaje, brecha salarial de género, educación para la justicia social.

Abstract
Through storytelling we propose a reflection about a common inequality in Uruguay: the gender pay gap. We present a learning activity for the first year of the secondary school involving percentages. We consider a social justice approach to mathematics education.

Keywords: percentage, gender pay gap, education for social justice.

INTRODUCCIÓN

Utilizando como recurso la narración oral de historias y desde la perspectiva de *educar para la justicia social* (Llorente, 2012), se presenta una propuesta de enseñanza para el primer año de la enseñanza media que tiene como meta a lograr por parte de los alumnos: "Leer el mundo a partir de recursos matemáticos" (Skovsmose, 2012, p. 65).

La historia que se propone intenta dar una mirada hacia nuestra sociedad focalizándose en el tema: brecha salarial de género.

FUNDAMENTACIÓN

Educar para la justicia social a través de la matemática nos permite contextualizar la enseñanza utilizando situaciones de nuestro entorno, en este caso, relativas a las diferencias salariales que se dan en el Uruguay entre hombres y mujeres cuando estos desempeñan idénticas funciones. El enfoque adoptado permite generar un espacio donde se entrelace el aprendizaje de la matemática, utilizada como una herramienta para realizar una lectura de la realidad, con la formación de ciudadanos críticos y reflexivos.

La historia que se utiliza fue diseñada con el fin de implementar una propuesta didáctica que posibilite leer el mundo e interpretarlo a través de la matemática y a su vez promover compromisos sociales para actuar a favor de una mayor equidad y justicia social (Mateos, Bejarano y Moreno, 2014).

ASPECTOS METODOLÓGICOS PARA EL DISEÑO DE LA HISTORIA Y LA ACTIVIDAD

Zazkis y Liljedahl (2009) sostienen que las historias pueden aportar el elemento humano a conceptos o ideas que a priori pueden resultar difíciles de incorporar en sus estructuras. Aportan una perspectiva diferente a la forma usual en la que estos conceptos son presentados.

Estos autores proponen seis puntos a seguir para la elaboración de una historia para enseñar un tema. Son los que nos guiaron para diseñar la historia que se presenta en la próxima sección:

1. Identificar lo que se desea enseñar: concepto de porcentaje.

2. Pensar en una situación problemática que permita el abordaje del tema a trabajar: diferencia salarial entre el hombre y la mujer.

3. Contexto emotivo donde se desarrolla la historia: una pareja que trabaja para una misma empresa, realizando la misma tarea y su remuneración salarial es diferente. En el transcurso de la narración se formularán preguntas para que los estudiantes respondan y se vayan involucrando en la historia que se está narrando. Por ejemplo: ¿Cómo creen que seguirá la historia? ¿Qué harían ustedes en su lugar? ¿Cuál fue la reacción de los personajes?

4. Organizar la forma en la que se presentará el problema: en este caso decidimos presentar la actividad a posteriori de la narración.

5. Extender o variar la situación problemática inicial: se propone una actividad a realizar y luego se sugieren preguntas complementarias.

6. Conclusión: al finalizar la actividad se pueden realizar preguntas para que los estudiantes sigan relacionando la historia narrada con la realidad y profundicen en los conceptos matemáticos puestos en juego.

Además de utilizar una historia como recurso didáctico para enseñar matemática, se busca, a partir de ella, educar para la justicia social. Esto se logrará planteando preguntas que invitan a la reflexión acerca de una desigualdad social como es la brecha salarial de género.

UNA HISTORIA SOBRE CONTADORES

A continuación se presenta una historia que hace referencia a una desigualdad social como es la brecha salarial de género y se trabaja con el concepto de porcentaje para hacer una lectura de la problemática social que se desea abordar.

Morena, una chica de pelo oscuro y enrulado muy largo, con unos enormes ojos negros, luchó muchos años por la conquista de un sueño: llegar a ser contadora como su tía.

En la facultad conoció a Martín y con él compartió preparaciones de exámenes y grupos de estudio. No tardaron mucho tiempo en ser pareja.

Cuatro años de dedicación y estudio dieron su fruto pues Morena y Martín lograron titularse en ese tiempo.

Los dos salieron a la búsqueda de trabajo y, para su sorpresa, ambos fueron convocados para una entrevista en la misma empresa pues se iban a crear dos nuevos cargos de contador.

Después de la entrevista compartieron la buena noticia: los dos habían sido contratados como flamantes contadores. El sueldo que cada uno ganaría también fue tema de conversación. Cuando Morena escuchó el sueldo de Martín se dio cuenta de que había una diferencia con el que le habían prometido a ella y no entendía el porqué. Se conformó pensando que seguramente tendrían diferentes responsabilidades.

Comenzaron a trabajar el mismo día y en el mismo horario aunque en oficinas diferentes. Compartían el almuerzo y conversaban sobre el trabajo que realizaban, las obligaciones y responsabilidades de sus cargos, sobre el humor del jefe…

A partir de estas charlas con Martín, Morena empezó a darse cuenta de que ambos realizaban exactamente las mismas tareas. Algunas preguntas volvían una y otra vez a su cabeza: ¿cómo podía ser que su sueldo fuera inferior al de Martín? ¿En qué se basaba su jefe para establecer esa diferencia en el sueldo?

Estas ideas rondaron la cabeza de Morena durante varios días hasta que tomó una decisión: hablaría con su jefe al día siguiente.

Al otro día, después de haber conquistado un buen aumento de sueldo, Morena pensó: algún día todas las mujeres haremos valer nuestros derechos y no habrá diferencias salariales entre hombres y mujeres.

Actividad

(1) Antes de que Morena hablara con su jefe, Martín cobraba mensualmente $32500 mientras que ella cobraba $22750. ¿Qué porcentaje era el sueldo de Morena del sueldo de Martín?

(2) ¿Qué porcentaje de aumento le tendrían que haber otorgado a Morena para igualar el sueldo de Martín?

(3) Si fueras el jefe de Morena, ¿qué aumento le hubieras dado? ¿Por qué?

(4) Investiga si lo que le sucedió a Morena le sucede a otras mujeres en nuestro país.

(5) ¿Qué hubieras hecho en el lugar de Morena? Redacta un nuevo final para la historia argumentando las decisiones que tomes.

Análisis a priori

En la historia se habla de diferencias salariales entre hombres y mujeres. En la pregunta (1) se presenta el salario inicial de cada profesional. El concepto matemático involucrado es el de porcentaje.

Se intenta con este tema leer la realidad existente acerca de la brecha salarial de género. Plantear esta lectura en términos de porcentaje nos permite identificar claramente la diferencia salarial. De esta forma nos alejamos de interpretaciones como “gana menos”, “le pagan un poco menos” para pasar a la matematización de la brecha salarial.

En la parte (1) se observará que el sueldo de Morena es el 70% del salario de Martín. Una cuestión complementaria que se podría plantear a los estudiantes es: si se rebaja un 30% el sueldo de Martín, ¿logran igualarse los salarios de ambos contadores?

Para pensar la pregunta (2) tenemos que ubicarnos ahora en el salario de Morena como cantidad base. A Morena le tendrían que haber dado casi un 43% de aumento para igualar el salario de Martín. A partir de los cálculos realizados para responder (1) y (2) se puede proponer a los estudiantes analizar, por ejemplo, por qué si rebajamos el salario de Martín un 30% lograríamos igualar los dos salarios pero si aumentamos el de Morena el mismo porcentaje, no.

La pregunta (3) habilita una reflexión invitando a los estudiantes a ponerse en el lugar del jefe y abrir un debate acerca del aumento que cada uno le hubiese otorgado y el motivo del porqué de ese aumento. Es una pregunta abierta que permite a los estudiantes un amplio abanico de respuestas y los pone en una situación de confrontación de intereses, teniendo que tomar una decisión importante.

Buscar información acerca de esta situación en nuestro país nos mostrará que lo que le pasa a Morena también puede estar pasándole a muchas personas a nuestro alrededor. La diferencia salarial de género es una situación bastante recurrente en Uruguay.

En la pregunta (5) el alumno se pondrá en el lugar de Morena y reflexionará acerca de la decisión que ella tomó; se plantea una invitación a la toma de nuevas decisiones.

REFLEXIONES FINALES

Trabajar con justicia social en la clase de matemática permite que el alumno desarrolle capacidad crítica para incidir en su entorno o, al menos, para tomar mejores decisiones. La historia que se propone intenta dar una mirada hacia nuestra sociedad y a las desigualdades que existen en materia de brecha salarial entre hombres y mujeres aún cuando estos realizan las mismas tareas.

Utilizar historias es un recurso apropiado para trabajar con justicia social en las clases de matemática del Ciclo Básico y la metodología presentada puede ser de utilidad para reflexionar sobre otros aspectos relacionados a la justicia social.

Las historias nos permiten contextualizar la realidad y utilizamos a la matemática como una herramienta para hacer una lectura de esta. Después de ganar en la comprensión de la temática podemos reflexionar mejor acerca de cómo actuar, cada uno desde su lugar, para contribuir a una sociedad más justa para todos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Llorente, M. (2012). Educar para la justicia social. *Ponencia presentada en el Foro Mundial de Educación* (Brasil). Recuperado desde http://www.concejoeducativo.org/article.php?id_article=436

Mateos, A., Bejarano. M. y Moreno, D. (2014). Los cuentos y los juegos de simulación para trabajar la justicia social en el ámbito de las ciencias en las primeras edades. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social (RIEJS), 3*(1), 97-119. Recuperado desde http://www.rinace.net/riejs/numeros/vol3-num1/art6.pdf

Skovsmose, O. (2012). Alfabetismo matemático y globalización. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 65-105). Bogotá: una empresa docente. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/2003/1/Skovsmose2012Alfabetismo.pdf

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam: Sense Publishers.

LEER EL MUNDO A PARTIR DE RECURSOS MATEMÁTICOS: SITUACIONES DE INJUSTICIA SOCIAL QUE AFECTAN A NIÑOS Y ADOLESCENTES

LILIANA LEIRÓS, VALERIA RAMÍREZ, CRISTINA OCHOVIET

Resumen
Presentamos actividades que pretenden desarrollar ciertas habilidades matemáticas en los estudiantes, la construcción de ciudadanía y la comprensión del concepto de justicia social. Proponemos emplear la matemática como herramienta para leer, interpretar y reflexionar sobre nuestra realidad social, en especial sobre situaciones de profunda injusticia social que afectan a niños y adolescentes. El concepto de justicia social empleado es integrador de tres vertientes actuales: justicia como distribución, como reconocimiento y como participación; se plasma en las actividades tanto a través de los temas abordados como de las tareas que se proponen a los estudiantes.

Palabras claves: diseño de tareas, enseñanza de la matemática, justicia social.

Abstract
We present some activities aiming to develop certain mathematical skills in students, the construction of citizenship and the understanding of the concept of social justice. We suggest using mathematics as a tool to read, interpret and reflect on our social reality, especially on situations of profound social injustice affecting children and adolescents. We consider a concept of social justice that integrates three current orientations: justice as distribution, as recognition and as participation; it is reflected in the activities both through the topics and the tasks proposed to students.

Keywords: task design, teaching mathematics, social justice.

¿POR QUÉ REFLEXIONAR SOBRE LA JUSTICIA SOCIAL EN LA CLASE DE MATEMÁTICA?

Las actividades que presentamos a continuación proponen orientar la educación matemática de nuestros estudiantes hacia un lugar al que no nos solemos dirigir;

proponemos emplear la matemática como herramienta para leer, interpretar y reflexionar sobre nuestra realidad social.

Se trata, tal como dice Gutstein (2003, citado por Skovsmose, 2012, p. 65), de usar la matemática para: "… comprender las relaciones de poder, las inequidades de recursos y las disparidades de oportunidades entre diferentes grupos sociales, así como entender la discriminación explícita basada en raza, clase social, género, lengua y otras diferencias".

Las razones que justifican la incorporación de la enseñanza de la matemática en la enseñanza obligatoria plantean, como uno de sus fundamentos, la construcción del tipo de ciudadano que la sociedad actual exige.

A este respecto, una entidad de referencia como lo es el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (1991), sostiene que debido al hecho de que las sociedades industrializadas se han transformado profundamente como consecuencia de la sustitución de las comunicaciones mecánicas por las comunicaciones electrónicas, las primeras han ingresado en un nuevo tipo de sociedad llamada sociedad de la información, en la cual los objetivos planteados a la educación se han modificado. La sociedad de la información exige, entre otros, que la educación brinde oportunidad de formarse a todos los integrantes de una sociedad y que aporte herramientas para generar un electorado con capacidad de informarse técnicamente y de procesar información compleja.

Vanegas y Giménez (s/f), señalan que "En muchos de los currículos actuales, se justifica la enseñanza de las matemáticas, por sus aportes para preparar al individuo para la ciudadanía. Pero se interpreta a menudo desde una visión mercantilista, en cuanto 'saber matemáticas' facilita acceder a una carrera de ciencia o tecnología" (p. 2).

Sin embargo, desarrollar la potencia matemática de nuestros estudiantes no sólo es útil al ser humano en su vida laboral sino también para su integración social. Como Vanegas y Giménez (s/f) sostienen:

> …como docentes promovemos la competencia ciudadana **a través de las matemáticas** en cuanto fomentamos […] un conjunto *de saberes y prácticas matemáticas reflexivas, comprometidas, responsables y solidarias* […]*, con el fin de aprender a reconocer el valor de construir matemáticas para interpretar hechos y cambios sociales, y aprender a participar democráticamente en procesos decisorios comunitarios* […]. (p. 5)

Coincidimos con Parra (2013) en que:

> … la formación de los estudiantes como ciudadanos críticos y reflexivos constituye más que nunca un desafío central para la escuela en la medida que tras la formación ciudadana se juega el tipo de democracia, de justicia y por tanto de sociedad que se espera construir. (p. 3929)

¿QUÉ CONCEPTO DE JUSTICIA SOCIAL SE ADOPTÓ PARA EL DISEÑO DE LA ACTIVIDAD Y CUÁLES FUERON LAS FUENTES?

Murillo y Hernández (2011) sostienen que en la actualidad conviven tres grandes concepciones de justicia social que toman como base los planteamientos de Platón –justicia como armonía social– y sobre todo de Aristóteles –justicia distributiva y justicia correctiva–.

A su vez, afirman que el concepto de justicia social se caracteriza por ser complejo, estar en permanente evolución, ser multidimensional, multidisciplinario y por tener un fuerte componente ideológico.

Estos autores señalan que las visiones actuales entienden a la justicia social como:

1. Distribución de bienes, de recursos materiales y culturales y de capacidades. Para la apropiada distribución esta concepción utiliza ciertos principios. Entre ellos, el principio de justicia igualitaria –a cada persona una parte igual– en la que las diferencias de partida de las personas se corrigen mediante la redistribución realizada a través de la tributación diferenciada y un sistema de bienestar social; el principio de justicia según la necesidad –a cada persona de acuerdo con sus necesidades– y el principio según el cual las desigualdades se pueden justificar si benefician a los más desaventajados sirviéndose de las políticas de compensación y de discriminación positiva.

2. Reconocimiento y respeto cultural de todas y cada una de las personas. Esta visión propone la ausencia de dominación cultural, la aceptación y el reconocimiento de las diferencias, la valoración de las minorías étnicas, raciales y sexuales.

3. Participación en las decisiones que afectan a sus propias vidas. Se refiere a promover el acceso y asegurar la capacidad de las personas para tener una activa y equitativa participación en la vida social. Defiende la igualdad de oportunidades, de acceso al poder y al conocimiento, al mismo tiempo que la eliminación de la opresión y la dominación institucional.

Estas tres concepciones resultan complementarias, y consideradas en forma integrada conforman el concepto de justicia social que hemos adoptado para el diseño de la actividad.

¿POR QUÉ UTILIZAR A LAS NOTICIAS COMO RECURSO DIDÁCTICO?

Adaptamos noticias recientes, extraídas de diferentes medios de comunicación masiva como un recurso didáctico que nos permite cumplir con varios objetivos: reflexionar acerca de los contenidos de la noticia, reflexionar acerca del manejo que los medios de comunicación hacen de la información, servir de respaldo para realizar actividades matemáticas propias del currículo escolar, vincular la matemática con temas de la vida real y tratar temas relacionados con la justicia social.

En la sociedad de la información en que vivimos estamos expuestos a un bombardeo constante de noticias provenientes de los medios de comunicación masiva. Nuestros estudiantes debido a su edad resultan especialmente vulnerables a esta situación.

La caracterización que realiza Delors (1996) sobre la sociedad de la información plantea que la educación en el siglo XXI estará sometida a una doble exigencia. Una de ellas se refiere a "no dejarse sumergir por las corrientes de informaciones más o menos efímeras que invaden los espacios públicos y privados, y conservar el rumbo en proyectos de desarrollo individuales y colectivos" (p. 91).

Compartimos la postura de Callejo de la Vega (2000) que sostiene que uno de los objetivos de la educación matemática debe ser

> …el dominio de los **códigos** en los que circula la información social necesaria para la participación ciudadana; uno de esos códigos es el lenguaje de la matemática que ayuda a comprender e interpretar algunas situaciones de la realidad social, como las relacionadas con la cantidad, la forma, la variación y el cambio o la incertidumbre, así como proponer alternativas. (p. 1)
>
> El dominio de la matemática para el ejercicio de la ciudadanía requiere no sólo conocer el lenguaje matemático y hechos, conceptos y algoritmos, sino también **procesos** más complejos como la **matematización de situaciones** y la **resolución de problemas**. (p. 2)

DOS EJEMPLOS

El concepto integrador de justicia social se hace presente en las actividades diseñadas mediante dos recursos:

a. los temas que se abordan, que son los que hacen que estén presentes en las actividades las ideas de distribución de bienes, de recursos materiales y culturales, y de reconocimiento y respeto de todas y cada una de las personas;

b. los tipos de tareas que se promueven entre los estudiantes que son, a su vez, los que permiten que estén presentes las ideas de promoción de una participación activa de las personas en la vida social.

El diseño de las actividades habilita tres tipos de tareas: (1) la reflexión sobre la fuente de información, (2) el trabajo matemático propiamente dicho y (3) la elaboración de un título para la noticia.

Cada una de estas tareas involucra una serie de habilidades relacionadas con el pensamiento matemático, con la construcción de ciudadanía y con el concepto de justicia social.

Actividad 1

Aquí escribirás el título de la noticia luego de finalizar la actividad.

Según la organización *Save the Children*, más de 8 millones de niños menores de cinco años pierden la vida cada año.

Uno de cada siete niños de nuestro planeta vive en lo que *Save The Children* ha definido como "desierto sanitario", es decir, en lugares en los que el acceso a los servicios sanitarios es prácticamente nulo, no hay vacunas o tratamiento para la diarrea, principales causas de la mortalidad infantil.

Más de un millón de madres y recién nacidos mueren cada año por complicaciones en el parto fácilmente prevenibles, debido a la escasez de atención profesional cualificada. La ayuda para salud materno-infantil llega apenas a un tercio de lo que se necesita: unos 17 billones y medio de dólares anuales.

(1) Indica brevemente qué es y a qué se dedica la organización *Save the Children*. ¿Te parece que la información que presenta esta organización es confiable? Fundamenta brevemente tu opinión.
(2) A partir de la información brindada por la noticia, calcula el promedio diario de niños menores de cinco años que pierden la vida.
(3) ¿Qué porcentaje de los niños del mundo no recibe atención de salud de ningún tipo?
(4) Sabiendo que los europeos gastan en cosméticos cada año unos 70 billones de dólares, ¿cuántos años de ayuda para la atención de la salud materno-infantil se podrían pagar con ese dinero?
(5) Escribe un título para esta noticia.

Análisis de la actividad 1

La situación planteada refiere a un caso en que no se realiza en forma justa la distribución de bienes y recursos materiales (recursos relativos a la atención de salud: medicamentos, vacunas, centros de atención de salud, hospitales, entre otros) ni de capacidades (no existe en esos países capacidad organizativa y de gestión para atender las demandas de salud de su población).

En un sentido amplio, tampoco hay un reconocimiento al derecho a la vida de estas personas –desde el momento que no se atiende su salud y muchos pierden la vida por esta razón– por lo que los demás derechos quedan vulnerados, incluso el derecho a participar en la vida social.

La consigna (1) habilita a reflexionar sobre la importancia de comprobar la confiabilidad de la fuente de información de una noticia y el valor de opinar en forma fundamentada.

Las consignas (2) y (3) permiten realizar el trabajo matemático correspondiente a temas de la unidad *Proporcionalidad y porcentajes* del programa de primer año del Ciclo Básico de enseñanza media. Se requiere haber trabajado previamente: la noción de razón, de proporción, la relación de proporcionalidad directa, el cálculo de promedios y porcentajes. A su vez, los contenidos de la noticia y las propuestas de trabajo permiten reflexionar acerca de temas de justicia social como por ejemplo: ¿qué significa el concepto "desierto sanitario"?, ¿es justo que existan desiertos sanitarios en el planeta?, ¿es esta una situación inevitable?, ¿qué consecuencias tiene para el desarrollo de los países que la población infantil sea afectada por esta situación?, ¿qué rol debería cumplir el Estado en la defensa de los derechos del niño dado que estos no pueden ejercer sus derechos por sí mismos?

La consigna (4) habilita a dimensionar la envergadura de la situación social planteada. El hecho de que el gasto anual en cosméticos de la población europea permita cubrir cuatro años de ayuda económica para la atención materno-infantil en los países afectados por esta situación, pone en evidencia la desigualdad en la distribución de los recursos económicos a nivel mundial y la disparidad de oportunidades que se brindan a las personas en los distintos puntos del planeta.

Para elaborar el título de la noticia solicitado en la consigna (5) es necesario haber analizado previamente la información, interpretado los datos numéricos y los cálculos matemáticos realizados, calibrado la dimensión cuantitativa y cualitativa de la situación y realizado una exigente tarea de síntesis para lograr plasmar en un enunciado el contenido de la noticia.

Actividad 2

Aquí escribirás el título de la noticia luego de finalizar la actividad.

La población infantil de nuestro planeta se estima en unos 2 100 millones.
Según datos recientes de la Organización Internacional del Trabajo, en el año 2010, aproximadamente un 10,24% de los niños del planeta trabajaba.
A su vez, un sesenta por ciento de los niños trabajadores lo hacían en la agricultura. Sólo uno de cada cinco niños que trabajaban lo hacían en un empleo pagado. La gran mayoría eran trabajadores familiares no remunerados.

(1) Indica brevemente qué es y a qué se dedica la Organización Internacional del Trabajo. ¿Te parece que la información que presenta esta organización es confiable? Fundamenta brevemente tu opinión.
(2) A partir de la información brindada por la noticia, calcula aproximadamente cuántos niños trabajan en nuestro planeta.
(3) ¿Qué porcentaje de los niños que trabajan en el mundo recibe un pago por su trabajo?
(4) Si la población de nuestro país en el año 2013 era de aproximadamente 3 440 000 habitantes, ¿cuál es la razón entre el número de niños que trabajan en nuestro planeta y la población del

Uruguay? Esto significa que hay ____ niños que trabajan en el planeta por cada habitante de nuestro país.

(5) Escribe un título para esta noticia.

Análisis de la actividad 2

La situación planteada se enmarca en una distribución no justa de bienes, de recursos materiales y culturales, y de capacidades.

Los bienes materiales y culturales (entendiendo por tales el sistema educativo y el sistema de protección social que brindan los distintos países) no se distribuyen en forma equitativa. En algunos países esto provoca que los niños sean obligados a insertarse en el mercado laboral a temprana edad, ya sea por mandatos directos o por tradiciones culturales. Una de las consecuencias que esto puede generar es la baja tasa de escolarización.

Los niños que trabajan y asisten a un centro educativo, disponen de menor tiempo para su educación frente a aquellos que sólo estudian y tienen las necesidades básicas satisfechas, esto sitúa a los primeros en clara desventaja frente a los segundos, por ejemplo, en la posibilidad de educarse y desarrollarse integralmente. También podría verse lesionada la participación en actividades sociales infantiles que contribuyen al desarrollo físico y emocional de los niños. A futuro, podría quedar limitada la participación en las decisiones que afectarán sus vidas.

Las consignas (1) y (5) habilitan las mismas reflexiones que en la actividad 1. Las consignas (2) y (3) permiten realizar un trabajo matemático similar al de la actividad anterior. En este caso es posible reflexionar sobre otras situaciones sociales como por ejemplo: ¿cómo afecta el trabajo durante la infancia y/o la adolescencia de una persona sus posibilidades actuales y futuras de desarrollo?, ¿cómo afecta el trabajo infantil y/o adolescente la perspectiva de desarrollo de un país?, ¿qué diferencias de oportunidades existen entre los niños que nacen en África subsahariana y aquellos que nacen en la Unión Europea?, ¿qué responsabilidades tienen los Estados, las empresas y los consumidores con respecto al trabajo infantil?, ¿por qué en el caso de los niños y adolescentes que trabajan no se respeta, en general, el derecho humano de percibir una adecuada remuneración por el trabajo realizado?

La consigna (4) habilita a dimensionar la complejidad de la situación social planteada. La razón entre la población uruguaya y la población infantil que trabaja permite indicar que cada habitante del Uruguay representa a 61 niños que trabajan en el mundo o, dicho de otra forma, que la población infantil que trabaja en el mundo es equivalente a 61 países que tuvieran la misma población que Uruguay.

REFLEXIONES FINALES

Con este trabajo intentamos aportar a los docentes algunas ideas de cómo utilizar la matemática para comprender y reflexionar sobre algunos temas de gran complejidad del mundo en que vivimos.

Llevar a cabo prácticas educativas de esta naturaleza aporta a que los alumnos desarrollen capacidades que les permitan actuar a favor de una mayor equidad y justicia social. Consideramos que también se logra una auténtica apropiación del conocimiento por parte de ellos poniéndolo en uso para pensar en situaciones reales que nos involucran a todos. La propuesta realizada demanda docentes formados, informados y comprometidos con la causa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Callejo de la Vega, M. (2000). Educación matemática y ciudadanía: Propuestas desde los Derechos Humanos. *Cuadernos de Sociedad y Educación*, *12*, 1-36. Ciudad Nueva, Santo Domingo: Editorial Centro Cultural Poveda.

Delors, J. (1996). Los cuatro pilares de la educación. En Santillana/UNESCO (Eds.), *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI* (pp. 91-103). Madrid, España: Santillana/UNESCO.

Gutstein, E. (2003). Teaching and Learning Mathematics for Social Justice in an Urban, Latino School. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 37-73.

Murillo Torrecilla, F. y Hernández Castilla, R. (2011). Hacia un concepto de Justicia social. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en educación*, 9(4), 7-23.

NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Madrid: SAEM Thales.

Parra, V. (2013). Una propuesta didáctica para construcción de ciudadanía crítica a través del aprendizaje de la matemática. En *Actas del VII CIBEM* (pp. 3929-3937). Montevideo, Uruguay: CIBEM.

Skovsmose, O. (2012). Alfabetismo matemático y globalización. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 65-105). Bogotá: una empresa docente. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/2003/1/Skovsmose2012Alfabetismo.pdf

Vanegas, Y. y Giménez, J. (s/f). *Aprender a enseñar matemáticas y educar en ciudadanía*. Recuperado desde http://www.academia.edu/232697/Aprender_a_ense%C3%B1ar_matem%C3%A1ticas_y_educar_en_ciudadan%C3%ADa

Sección 2

Análisis de implementación de diseños: relatos de aula

DISEÑO DE UNA MONTAÑA RUSA: UNA EXPERIENCIA CON LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

JUAN ÁLVAREZ, ROCÍO MARTÍNEZ, MARIELA REY

Resumen

En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se considera un proceso de estudio para la formación de profesores de matemática denominado Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP). Propuesto en un curso de matemática, consiste en que los futuros profesores aborden primero una secuencia de actividades y luego la implementen en enseñanza media, mediante prácticas conocidas como Recorridos de Estudio e Investigación. Estas se caracterizan por centrarse en la formulación de cuestionamientos y la búsqueda de respuestas posibles.

En este artículo presentamos las vivencias de la metodología REI-FP por parte de dos estudiantes del Profesorado de Matemática y de una de sus formadoras, en una institución formadora de profesores de matemática en Uruguay.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, recorridos de estudio e investigación para la formación de profesores.

Abstract

Based on the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), we consider a study process for mathematics teacher training known as Study and Research Paths for Teacher Education (SRP-TE). It consists in that future teachers first approach some tasks in a mathematic course, and then they implement them in the secondary school, focusing on the formulation of questions and search for possible responses.

In this article we present a SRP-TE methodology experienced by two mathematics student teachers and their teacher educator in a teacher training institution of Uruguay.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic, study and research paths for teacher education.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo consiste en una experimentación de un dispositivo didáctico para la formación de profesores de matemática, denominado Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP), propuesto por Barquero, Bosch y Romo (2015) desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). Pone en diálogo los aspectos matemáticos y didácticos de la formación de los futuros profesores de matemática para que estos puedan vivenciar y reflexionar acerca de los vínculos que ambos componentes tienen en su formación y en su desempeño como docentes.

El REI-FP del que tomamos elementos para la realización de este artículo se desarrolló en un curso básico de la formación de profesores de matemática en Uruguay. Aborda el cálculo diferencial e integral en funciones de una variable real. Los estudiantes participantes tenían algunas características especiales: les restaban hasta cinco asignaturas específicas para culminar su formación de grado, tenían experiencia docente de al menos tres años y en el momento en que se desarrolló la experiencia, tenían algún curso de matemática a cargo en la enseñanza media.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

A continuación presentamos cinco etapas para el desarrollo de un REI-FP (Barquero, Bosch y Romo, 2015) que iremos contextualizando a lo experimentado en el curso antes mencionado.

Etapa 1: La etapa de inicio parte de una cuestión abierta de la profesión docente (en el sentido de cuestión con diversas respuestas consideradas en su carácter provisorio), relacionada con una parte del conocimiento a ser enseñado. En este caso ¿cómo enseñar la derivada en la enseñanza media? En principio, se plantea una revisión de las respuestas de diverso tipo ya propuestas a esta pregunta, con énfasis en las usuales en la institución de referencia: desde el currículo y los textos oficiales, desde las investigaciones previas o desde las propuestas didácticas innovadoras.

Etapa 2: Esta etapa parte de la experimentación por parte de los estudiantes de profesorado de un REI previamente diseñado y experimentado con estudiantes de enseñanza media o de uno diseñado a tales efectos, que involucre la temática que se quiere abordar. Los estudiantes de profesorado vivirán este REI en su rol de matemáticos, es decir, en búsqueda de las respuestas y cuestiones provisorias que les permitan construir una respuesta final a la cuestión inicial matemática que se les planteó.

Etapa 3: Los estudiantes de profesorado analizan el REI que vivenciaron en la etapa dos. Ello consiste en: (a) un análisis matemático del trabajo hecho en el proceso de modelado; (b) un análisis didáctico del proceso que incluye la comparación entre los supuestos del contrato didáctico en la experimentación de un REI con los de una clase usual centrada en la transmisión de conocimientos; (c) un análisis de la viabilidad de la experimentación de un REI de ese tipo en la institución escolar en la que los estudiantes de profesorado ejercen la docencia, incluyendo las condiciones y restricciones institucionales que podrían afectar su posible desarrollo.

Etapa 4: Esta etapa consiste en el diseño de un REI adaptado del REI experimentado y analizado por los estudiantes de profesorado, para ser aplicado en algún grupo de estudiantes de enseñanza media que ellos tengan a cargo. El diseño deberá incluir las cuestiones matemáticas que se les plantearán a los estudiantes (que no necesariamente coincidirán con las del REI vivido como matemáticos), los dispositivos que el profesor dispondrá para hacer viable el REI y una propuesta de distribución de responsabilidades entre profesor y estudiantes a la hora de la implementación.

Etapa 5: La quinta y última etapa corresponde a la implementación y análisis a posteriori del REI que los profesores diseñaron. El análisis que se plantea en esta etapa dispondrá de las mismas herramientas didácticas que se detallaron en las etapas 3 y 4. A su vez, además de proporcionar una respuesta a la cuestión inicial planteada en la etapa 1 sobre cómo enseñar el tema elegido, se espera que el profesor reconozca alternativas a las respuestas que se habían dado a esa cuestión en dicha etapa.

Por razones de extensión de este artículo, desarrollamos solamente lo transcurrido en las etapas 4 y 5 porque consideramos que en ellas se evidencia una diferencia metodológica respecto a las prácticas usuales en la formación de profesores de matemática en Uruguay que deseamos destacar. A saber, poner en diálogo tres aspectos: (1) un marco teórico didáctico, (2) una práctica de enseñanza en una clase de matemática para futuros profesores y (3) el análisis de las prácticas de enseñanza de estos con sus alumnos de enseñanza media.

ANÁLISIS DE LAS ETAPAS 4 Y 5

Dado que en las etapas 4 y 5 se toman elementos del REI vivenciado en la etapa 2, planteamos a continuación su consigna para poder establecer las similitudes y diferencias entre la propuesta para los futuros profesores de matemática y las adaptaciones diseñadas para los alumnos de enseñanza media.

El REI de la etapa 2 fue diseñado para esta oportunidad por Mariela Rey, la profesora del curso, y consistió en el diseño de una montaña rusa a partir de la siguiente consigna:

Actividad: Montaña Rusa

> Uno de los proyectos de la nueva administración municipal de la ciudad de Montevideo consiste en la renovación de los juegos del Parque Rodó. Para ello, llama a concurso a organizaciones interesadas en plantear parte del diseño de una nueva montaña rusa.
>
> El tramo a diseñar debe ocupar un espacio de cien metros y debe contener tramos con las siguientes formas gráficas: exponencial, recta, parabólica y sinusoidal (en el orden que a los diseñadores les parezca más agradable). Recuerden que para que la montaña rusa tenga un buen funcionamiento, los carros deben desplazarse sin despegarse de los rieles.
>
> Si deciden participar del concurso tengan en cuenta que el diseño más original y que cumpla con las especificaciones, ganará un premio de diez mil dólares. ¡Esperamos sus ideas!
>
> Presentar un reporte de todos los bocetos, intentos, ideas y eventuales procedimientos matemáticos por los que pasaron en la elaboración del diseño.
>
> Si utilizaron algún programa informático, también deben anexar al reporte un archivo con el trabajo realizado en dicho *software*.

Presentamos a continuación las propuestas de adaptación del REI que antecede y el análisis de su implementación, llevados a cabo por dos futuros profesores (participantes del curso), Rocío Martínez y Juan Álvarez. Si bien los once estudiantes del curso completaron las cinco etapas del REI-FP, la invitación para la escritura de este artículo a estos dos estudiantes en particular, por parte de la docente del curso, responde en primer lugar a razones de extensión y en segundo lugar a que fueron las experiencias en las que se observó una propuesta de adaptación o de implementación en el aula más profunda, a partir de la propuesta original del REI.

Análisis de la implementación de Rocío

La adaptación de la actividad Montaña Rusa fue planteada para estudiantes de tercer año de Ciclo Básico (14-15 años) con el objetivo central de que estos pudieran reconocer por sí solos qué implicaba que la montaña rusa no tuviera problemas de seguridad, apelando a sus conocimientos previos e inventiva. Secundariamente, se esperaba que la actividad sirviera para retomar la noción de función ya trabajada en segundo año. No estaba presente el objetivo de estudiar la continuidad y la derivabilidad de una función. De todos modos, aunque de forma muy intuitiva, algunos de estos aspectos aparecieron en el proceso de estudio, como se detallará más adelante.

Para potenciar el trabajo de los estudiantes se definió que este fuera grupal. Se crearon tres fichas de trabajo diferentes; cada equipo trabajó sólo con una de ellas. Presentamos primero el texto que da inicio a las tres fichas y luego el texto específico de cada una.

> Uno de los proyectos de la nueva administración municipal de la ciudad de Montevideo consiste en la renovación de los juegos del Parque Rodó. Para ello, llama a concurso a organizaciones interesadas en plantear parte del diseño de una nueva montaña rusa.
> El tramo a diseñar debe ocupar un espacio de cien metros y debe contener tramos con las siguientes formas gráficas: exponencial, recta, parabólica y sinusoidal (en el orden que a los diseñadores les

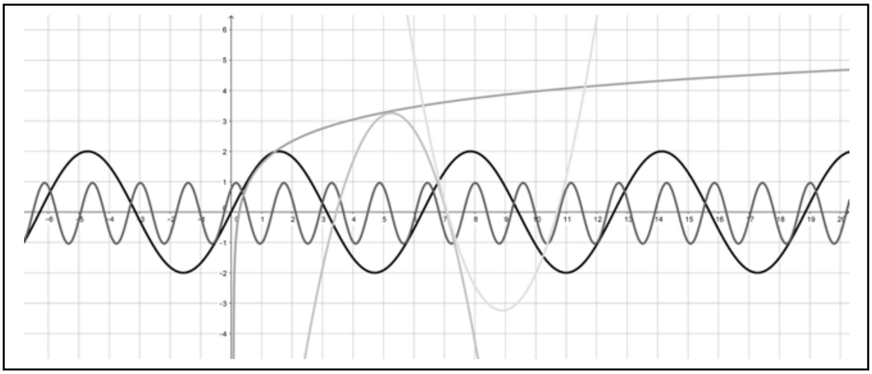
parezca más agradable). Recuerden que para que la montaña rusa tenga un buen funcionamiento, los carros deben desplazarse sin despegarse de los rieles.

Si deciden participar del concurso tengan en cuenta que el diseño más original y que cumpla con las especificaciones, ganará un premio de diez mil dólares. El plazo de participación vence el próximo lunes 13 de junio a las 23 y 59. ¡Esperamos sus ideas!

Ficha 1

Un equipo de diseñadores presentó un proyecto a raíz del llamado abierto que se lee más arriba para construir la nueva Montaña Rusa del Parque Rodó. Al momento de abrir el archivo, desde la Intendencia notaron que el programa no era compatible, pues en vez de visualizar el diseño de la Montaña, se ve el prototipo original de la misma con todas las funciones que utilizaron para crearla. Ustedes han sido contratados para que determinen cuál es el recorrido que debería hacer el carrito para que el proyecto no sea rechazado.

A continuación verán una impresión de lo que pueden visualizar desde las computadoras de la Intendencia de Montevideo (IM). Repasen el recorrido del carrito de forma tal que la Montaña sea viable, sabiendo además que todas las funciones que aparecen representadas deben ser utilizadas. ¡No olviden justificar el recorrido que eligieron!

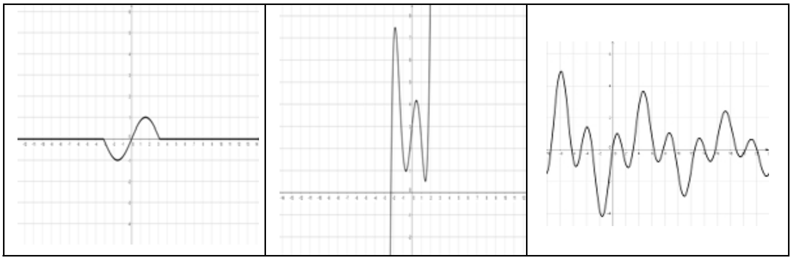


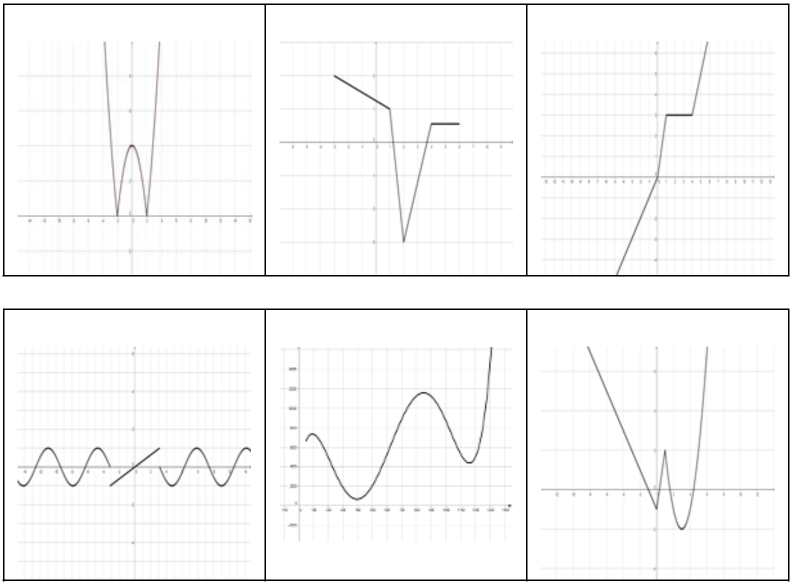
Ficha 2

Han sido contratados por la IM para evaluar los diferentes proyectos de Montaña Rusa que se han presentado en el último llamado abierto, que puede leerse más arriba. En esta primera etapa de selección se evalúa la seguridad de la misma.

A continuación visualizarán las imágenes con los prototipos finales y deberán seleccionar aquellas que podrían ser efectivamente las ganadoras.

No olviden argumentar los motivos tanto para rechazar como para que los proyectos continúen en carrera, la transparencia en una gestión es fundamental.

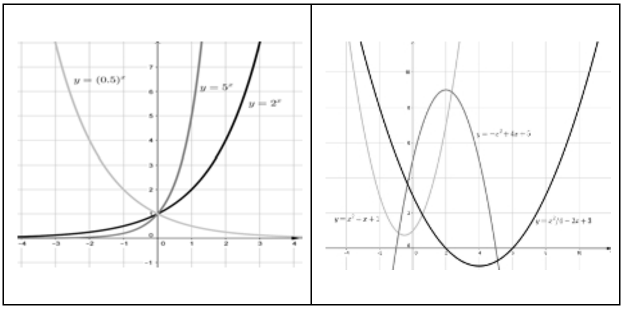


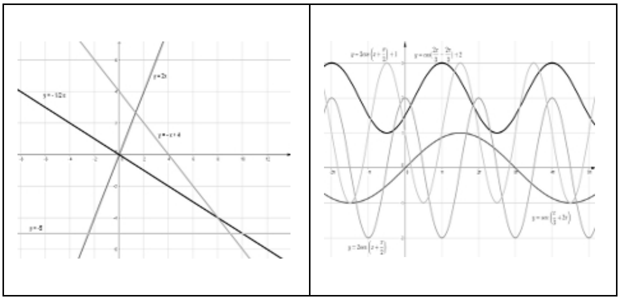


Ficha 3

Desde la IM se extendió el plazo para aceptar proyectos dado que ninguno de los que se presentó cumplía con los requisitos. Diseña con tu equipo una montaña que pueda ganar el concurso.

Las imágenes que se presentan a continuación son para ayudarlos a recordar las formas que son aceptadas. No olviden argumentar la elección que realizan.





La primera ficha apuntaba a que los estudiantes optaran por posibles caminos de los carritos de la montaña rusa, a partir de diferentes posibilidades dadas por gráficos superpuestos de diferentes tipos de funciones, la segunda buscaba la selección a partir de posibles diseños que se les presentaban y la justificación de tal selección y en la tercera se apelaba a la creatividad de los estudiantes en el diseño propio de la montaña.

Las fichas se repartieron según las fortalezas individuales e intereses de los miembros de cada equipo. La ficha uno fue entregada a un grupo de estudiantes que se esfuerza y que reflejan claramente ser inseguros al momento de validar sus propios conocimientos. Con la segunda ficha trabajaron tres estudiantes muy autónomos y estructurados. En este caso el objetivo consistió en potenciar sus cualidades argumentativas. La tercera ficha fue propuesta a un colectivo de estudiantes con una capacidad inventiva muy desarrollada, así como muy aplicados al momento de argumentar teóricamente sus planteos.

Todos los equipos que se formaron trabajaron muy motivados con la propuesta logrando cumplir en su mayoría con los objetivos propuestos y trabajando prácticamente solos. El rol de la docente fue el de guía durante el proceso, incentivando la retroalimentación dentro del grupo y la interacción entre ellos a partir de nuevas preguntas.

Una vez finalizado el trabajo en los equipos se realizó una puesta en común en la que todos expusieron sus trabajos y compartieron las inferencias a las que llegaron. Se inició pidiendo a cada equipo que relatara sus experiencias y planteara las dificultades con que se había encontrado. Todos hicieron acuerdo en que el problema principal estaba en determinar las condiciones que debían cumplirse en los puntos de unión de los diferentes tramos. En palabras de los alumnos *"las figuras tienen que estar pegadas ya que si hay huecos los carritos caerían al vacío"*, y agregaron que esto no alcanzaba para que la montaña funcionara correctamente. Esto lo explicaron diciendo que *"si hay una punta para arriba los carritos saldrían volando, si la punta es para abajo chocarían contra el suelo o con el propio riel"*. Aquí el equipo 1 compartió su idea de que *"no debe notarse que hay un cambio de figura, que la dirección con que viene el carrito no puede cambiar repentinamente".* Se puede apreciar en estos comentarios ideas muy primitivas de lo que desde la matemática formal denominamos como continuidad y derivabilidad, esta última asociada a la noción física del movimiento. No afirmamos que estos alumnos conocen las nociones de continuidad y derivabilidad desde un punto de vista formal, pero sí que manejan una aproximación intuitiva de estas en forma visual, probablemente en base a su experiencia física con los fenómenos del movimiento. No es usual hacer visible este tipo de conocimientos intuitivos de los alumnos en los primeros años de la enseñanza media.

A partir de los dibujos en el pizarrón de las montañas rusas diseñadas por algunos estudiantes, la docente trazó una recta tangente en un punto en que una de las representaciones era derivable, habiendo preguntado previamente si alguno sabía qué era una recta tangente. La respuesta fue negativa. Luego se les solicitó a los estudiantes que dibujaran rectas tangentes a las diferentes curvas en los "puntos complicados de las montañas", en términos formales los puntos en que la función no es derivable. Con alguna dificultad, lograron intuitivamente dibujar la recta tangente a la curva en el punto en que la función era derivable y más de una semirrecta en los puntos en los que la función no lo era.

Frente a la pregunta de la docente sobre si encontraban alguna relación, el equipo cuatro rápidamente concluyó que "*la montaña rusa se puede hacer cuando en los puntos donde se pegan las figuras hay una sola tangente, porque cuando hay dos pueden ocurrir tragedias*".

Consideramos que esta actividad y la gestión de la docente posibilitaron que los estudiantes lograran debatir y validar sus conocimientos sin que mediara prácticamente ninguna intervención docente.

El objetivo inicial de retomar la noción formal de función en términos de la teoría de conjuntos no se cumplió. En caso de querer cumplir con ese objetivo, debería modificarse el enunciado de la actividad enfatizando, por ejemplo, en la necesidad de la presencia de ejes cartesianos como sistema de referencia y que para que la montaña funcione con las condiciones del concurso, los carritos no pueden recorrer un *loop*.

Del REI original, también se había tomado la idea de que los estudiantes reportaran detalladamente todos sus intentos, sus reflexiones, sus justificaciones. Esto no se logró. Creemos que pudo deberse a que no es un trabajo habitual en la clase y al temor de los alumnos a mostrar sus eventuales errores.

Análisis de la implementación de Juan

En esta adaptación del REI Montaña Rusa se trabajó con estudiantes de segundo año de Ciclo Básico (13-14 años). El objetivo de la serie de actividades realizadas fue que los alumnos pudieran aplicar matemática y ciencias físicas en una situación real. Esto demandó la toma de decisiones, la búsqueda de los recursos necesarios, el apalancamiento digital, el trabajo colaborativo y la comunicación efectiva entre los integrantes de su equipo. En el momento que se planteó esta secuencia, la noción de función no había sido trabajada en clase. Por lo tanto, se esperaba que adicionalmente a los objetivos planteados, los alumnos tomaran contacto visual con algunas funciones que más adelante trabajarían.

El trabajo se secuenció de la siguiente forma:

1. Visionado del video: "La montaña rusa energía potencial y cinética" disponible en https://www.youtube.com/watch?v=XPO8s6fqwDs
2. Lectura y entrega de la siguiente actividad para trabajar en equipos de cinco estudiantes:

> Uno de los proyectos de la nueva administración municipal de la ciudad de Montevideo consiste en la renovación de los juegos del Parque Rodó. Para ello, llama a concurso a organizaciones interesadas en plantear parte del diseño de una nueva montaña rusa. Tengan en cuenta que los proyectos se deben desarrollar en equipos de hasta cinco personas.
>
> El tramo a diseñar debe ocupar un espacio de cien metros y debe contener tramos con las siguientes formas gráficas: exponencial, recta, parabólica y sinusoidal (en el orden que a los diseñadores les parezca más agradable). Recuerden que para que la montaña rusa tenga un buen funcionamiento, los carros deben desplazarse sin despegarse de los rieles.
>
> Si deciden participar del concurso tengan en cuenta que el diseño más original y que cumpla con las especificaciones, ganará un premio de diez mil dólares. El plazo de participación vence el próximo 25 de junio.
>
> ¡Esperamos sus ideas!

3. Exploración previa: Investigar en internet cuál es la forma gráfica: exponencial, recta, parabólica y sinusoidal. Hacer un dibujo de cada una.
4. Entrega de láminas con cada una de las formas para comparar con las encontradas y utilizarlas para continuar con el diseño.
5. Puesta en común de los diseños de cada equipo analizando cómo sortearon el problema de la unión de las formas gráficas. Reflexión sobre los conceptos de continuidad y "suavidad" a la hora de unir funciones.
6. Una vez realizados los diseños, se les propuso calcular la energía potencial en el punto más alto de la montaña y la velocidad del carrito en el punto más bajo (suponiendo conservación de la energía). Cada equipo decidió cuál sería la masa del carrito y otros datos que necesitase.
7. Puesta en común sobre el cálculo de la energía y de la velocidad del carrito.
8. Tarea Domiciliaria: (a) Investiga qué forma de energía se podría utilizar para minimizar la contaminación del ambiente y su uso responsable; (b) Construye tu diseño usando algún *software* que manejes o armando una maqueta a escala.
9. Discusión en formato grupal de los usos responsables de la energía y su aplicabilidad a la montaña rusa. Presentación de cada equipo de los diseños hechos con la computadora o mostrando las maquetas construidas.

En esta implementación, se aprecia en forma más explícita otra faceta del trabajo con los REI. En la presentación de la metodología general, mencionábamos la importancia central de la búsqueda de respuestas a las cuestiones que pudieran ir surgiendo, como motor del proceso de estudio. Las respuestas pueden provenir desde cualquier saber, no necesariamente matemático, aunque se esté en una clase de matemática. En este caso, las respuestas matemáticas (cálculos de los diferentes tipos de energía y velocidad, reconocimiento visual de funciones elementales) no estaban antes de las preguntas sino que aparecieron para responder la cuestión inicial de construir una montaña rusa, junto a respuestas provenientes de otras disciplinas. Este aspecto de la metodología de los REI constituye un desafío importante para los profesores de matemática en Uruguay ya que nuestra formación y contexto laboral, se encuentran altamente compartimentalizados tanto a la interna de la matemática como en los vínculos de esta con otras disciplinas.

CONCLUSIONES

En la metodología de los REI se propone una distribución de responsabilidades entre el docente y el alumno, diferente a la del contrato didáctico tradicional: del profesor que propone y el alumno que ejecuta a una propuesta de iniciativas y toma de decisiones conjuntas y discutidas entre profesor y alumnos. En los ejemplos reportados los estudiantes fueron movilizados a explorar por su cuenta, a tomar decisiones, a colaborar con sus compañeros, a debatir con sus pares, adaptándose progresivamente a proponer sus formas de validación, no necesariamente propuestas por el profesor. Adicionalmente, creemos que este trabajo llevó a los alumnos a resolver desafíos relacionados con situaciones del mundo real, que demandaron trabajo colaborativo, creatividad e integración de tecnologías.

Por otra parte, esta experiencia llevó a los futuros profesores a adaptar una actividad propuesta para ser resuelta a nivel terciario y llevarla al nivel secundario, todo como parte del trabajo en una clase de matemática. Creemos que este tipo de propuesta supone un cambio importante en la mirada de la formación de los profesores. En palabras de Juan: "*fue un gran cambio dentro de mi carrera de profesorado pues lo que iba aprendiendo lo podía ir aplicando en mis grupos de trabajo*". Y en palabras de Rocío:

> *A diferencia de la mayoría de las asignaturas específicas, se consideró por parte de la docente que nos estamos preparando para enseñar matemática, contrario a lo que suele hacerse en cursos de matemática del profesorado. Poder adaptar los conocimientos trabajados en una asignatura [matemática] al trabajo diario en los diferentes cursos de educación media debería ser un eje transversal a todos los cursos de la carrera.*

Entendemos que también deberíamos trabajar más sistemáticamente la producción de reportes por parte de los alumnos en los que se refleje el proceso realizado con todos los aciertos y los errores, sin miedo a equivocarse. Si bien pensamos que la propuesta de los REI rompe con la idea de penalización del error y apunta a la colaboración de los estudiantes y la construcción colectiva de saberes, no es suficiente su aplicación aislada en una actividad al año para romper con la fuerte inercia del castigo del error que campea en las instituciones escolares.

Debemos animarnos a desarrollar la pedagogía de la pregunta, tenemos que estar dispuestos a construir los diferentes conocimientos escuchando y guiando a los estudiantes con las herramientas que disponemos. Y este tipo de propuestas, abiertas y enfocadas a los intereses de cada uno, precisamente apelan a que el docente vaya a una clase pensando en lo que puede llegar a ocurrir pero con los oídos más abiertos que la boca.

A partir de este trabajo profundizamos en algunos elementos propuestos desde el marco teórico de la TAD, especialmente en el dispositivo REI-FP, tanto en sus aspectos teóricos a través de la presentación del mismo en clase, como vivenciales al atravesar todas sus etapas. Esto nos permitió no sólo valorar positivamente la experiencia de este curso sino hacer reflexiones más profundas acerca de nuestra formación como profesores, la relación entre la didáctica y la matemática que consideramos debería primar en el proceso de formación y el vínculo de todo esto con nuestro contexto profesional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2015). A study and research path on mathematical modelling for teacher education. K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 809-815). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

UN ANÁLISIS CRÍTICO SOBRE LA GANANCIA EN EL MUNDO DEL MERCADO

VANESSA GONZÁLEZ, SILVINA GONZÁLEZ, FLORENCIA LEPRATTE, VERÓNICA MOLFINO, CAROLINA VIERA

> Sería en verdad una actitud ingenua esperar que las clases dominantes desarrollasen una forma de educación que permitiese a las clases dominadas percibir las injusticias sociales en forma crítica.
> Paulo Freire

Resumen
Partiendo de la base de que la matemática no es un campo de conocimiento neutral, ni su enseñanza despojada de intenciones políticas, surge, en diferentes países y desde diversas instituciones, la denominada *enseñanza de la matemática para la justicia social*. En este artículo presentamos el diseño de una actividad que busca promover dicho acercamiento y describimos su implementación en dos grupos de primer año de Ciclo Básico de dos liceos de Montevideo, en el año 2016. La actividad aborda los conceptos de división entera y exacta. Finalmente presentamos una reflexión acerca de la actitud de los estudiantes respecto a este tipo de propuestas, nuestro rol como docentes entendiendo a la enseñanza de la matemática como una práctica social y política, aspectos a mejorar en el diseño e implementación de la actividad y el potencial de este tipo de tareas.

Palabras claves: justicia social, división entera y exacta.

Abstract
Assuming that mathematics is not a neutral field of knowledge, nor its teaching is stripped of political intentions, it arises, in different countries and from different institutions, the so-called *teaching mathematics for social justice*. This paper presents the design of an activity that seeks to promote this approach and describes its implementation in two groups of the first year of the secondary school of two different institutions in Montevideo, in 2016. The activity addresses whole and exact division concepts. Finally we present a reflection on the attitude of students regarding such proposals, our role as teachers that understand the teaching of mathematics as a social and political practice, issues

to improve the design and implementation of the activity and the potential of this kind of tasks.

Keywords: social justice, exact and whole division.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar correspondiente al cuarto año del Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores Artigas (IPA). En particular, a partir de una actividad del curso basada en Wright (2015a), artículo que reporta su tesis doctoral sobre enseñanza de la Matemática para la Justicia Social (MpJS).

Wright (2015a), siguiendo a D'Ambrosio (2008), afirma que la posición privilegiada que tiene la matemática en el currículum se debe a mitos según los cuales es una ciencia exacta, neutral, objetiva y alejada de valores, lo que induce una determinada concepción de la misma. Ello conduce a una exclusión social que comienza cuando un estudiante es catalogado como "bueno" o "malo" en matemática por su maestro o profesor, a partir de una suerte de medida universal que tal concepción de la matemática podría inducir. Además al sustentarse en un pensamiento lógico deductivo se cree que todos los conocimientos obtenidos en matemática son verdades absolutas e indiscutibles, lo que le daría una posición privilegiada con respecto a otras áreas de conocimiento.

A partir de estas reflexiones nos cuestionamos, ¿cómo promover una enseñanza de la matemática que favorezca una concepción más humanista de la matemática y, con ello, incluya a los estudiantes en el análisis de situaciones que le conciernen? Consideramos que esto podría conducir a que los estudiantes se comprometan más con su propio aprendizaje matemático.

Con ese fin, diseñamos e implementamos una actividad que busca que los estudiantes utilicen los conocimientos matemáticos como herramienta para la reflexión sobre cuestiones que involucran a la justicia social. Consideramos que esta propuesta nos enriquece en nuestra formación como futuras profesoras desde un lugar que no es tradicionalmente abordado en la carrera del profesorado y que puede ser enriquecedor para otros docentes de nivel primario o secundario. En este documento analizamos la actividad propuesta y su implementación, y proponemos una reflexión sobre el uso de este tipo de tareas para favorecer la formación del pensamiento crítico.

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA PARA LA JUSTICIA SOCIAL

¿Por qué enseñar para la justicia social?

Noyes (2008) denuncia que la diferencia más significativa en cuanto al logro en matemática se da entre estudiantes de diferentes contextos socioeconómicos (citado por Wright, 2015a). Dado que dicho logro en matemática opera como puerta de entrada a cursos de posgrado de gran prestigio y, en definitiva, a trabajos mejor remunerados, esa diferencia conduce a reproducir la desigualdad en la sociedad (Wright, 2015a). En suma, el fracaso en matemática en la escuela puede ser un factor más que incida en que los estudiantes de contextos más vulnerables no puedan salir de esa situación en la que están inmersos.

En ese sentido, Llorente (2012) advierte sobre la necesidad de "superar el concepto de igualdad de oportunidades. Defender y trabajar no sólo por la igualdad de acceso, sino por la igualdad de éxito" (párr. 11). Consideramos que proponer una enseñanza de la MpJS puede abonar en ese sentido.

Wright (2015a) afirma que los currículos oficiales y artículos de investigación en matemática educativa (Gates y Jorgensen, 2009) proponen como meta el desarrollo de la comprensión matemática para promover más igualdad y que los estudiantes puedan tener una participación activa en la sociedad, pero que ello no refleja la situación actual de las instituciones escolares. Partiendo de esa observación, plantea una visión alternativa de la educación matemática según la cual la enseñanza es inseparable de la consideración de cuestionamientos relativos a la justicia social y debería generar un cambio social positivo.

En suma, el autor propone que las prácticas de aula basadas en la enseñanza de la MpJS podrían favorecer el cumplimiento de aquellas metas de los documentos oficiales.

¿Qué entendemos por enseñar matemática para la justicia social?

Según Wright (2015a), la educación matemática es una práctica social y política. A partir de dicha concepción, entiende a la enseñanza de la MpJS a partir de las contribuciones de Skovsmose (2011) respecto a reflexionar *con*, *a través de* y *sobre* la matemática. Reflexionar *con* matemática favorece la comprensión en el estudiante a partir de la indagación, y por lo tanto le brinda herramientas para reflexionar sobre la sociedad y posicionarse como agente de cambio de su propia situación sociocultural, política y económica. Estas son, a su vez, ideas de Freire (1974, 2004) sobre alfabetismo y concientización adaptadas al aula de matemática.

Reflexionar *a través de* matemática implica la resolución de problemas de final abierto que involucren al estudiante en la toma de decisiones mediante un trabajo colaborativo y lo responsabilicen de su propio aprendizaje matemático. Ello favorecería un pensamiento más crítico sobre la realidad que viven, el cambio social que buscan y la manera de concebirlo.

Por último, "reflexionar *sobre* matemática implica desarrollar en los estudiantes una conciencia crítica sobre la naturaleza de la matemática, su posición en el currículum y su estatus en la sociedad" (Wright, 2015a, p. 3).

Ahora, consideramos que la enseñanza de la MpJS debe estar basada no sólo en la reflexión sino también en la acción, conformando así el constructo *praxis* considerado por Freire (1974, 2004): teoría y práctica deben interactuar de manera dialéctica. En ese sentido, Wright (2015b, p. 27) caracteriza a la enseñanza de la MpJS mediante los siguientes aspectos:

1. Emplear metodologías colaborativas, discursivas, de planteamiento y resolución de problemas, que promuevan el involucramiento de los estudiantes con la matemática.
2. Reconocer y aprovechar las experiencias de la vida real de los estudiantes para enfatizar la relevancia cultural de la matemática.
3. Promover cuestionamientos matemáticos que habiliten a los estudiantes a desarrollar una mejor comprensión de su situación social, cultural, política y económica.
4. Facilitar investigaciones matemáticas que desarrollen la acción del estudiante, permitiéndole tomar parte en acciones sociales y tomar conciencia de su contexto.
5. Desarrollar un entendimiento crítico de la naturaleza de la matemática y su posición y estatus dentro de la educación y la sociedad.

El problema como recurso de aprendizaje

Para el diseño de actividades nos basamos en el modelo apropiativo que plantea Charnay (2002). En este modelo el problema es visto como un recurso de aprendizaje, "como fuente, lugar y criterio de la elaboración del saber" (p. 58). Compete al docente la elaboración y selección de problemas adecuados para que, mediante su resolución, el estudiante logre construir el saber, en interacción con sus pares. Es en el estudiante en quien se centra la actividad matemática del aula.

El modelo propone cuatro fases en el abordaje de los problemas: la de *acción*, que se plantea la situación y el estudiante busca, solo o con pares, procedimientos de resolución; la de *formulación*, en la que se comunican los procedimientos encontrados, se ponen a prueba y confrontan; la de *validación*, en la que se validan la estrategias creadas mediante consenso grupal y la de *institucionalización*: el docente toma lo elaborado por el grupo, ubica el conocimiento construido dentro del conocimiento matemático establecido por la comunidad académica, lo sintetiza mediante lenguaje convencional y propone su aplicación para la ejercitación y resolución de nuevos problemas.

En particular, tomando en cuenta las consideraciones específicas de Skovsmose (2011) respecto a la enseñanza de la MpJS, diseñamos tareas que incluyeran ítemes de final abierto, con múltiples respuestas posibles, especialmente pensadas para promover una discusión más rica en clase.

PROPUESTA PARA EL AULA

Diseñamos y pusimos en práctica una actividad sobre división entera para primer año de Ciclo Básico.

Descripción y análisis a priori de la actividad

Actividad: Los duraznos

> Carlos se dedica a la cosecha de duraznos. Luego de un largo proceso de sembrado, podado, curado, cultivado y cosechado (con una duración de 7 meses) vende las planchas de duraznos al

Mercado Modelo a $250 cada una, las cuales contienen aproximadamente 12 kilogramos de duraznos.

Luego, el Mercado Modelo lo vende al comerciante a $525 por cada 15 kilogramos de duraznos. Finalmente, el comerciante vende al público cada kilogramo de durazno a $45.

(a) ¿Cuál de los tres involucrados en el negocio te parece que debería obtener mayor ganancia? ¿Por qué?

(b) ¿Cuánto tuvo que pagar el comerciante al Mercado Modelo por cada kilogramo de durazno?

(c) ¿Cuánto recibió Carlos por cada kilogramo de durazno vendido al Mercado Modelo?

(d) ¿Cuál de los tres involucrados en el negocio obtiene efectivamente la mayor ganancia? ¿Sucede esto en algún otro sector del comercio? Emite tu opinión al respecto.

La actividad fue propuesta con dos objetivos principales. Uno de ellos enfocado a indagar los conocimientos matemáticos que los estudiantes poseen del ciclo escolar referido a división entera y exacta, recordar el esquema utilizado para plantear la división y cada uno de los elementos que lo conforman, así como las relaciones entre ellos para finalmente institucionalizar la definición de división entera y exacta. El otro en relación a promover la reflexión por parte de los estudiantes acerca de una problemática que involucra la justicia social en el marco de la situación planteada en la actividad.

Análisis a priori

En la parte (a) de esta actividad esperamos evocar en el estudiante una reflexión personal de la situación planteada y, a partir de ello, promover una discusión entre los estudiantes en la que se utilicen argumentos que involucran saberes matemáticos. Algunos estudiantes pueden concluir que el que debe recibir mayor ganancia es Carlos, por todo el trabajo que realiza antes de cosechar el durazno, por las pérdidas en época de lluvia o sequías y las devoluciones que realiza el Mercado Modelo cuando el producto no fue vendido. De igual forma es posible que otros afirmen que es el Mercado Modelo quien debe recibir la mayor ganancia porque sin ese actor intermediario Carlos tendría que vender sus duraznos únicamente a nivel local, en su vecindad, o usarlos para consumo personal, pero no podría sacar mayor provecho del negocio.

Finalmente, otros estudiantes podrán pensar que es el comerciante quien debe obtener la mayor ganancia por ser quien posibilita que el durazno sea vendido al destinatario final. Él tiene que correr con el riesgo de mantener un negocio, con todos los gastos fijos que eso implica, aún cuando puede suceder que no logre vender la mercadería. Podrán argumentar, además, que en caso de que sea feriante, si bien el gasto fijo de mantenimiento de local es menor, se trata de un trabajo físicamente exigente.

En la parte (b) esperamos que el estudiante utilice el concepto de división exacta ya que si el comerciante paga $525 por 15 kilogramos de duraznos, debe dividir 525 entre 15 para saber el precio de un kilo.

En la parte (c) está involucrado el concepto de división entera ya que Carlos recibe $250 por 12 kilogramos de duraznos por lo que el estudiante debe dividir 250 entre 12 para saber el precio de un kilogramo de duraznos. En este caso buscamos discutir el significado del resto de la división en el contexto del problema, evidenciando que finalmente Carlos recibe $20 por cada kilogramo de durazno más $10 que corresponden a dicho resto. En la parte (d) se pretende nuevamente que los estudiantes realicen una reflexión crítica sobre esta situación que viven muchas personas, buscamos que además de tener en cuenta los cálculos matemáticos concretos, consideren de forma amplia todos los factores que están involucrados en la situación.

Las operaciones realizadas indican que Carlos gana aproximadamente $21 por kilogramo, el Mercado Modelo gana $14 por kilo ($35 - $21) y el comerciante $10 por kilo ($45 - $35), una interpretación directa de la situación conduciría a pensar que el que obtiene mayor ganancia es Carlos. Sin embargo, buscamos una mirada más profunda, puntualizando en la ganancia real (con gastos incluidos) de cada uno y no sólo en la ganancia neta. Por su parte, Carlos trabaja todo un año para lograr esa ganancia (en el mejor de los casos, si la cosecha puede venderse toda) mientras que el Mercado Modelo y el comerciante trabajan con otra mercadería durante todo el año. Por otra parte, tanto el Mercado Modelo como el comerciante tienen gastos fijos como el mantenimiento del local, pago de impuestos, combustible y salarios, que deben descontar de esa ganancia neta. Tomando estas consideraciones, podría concluirse que es el Mercado Modelo el mayor beneficiario en el negocio, o el comerciante, dependiendo de los gastos de cada uno de ellos. De aquí que la situación planteada sea compleja y no haya una respuesta correcta única. En esto radica el potencial del problema para promover una discusión más rica.

Implementación de la actividad

Cuatro de las coautoras tenemos a cargo un grupo de primer año de Ciclo Básico para la práctica de la asignatura Didáctica III. En estos grupos fue propuesta la actividad. La profesora responsable de cada grupo la propuso mientras algunas de las compañeras restantes observó la implementación. De estas clases se seleccionaron dos para compartir pues fueron aquellas en las que se logró un mayor involucramiento de los estudiantes en el abordaje de la actividad. A su vez, estas corresponden a dos liceos diferentes de la capital.

Desarrollo de la clase en el Liceo N° 53

La actividad fue propuesta en un grupo de primer año de Ciclo Básico con 27 alumnos de edades entre 11 y 15 años. Se entregó a los estudiantes una fotocopia con la actividad para trabajar sobre ella en parejas.

Frente a la primera pregunta, algunos estudiantes respondieron que quien debía obtener mayor ganancia era Carlos debido al trabajo que hacía y la duración que este tenía (descrito en el enunciado del problema), mientras que otros creían que debía ser el comerciante pues era quien le acercaba el producto a la gente. Ningún estudiante consideró que la mayor ganancia debía obtenerla el Mercado Modelo.

Otros estudiantes buscaban en el enunciado algún dato que les permitiese responder la pregunta, no entendían que se les estaba pidiendo su opinión.

Para comenzar la puesta en común la profesora hizo mayor énfasis en las respuestas que habían dado en la parte (a) respecto a las dadas en las otras partes de la actividad. Algunos estudiantes intentaron convencer a otros que debía ser Carlos quien obtuviese la mayor ganancia y no el comerciante como habían dicho. En su mayoría tuvieron éxito al hacer explícito el valor del trabajo que realizaba Carlos en el cultivo de los duraznos y mostrando que lo único que hace el comerciante es comprar el producto para el consumidor final. Posteriormente se discutieron en conjunto los restantes ítemes de la actividad. Algunos alumnos pasaron al pizarrón escribiendo los planteos de las divisiones que habían realizado. Luego se les preguntó qué respuestas habían dado en la última parte de la actividad a partir del trabajo anterior. En algunos casos decían que quien obtenía la mayor ganancia era Carlos ya que estaban teniendo en cuenta solamente lo que cada uno ganaba por kilo y no cuánto habían invertido. La mayoría de los estudiantes afirmaron que quien obtenía la mayor ganancia era el Mercado Modelo pues consideraban que Carlos no podía ser por sus condiciones laborales descriptas en la actividad. Luego de cuestionar cuál sería la ganancia neta de cada uno de los involucrados en el negocio, los estudiantes concluyeron que quien obtenía la mayor ganancia era Carlos.

Para finalizar se les preguntó a los estudiantes qué opinaban sobre la diferencia existente entre quien debía a su juicio obtener la mayor ganancia y quien la obtenía efectivamente teniendo en cuenta cuánto había invertido. Algunos manifestaron que les parecía injusto lo que pasaba porque al tener en cuenta sólo lo que Carlos recibía era él quien obtenía la mayor ganancia pero no resultaba cierto cuando se pensaba en el tiempo y dinero que tuvo que invertir para vender su producto. A pesar de esto no se mostraron demasiado inquietos al respecto.

Otros afirmaron que, si bien no conocían a alguien que estuviese en la misma situación, seguramente debía pasar con otros productos, naturalizando la problemática y sin mostrarse preocupados por la injusticia que le planteaban sus compañeros.

Desarrollo de la clase en el Liceo N° 8

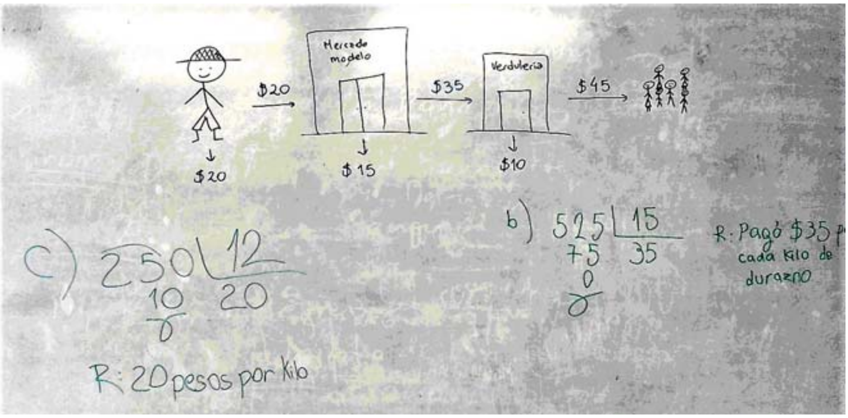
La actividad fue propuesta en un grupo de primer año de Ciclo Básico de 19 alumnos con edades entre 12 y 15 años. La consigna fue dictada por la docente y posteriormente los estudiantes trabajaron en forma individual o en pares.

Se comenzó la puesta en común con la primera parte de la actividad. La mayoría de los estudiantes respondió que era Carlos quien debía ganar más por ser la persona que más trabaja. Si bien hubo algún estudiante que contestó que debía ser el mercado, rápidamente sus compañeros le decían que no porque el mercado sólo iba a buscar los duraznos y los vendía.

Para la resolución de las partes (b) y (c) todos realizaron divisiones para ver cuánto se ganaba por kilo de durazno y poder compararlos, ninguno buscó alternativas diferentes. Dos estudiantes pasaron al pizarrón a realizar las operaciones correspondientes.

Si bien la división de la parte (c) no es exacta, en la clase se acordó que para comparar la ganancia por kilo sólo se iban a considerar los $20 que Carlos ganaba por cada uno, aclarando igualmente que los $10 sobrantes los recibía Carlos.

La docente realizó el siguiente dibujo en el pizarrón:



En las flechas horizontales se escribió en cuánto dinero vendía cada actor involucrado el kilogramo de duraznos y en las flechas verticales la ganancia neta. Las operaciones que figuran son las planteadas por los estudiantes para responder las partes (b) y (c).

Luego de tener todos los datos a la vista se puso a consideración la relación entre ganancia neta y ganancia real, incluyendo como factor a considerar los gastos de cada actor involucrado (que no figuraban por completo en los datos del problema, lo que generaba margen para la discusión). A partir de ello se procedió a discutir sobre la última pregunta de la actividad. Algunos estudiantes afirmaron que era Carlos quien recibía la mayor ganancia. Esto se pensó ya que, en las flechas verticales, los valores que se habían escrito fueron: en la primera flecha $20, en la segunda $15 y en la tercera $10, los que se obtienen de la diferencia de precios venta-compra.

Se les aclaró a los estudiantes que si la fruta de Carlos no se vende entonces el Mercado Modelo se la devuelve, a pesar de estar en mal estado, y no se le paga por el producto. En ese momento un estudiante dijo “pobre de Carlos, está siete meses trabajando para que no le paguen nada, o ganar 5 pesos más por kilo que el Mercado Modelo”. También se habló de todo el mantenimiento y gastos que tiene Carlos en esos siete meses, comparando estos con los gastos que tiene el Mercado Modelo y el comerciante en los pocos meses que vende el durazno (ya que es una de las frutas que no se vende en toda época del año como puede ser la manzana).

Finalmente se concluyó entre todos que el que gana más realmente es el Mercado Modelo. Al preguntarles si ocurre lo mismo en otra área del comercio los estudiantes respondieron que posiblemente en todas ocurre lo mismo.

REFLEXIONES FINALES

En cuanto al diseño de la actividad, consideramos que cumple con algunas de las características listadas por Wright (2015b) para la enseñanza de la MpJS: promueve cuestionamientos matemáticos y una reflexión sobre ellos que habilita a los estudiantes a desarrollar una mejor comprensión de su entorno. A su vez, su implementación fue mediante una metodología colaborativa, discursiva y de planteamiento y resolución de un problema, entendiéndolo como un recurso para el aprendizaje, tal como se plantea en el modelo apropiativo descripto por Charnay (2002). Creemos que ello dio lugar a una reflexión por parte de los estudiantes, mediante el diálogo entre pares, lo que posibilitó que expresaran sus propias opiniones de un tema: se utilizó a la matemática como herramienta para analizar una situación puntual en el contexto de la cadena de intermediarios en el comercio.

Al implementar la actividad en el Liceo N° 53 constatamos que algunos de los estudiantes no esperaban que se les preguntara su opinión respecto a un tema, especialmente en clase de matemática. Conjeturamos que esto puede deberse a las prácticas de sus profesores de matemática que no suelen preguntarles su opinión. Están habituados a resolver problemas que pueden estar presentados en algún contexto extramatemático pero siempre las preguntas tienen que responderlas con datos que se dan en el problema, podría decirse que es una cláusula implícita en el contrato didáctico (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Quizás por esto, muchos de los estudiantes no sabían qué responder cuando se les pedía su opinión.

Esto nos condujo a plantear la siguiente pregunta: ¿en qué medida nuestra práctica docente promueve que los estudiantes den su opinión? Y, en el caso de que les pidamos opinar sobre determinado tema, ¿tomamos en cuenta esa opinión?

Por su parte, en la implementación en el Liceo N° 8 obtuvimos otras respuestas iniciales: todos manifestaron su opinión, y la mayoría contestó que era Carlos quien debía recibir la mayor ganancia. Pensamos que esta actitud diferente en los alumnos puede deberse a que se hizo mucho énfasis (al dictar el enunciado del problema) en todo el trabajo que realiza Carlos. Es interesante analizar cómo la postura del docente influye sobre el comportamiento del estudiante, ya sea con su tono de voz, con sus preguntas o con los gestos que realiza, ¿será que cuestionándonos acerca de las problemáticas de la realidad e intentando realizar cambios para mejorarla lograremos que los alumnos hagan lo mismo? Creemos que sí y apuntamos a ello.

En cuanto a la implementación, hubo otro aspecto que captó nuestra atención: en ambos grupos, en mayor o menor medida, detectamos que les resulta natural que el trabajador rural sea explotado, no demostraron gran inquietud o preocupación frente al hecho. Los estudiantes con quienes se trabajó son capitalinos, de aplicarse la actividad en contextos rurales tal vez se hubieran dado otras respuestas y diferentes reacciones por parte de los alumnos. Aún así, creemos que es nuestro deber como docentes terminar con esta pasividad que presentan la mayoría de los estudiantes frente a la realidad social. Al decir de Freire (2004), debemos promover una educación que permita a las clases dominadas percibir las injusticias sociales en forma crítica.

Consideramos que debemos intentar que la naturalización de las injusticias no sea una rutina, es decir que si queremos incentivar que el estudiante no se limite únicamente a recolectar datos de un texto, debemos fomentar una actitud crítica frente a la resolución de las distintas actividades propuestas. Esta es una de las razones por la que estamos a favor de implementar, siempre que sea posible, actividades, juegos u otros recursos que fomenten este tipo de situaciones en el aula.

Creemos que tenemos que eliminar el mito de que la matemática es simplemente hacer operaciones sino que podemos utilizarla para fomentar el pensamiento crítico de los estudiantes, entre muchos otros valores.

¿Cómo promover esto? En este caso particular, podría haber sido más movilizador para los estudiantes incluir una consigna final donde deban indicar qué harían ellos como miembros de la sociedad para cambiar la problemática planteada e incluso intentar poner en práctica algunas de las ideas que ellos propongan. Ello completaría la dialéctica reflexión-acción que caracteriza a la enseñanza de la MpJS, generando tal vez un mayor involucramiento por parte de los estudiantes.

En suma, las experiencias obtenidas en ambos liceos nos enriquecieron en nuestra formación como futuras docentes por lo que invitamos a colegas, en formación o en ejercicio, a experimentar este tipo de tareas para promover juntos una enseñanza de la Matemática para la Justicia Social.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Charnay (2002). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Comp.) *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-64). Buenos Aires: Paidós.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: Editorial Horsori.

D'Ambrosio, U. (2008). Peace, social justice and ethnomathematics. En B. Sriraman (Ed.), *International perspectives on social justice in mathematics education* (pp. 37-50). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Freire, P. (1974). *Education for critical consciousness*. London: Sheed & Ward.

Freire, P. (2004). *La importancia de leer y el proceso de liberación.* México D.F.: Siglo XXI editores.

Gates, P. y Jorgensen, R. (2009). Foregrounding social justice in mathematics teacher. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12(3),* 161-170.

Llorente, M. (2012). Educar para la justicia social. *Ponencia presentada en el Foro Mundial de Educación* (Brasil). Recuperado desde http://www.concejoeducativo.org/article.php?id_article=436

Noyes, A. (2008). Mathematical marginalization and meritocracy: inequity in an English classroom. En B. Sriraman (Ed.), *International perspectives on social* *justice in mathematics education* (pp. 51-68). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Skovsmose, O. (2011). *An invitation to critical mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Wright, P. (2015a). Teacher researchers, mathematics classrooms and social justice. *Paper presented at BERA Conference 2014* (London). Recuperado de http://maths-socialjustice.weebly.com/uploads/3/0/2/7/30279643/ wright_2014_bera_paper.pdf

Wright, P. (2015b). *Teaching mathematics for social justice: Translating theories into practice.* Tesis doctoral. University of Sussex. Recuperado desde http://sro.sussex.ac.uk/53984/1/Wright%2C_Pete.pdf

DIME CUÁNTO GANAS Y TE DIRÉ DÓNDE VIVES

VIRGINIA DE LEÓN, CARMEN DELGADO, VERÓNICA MOLFINO, BIANCA SANTINI

> Mi visión de la alfabetización
> va más allá del ba, be, bi, bo, bu.
> Porque implica una comprensión crítica
> de la realidad social, política y económica
> en la que está el alfabetizado.
> Paulo Freire

Resumen

Tradicionalmente, la educación matemática ha concebido a la matemática como una ciencia objetiva y neutral, aislada de intereses sociales y políticos. Sin embargo, diversos actores nos invitan a cuestionar el lugar privilegiado que tiene la disciplina en el currículum y el papel que juega en la acreditación de estudiantes, influyendo en su inclusión o exclusión social. Wright plantea que para disminuir las desigualdades en los logros académicos es necesario proponer actividades que involucren a los estudiantes en una profunda reflexión sobre la sociedad y el contexto en el que viven. ¿Será la enseñanza de la matemática para la justicia social una herramienta adecuada para lograr este objetivo? En este trabajo mostramos una propuesta para lograrlo mediante el uso de problemas como un recurso para el aprendizaje.

Palabras clave: justicia social, expresiones algebraicas, ecuaciones.

Abstract

Traditionally, mathematics education has conceived mathematics as an objective and neutral science, isolated of social and political interests. However, several actors invite us to question the privileged place that the discipline occupies in the curriculum and its role in the accreditation of students, influencing their social inclusion or exclusion. Wright argues that in order to reduce inequalities in academic achievement we should propose activities to engage the students in a deep reflection on their society and the context where they live. Would teaching mathematics for social justice be an appropriate tool to achieve this goal? In this paper we present a proposal to achieve this by using problems as a learning resource.

Keywords: social justice, algebraic expressions, equations.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge a partir de una actividad propuesta en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar correspondiente al cuarto año del Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores Artigas.

El objetivo del trabajo era proponer una actividad donde se reflejara una problemática en la que los estudiantes tuvieran que utilizar sus conocimientos matemáticos para reflexionar sobre la justicia social. Para realizarla tuvimos en cuenta la caracterización planteada por Wright (2015a), en la que se plantea que el contexto socioeconómico de los estudiantes influye sobre su aprendizaje de la matemática y la enseñanza tradicional no colabora a disminuir la inequidad social.

Diseñamos una secuencia de actividades que involucra al conocimiento matemático *expresiones algebraicas y ecuaciones* siguiendo el modelo apropiativo (Charnay, 2002). En este modelo el problema es considerado un recurso de aprendizaje. En este documento mostramos las actividades propuestas y su análisis así como una descripción de lo ocurrido en clase al implementarlas. A partir de ello proponemos una reflexión sobre el uso de este tipo de tareas para favorecer la enseñanza de la Matemática para la Justicia Social (MpJS).

UNA ACLARACIÓN SOBRE ASPECTOS TEÓRICOS

Los aportes teóricos de la Matemática Educativa utilizados para este trabajo fueron elaborados en forma conjunta con las autoras de (González, González, Lepratte, Molfino y Viera, 2017, en este volumen).

PROPUESTA PARA EL AULA

Objetivos de la actividad y detalles de su implementación

Esta actividad tiene por objetivo que los alumnos elaboren expresiones algebraicas que modelan la ganancia mensual por hora para distintas profesiones y, a partir del planteo y resolución de ecuaciones, evalúen en qué barrio sería posible vivir con esos salarios. Busca que, a partir de estos insumos, el profesor y los estudiantes reflexionen acerca del costo de vida de los uruguayos y su relación con el salario.

Fue propuesta en un segundo año de Ciclo Básico en el Liceo Nº 1 de Montevideo a ocho alumnos de edades entre 14 y 17 años. La misma se aplicó como actividad final de la unidad expresiones algebraicas, al día siguiente del escrito sobre ecuaciones, durante dos horas de clase (90 minutos).

Enunciado de la actividad

> Juan es un uruguayo como cualquier otro. Hoy en día en el Uruguay, una persona trabaja en promedio 8 horas diarias de lunes a viernes.
>
> (1) Halla una expresión que modele la ganancia mensual de esa persona al variar la ganancia por hora.
>
> (2) Algunas profesiones reciben, además, un incentivo por presentismo (prima por asistencia):
>
> a. Médicos, choferes de ómnibus, barrenderos, empleados domésticos y senadores, no reciben presentismo.
>
> b. Cajeros, empleados de comercio, cadetes y profesores reciben $1 000 al mes.
>
> c. Contadores e ingenieros reciben $2 000 al mes.

Halla una expresión que represente la ganancia mensual de Juan al variar la ganancia por hora teniendo en cuenta el presentismo, suponiendo que Juan es médico, que Juan es cadete o que Juan es ingeniero.

(3) En la siguiente tabla se muestra una lista con los precios de los alquileres de algunos barrios de Montevideo[1].

Barrio en Montevideo	*Alquiler de un apartamento sin incluir gastos comunes*
Ciudad vieja	$16 000
Carrasco	$28 000
Centro	$13 000
Cerro	$8 500
Jardines del Hipódromo	$7 000
La Teja	$8 000
Pocitos	$19 000
Paso Molino	$10 000
Malvín Norte	$12 000

Si Juan quiere vivir en Pocitos ¿cuánto tendría que ganar por hora para poder irse a vivir allí?

¿Y si quiere ir a vivir en Malvín Norte? ¿Y en La Teja? Halla cuánto tendría que ganar por hora para vivir en cada uno de los barrios.

(4) Además, se sabe que la canasta básica en Uruguay para una familia con dos integrantes de clase social media ronda los $20 000.

1 Datos extraídos de http://inmuebles.mercadolibre.com.uy/apartamentos/alquiler/
Son apartamentos de un dormitorio y un baño.

Responde las preguntas de la parte anterior suponiendo que Juan es la única persona del núcleo familiar que trabaja.

(5) A continuación se presenta una tabla con el pago promedio por hora de las diferentes profesiones.

Profesión	*Pago por hora trabajada*	*Presentismo*
Médico	375	$0
Profesor	243,75	$1 000
Barrendero	118,75	$0
Cajero	87,5	$1 000
Ingeniero	518,75	$2 000
Senador	1 000	$0
Empleado doméstico	120	$0
Contador	350	$2 000
Empleado de comercio	118,75	$1 000
Cadete	93,75	$1 000
Chofer de ómnibus	281,25	$0

¿Qué profesión debería tener Juan para vivir en Carrasco, en Cordón o en Ciudad Vieja? Explica, a partir de los datos promedio que brindamos[2], en qué barrios puede vivir Juan según la profesión que tenga.

2 Los datos brindados son un promedio del salario de los diferentes empleos, ya que cada uno varía según el ente empleador. Fueron extraídos de http://www.mtss.gub.uy/web/mtss/consejos-de-salarios

Análisis a priori

Las partes (1) y (2) se focalizan en el trabajo con expresiones algebraicas. Dado que la actividad fue pensada como cierre de la unidad, es esperable que los estudiantes logren elaborar alguna expresión aunque no sea la correcta. En la parte (1) puede ocurrir que los estudiantes no se den cuenta que deben calcular la cantidad de horas que trabaja una persona en un mes y planteen que la expresión que modela la ganancia mensual es $8x$ (considerando sólo lo ganado en un día). El docente preguntará ¿qué significa el 8 en dicha expresión? ¿y la x?, intentando mostrarles que x representa la ganancia de un día de trabajo y no de un mes como pide el enunciado del problema.

En la parte (2) puede suceder que no sepan lo que es el presentismo. En este caso se explicará que es un dinero extra que se paga en algunos trabajos a la persona que no falta.

La parte (3) busca que los estudiantes planteen y resuelvan ecuaciones. Más que la resolución en sí, consideramos que en esta parte lo que puede representar una dificultad para los estudiantes es darse cuenta que tienen que usar las diferentes ecuaciones que modelan los distintos salarios ya que no todos tienen igual presentismo.

En las partes (4) y (5) es donde esperamos que se genere mayor discusión pues los alumnos podrán apreciar que una persona no puede vivir donde quiera. Hay barrios en los que el alquiler es muy alto, por lo que sólo algunos trabajadores podrían costearlo. Además, hay que tener en cuenta que una persona no sólo debe pagar alquiler, también tiene otros gastos.

Es importante señalar que si bien los datos fueron extraídos de fuentes reales, para el diseño de la actividad fue necesario simplificar el modelo. Por eso se decidió plantear que sólo una persona del núcleo familiar trabaja, que los alquileres son todos de apartamentos de un dormitorio y se propusieron sólo tres importes diferentes de presentismo.

Desarrollo de la clase

Las actividades fueron entregadas a los estudiantes. Luego se les dio unos minutos para resolverlas individualmente y sin la intervención del docente. Los estudiantes manifestaron no tener "*ni idea de qué hacer*", mostrándose apáticos. Ante esto, se procedió a proponer una resolución grupal del problema dirigida por el docente. Para poder plantear la expresión algebraica de la parte (1) se preguntó cuántas horas se trabajaba en un mes considerando la cantidad de días laborables y las horas trabajadas en el día. A partir de esto un alumno logró expresar la ecuación:

> *Si un mes tiene 4 semanas y se trabaja 5 días a la semana entonces se trabajan 20 días al mes. Si se trabaja 8 horas al día entonces se trabaja 160 horas al mes. La expresión para saber cuánto gana en el mes dependiendo de las horas que trabajen es 160x.*

En esta parte surgió por parte de los alumnos la discusión de que no todos los meses eran de cuatro semanas, ni tenían la misma cantidad de días, es decir que después de esa primera intervención docente, los estudiantes comenzaron a involucrarse en la tarea.

Para la segunda parte se leyó el enunciado de la actividad y se procedió a su resolución en forma conjunta con todo el grupo para mantener el involucramiento de los estudiantes con la tarea.

Antes de comenzar con la resolución los alumnos preguntaron qué era el presentismo y se les explicó que es un dinero extra que se les pagaba en ciertos trabajos a sus empleados por no faltar en el mes (esto se tuvo que explicar varias veces porque no les quedaba claro). También preguntaron por qué algunas profesiones tenían presentismo y otras no. Se les explicó que eso dependía de la profesión y de las políticas salariales que adopta cada empresa.

El mismo alumno que intervino en la parte anterior logró escribir correctamente las tres expresiones que determinan cuánto gana un médico, un profesor y un ingeniero con su correspondiente presentismo. El resto de los estudiantes validaron la respuesta como correcta explicando el razonamiento que tuvo el compañero.

La parte (3) se guió pidiendo en primer lugar que pensaran las preguntas suponiendo que Juan era médico. En forma conjunta plantearon la ecuación: $160x = 19\,000$, resolviéndola en el cuaderno. La profesora escribió en el pizarrón la solución que proporcionaron los estudiantes para que tuvieran un punto de partida común.

Antes de comenzar a resolver la actividad en subgrupos una alumna cuestionó: "*¿Juan tiene que ganar sólo para pagar el alquiler y no come? ¿Vive del aire?*" A partir de ello, otros estudiantes plantearon que también deberían considerarse los gastos comunes de un apartamento (muchos comentaron que vivían en apartamento y tenían que pagarlos), el pago de las facturas, la alimentación y la vestimenta. Frente a dichos planteos, la profesora optó por ir directamente a la parte (4) dejando de lado la (3) porque carecía de sentido para ellos. Se consideraron como parte de la canasta básica todos los aspectos mencionados.

En la parte (4) se replanteó la ecuación teniendo en cuenta ahora la canasta familiar, en forma conjunta en el pizarrón, para el caso de Juan médico en Pocitos. A continuación, para optimizar el tiempo y dado que eran pocos estudiantes, se les pidió que cada uno se encargara de calcular lo pedido para uno de los barrios. Cada estudiante escribió los resultados en el pizarrón en una columna al lado de los precios de los alquileres, el grupo en su conjunto se ocupó de corregir todos los cálculos a medida que eran presentados. Algunos alumnos que terminaron rápido el cálculo para el barrio que les correspondió originalmente fueron hallando los restantes. Esto ayudó a acelerar la corrección.

Observamos que hubo un cambio en la actitud de los estudiantes: a medida que avanzaba la resolución de la actividad y se iban generando discusiones tanto en lo referido al conocimiento matemático como a la situación concreta de los alquileres y los salarios diferenciados, se iban mostrando más involucrados. Pensamos que esto pueda deberse, a su vez, a que al ir calculando y comentando, fueron comprendiendo y eso les permitió comprometerse con la situación.

Una vez presentados los precios de los alquileres una alumna observó que en Carrasco el alquiler tenía que ser mucho más alto y que el precio estaba mal puesto. Se le explicó que los precios fueron tomados del mercado real y que no en todas las zonas de Carrasco los precios son los mismos y que dependen de la cantidad de metros cuadrados que tenga la vivienda y el número de habitaciones, y que en nuestro trabajo fueron considerados asignando mayor importancia al número de habitaciones.

Culminada la parte anterior se pasó a resolver la parte (5). Los estudiantes plantearon nuevas interrogantes sobre datos del problema, lo que muestra su involucramiento con la situación: "*¿Un barrendero gana tanto?*", "*¿Un chofer de ómnibus gana tanto?*", "*¿Cuánto gana una partera?*", "*¿Qué es un empleado doméstico?*".

En el momento en que los estudiantes compararon los sueldos y concluyeron respecto al barrio en que se puede vivir teniendo en cuenta cada profesión, reaccionaron expresando diferentes opiniones: unos afirmaban que el médico gana bien porque tiene a cargo salvar vidas y que tendrían que ganar más. En esta parte se les volvió a explicar que era un promedio de los sueldos de todas las especialidades del médico, un cirujano no gana lo mismo que un médico general, por la responsabilidad de los cargos. Otros alegaron que "*el chofer del ómnibus también tiene muchas vidas a cargo*", "*el barrendero gana demasiado, su función es demasiado sencilla*". Otros observaron que "*la cajera de supermercado no puede vivir en ningún lado. Tendría que ganar más que un barrendero porque su función es más delicada, tiene que manejar dinero, en cambio el barrendero solamente barre y no precisa saber escribir o leer*."

También mencionaron que "*El senador puede vivir cómodamente en cualquier lado*". Se les comentó que algunos senadores donan parte de su sueldo a su partido por lo que en esos casos es posible que no sea ese el monto total que reciben por mes.

Por otra parte, se dio una discusión sobre el sueldo del empleado doméstico, sobre si realmente hace bien el trabajo. Pusieron el ejemplo de los auxiliares de servicio del liceo, quienes a su juicio no trabajaban bien porque veían el liceo en mal estado con respecto a la limpieza. Comentaron que los veían ejerciendo de porteros pero también criticaron su actuación como tales dado que "*dejan entrar y salir a cualquiera sin preguntar*". En esa discusión una alumna entendió que se estaba desvalorizando el trabajo del empleado doméstico y la profesora debió intervenir para explicar que la intención no era desvalorizar a ninguno de estos empleos, que el objetivo era comparar los sueldos de la vida real.

A partir de estas observaciones realizadas por los estudiantes, la profesora les preguntó qué pensaban ellos acerca de que no todas las profesiones generaban ingresos suficientes para permitir al trabajador vivir en cualquiera de los barrios. Algunos dijeron que les parecía adecuado porque no todos podían ganar lo mismo pues los sueldos debían variar según la responsabilidad.

A manera de cierre de la actividad se les preguntó a los alumnos qué profesión querían ejercer cuando fueran adultos, y entre las respuestas se encontró: ingeniero en computación, veterinaria, pediatra, partera, médico general y administrador de aduanas.

REFLEXIONES FINALES

Consideramos que la actividad propuesta contribuyó al desarrollo de algunas de las características que Wright (2015b) considera propias de la enseñanza de la MpJS, en particular las primeras tres. Por un lado, se plantearon temáticas vinculadas con la experiencia de la vida real de los estudiantes, haciendo notar la relevancia cultural de la matemática. Ello se evidenció en sus intervenciones referidas a situaciones particulares sobre su hogar y su futuro como profesionales. La actividad los motivó incluso a cuestionarse su futuro, visualizando la importancia de la permanencia en el sistema educativo. En este sentido, entendemos además que la actividad promueve un cuestionamiento matemático que habilita a los estudiantes a comprender mejor su situación social y económica, así como la de otros.

Por otro lado, se empleó una metodología "colaborativa, discursiva y de planteamiento y resolución de problemas" (Wright, 2015b, p. 27). En particular se diseñó la actividad teniendo en cuenta el modelo apropiativo expuesto por Charnay (2002), según el cual el problema es visto como un recurso de aprendizaje.

Consideramos que el mismo fue respetado sólo en parte, algunas fases del modelo no pudieron completarse debido a una de las características del grupo: poca autonomía para el trabajo independiente. En las fases de acción y formulación la docente tuvo que intervenir más de lo deseado para lograr el involucramiento de los estudiantes. Sin embargo, al continuar con la actividad sí se logró una participación activa de los estudiantes, que se mostraron especialmente interesados en discutir a partir de situaciones concretas de la realidad en que viven. Consideramos que ello se debe a que la enseñanza de la MpJS afecta su sensibilidad al proponer temáticas relacionadas con su vida cotidiana. Esto favorece la formación de un ciudadano más libre y crítico que pueda luego ser parte de un cambio social.

Como futuras docentes trataremos de seguir aplicando y fomentando entre nuestros colegas la utilización de este tipo de actividades ya que pudimos comprobar que generan un gran involucramiento por parte de los estudiantes y promueven su reflexión, tanto en lo referido a la construcción de conocimiento matemático como a la realidad socioeconómica en la que están inmersos. Siguiendo las ideas de Freire (1974), entendemos a la educación como una práctica política que debe promover la toma de conciencia de las situaciones de opresión. Creemos que practicando con asiduidad este tipo de actividades puede favorecerse la dialéctica que Freire (1974, 2004) sintetiza en lo que él denomina “praxis” y una suerte de “despertar” de la realidad vulnerable de los actores involucrados.

Evaluamos positivamente esta primera experiencia trabajando con justicia social. Es nuestro deber como docentes intentar que los estudiantes se comprometan con las tareas y creemos que a través de actividades enfocadas hacia este tipo de discusiones se puede lograr esa meta. Además, esta actividad nos demostró que es posible vincular la matemática con áreas sociales, logrando influenciar desde nuestro lugar, por un lado, en la concepción que la mayoría de los estudiantes tiene sobre la asignatura como neutral y objetiva, y por otro, en la percepción que los estudiantes poseen acerca del mundo en el que viven. Esperamos haber aportado un grano de arena en la formación de ciudadanos que reconozcan y luchen contra las injusticias sociales a las que se enfrentan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apartamentos en alquiler (sf). Recuperado el 14 de mayo de 2016 desde http://inmuebles.mercadolibre.com.uy/apartamentos/alquiler/

Charnay (2002). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Comp.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-64). Buenos Aires: Paidós.

Consejo de salarios (sf). Recuperado el 14 de mayo de 2016 desde http://www.mtss.gub.uy/web/mtss/consejos-de-salarios

Freire, P. (1974). *Education for critical consciousness*. London: Sheed & Ward.

Freire, P. (2004). *La importancia de leer y el proceso de liberación.* México D.F.: Siglo XXI Editores.

Wright, P. (2015a). Teacher researchers, mathematics classrooms and social justice. *Paper presented at BERA Conference 2014* (London). Recuperado desde http://maths-socialjustice.weebly.com/uploads/3/0/2/7/30279643/ wright_2014_bera_paper.pdf

Wright, P. (2015b). *Teaching mathematics for social justice: Translating theories into practice.* Tesis doctoral. University of Sussex. Recuperado desde http://sro.sussex.ac.uk/53984/1/Wright%2C_Pete.pdf

Sección 3

Micro diseños de investigación

EL CASO DE LA DIVISIÓN ENTRE CERO

NATALIA CAGGIANI, CARMEN DELGADO, LUCÍA DIZ, CAROLINA GONZÁLEZ, SILVINA GONZÁLEZ, FLORENCIA LEPRATTE, ANDREA MELO, VERÓNICA SCORZA, JULIETA TEJERÍA, CAROLINA VIERA

Resumen
En este trabajo presentamos un estudio que realizamos con 195 alumnos de primer y segundo año de enseñanza secundaria en el que nos propusimos examinar si los estudiantes tendían a realizar la operación en los casos que implica dividir entre cero. Además estudiamos las justificaciones que dieron los alumnos a sus respuestas y analizamos el efecto que tenía en estas el haber trabajado con anterioridad el tema Divisibilidad en el conjunto de los números naturales (N). Encontramos que la mayoría de los alumnos (73%) realizó la división aun cuando el divisor era cero, y que sólo el 17% planteó que no era posible dividir entre cero, habiendo estos trabajado el tema Divisibilidad en N.

Palabras claves: creencias intuitivas, división entre cero, justificaciones.

Abstract
In this work we present a study conducted with 195 students of the first and the second grade of the secondary school in which we sought to examine whether they tend to perform the operation on cases that involve dividing by zero. We also studied the justifications the students gave to their responses and we analyzed the effect that previous studies of divisibility in N had on their answers. We found that most of the students (73%) performed the operation even though the divisor was zero and only 17% stated that it was not possible to divide by zero, these students had studied previously the topic Divisibility in N.

Keywords: intuitive beliefs, division by zero, justifications.

INTRODUCCIÓN

¿El 0 es natural? ¿Qué signo tiene el 0? ¿Cuánto da la "cuenta" 0^0? ¿Por qué no se puede dividir entre 0?

Es habitual que estas y otras preguntas que involucran al cero aparezcan en los cursos de matemática de los distintos niveles de enseñanza media. No siempre es sencillo dar una respuesta adecuada, ya que en general exigen una explicación con cierto rigor matemático y su comprensión depende del conocimiento matemático que tengan los alumnos, de sus experiencias previas y de sus creencias.

Nuestra motivación para la realización de este trabajo se dio en el marco de la asignatura Didáctica III correspondiente al cuarto año del Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores Artigas (IPA). Las alumnas de este curso tuvimos a cargo grupos de práctica de primer y segundo año de enseñanza media básica en 2016. Nos interesó estudiar las concepciones de los estudiantes que integran esos grupos en torno al caso de la *división entre cero*.

Para ello, realizamos un diseño de investigación semejante al llevado a cabo en Israel por las investigadoras Tsamir y Tirosh (2002). Tomando como marco teórico los aportes de Fischbein (1987, citado por Tsamir y Tirosh, 2002) sobre las creencias intuitivas de los estudiantes, ubicamos la división entre cero como una de las creencias intuitivas del tipo *realizar la operación* (este concepto se explicará en la sección dedicada al marco teórico) y nos propusimos explorar las respuestas de los estudiantes al presentarles operaciones que involucran la división entre cero.

Los objetivos del estudio fueron: (1) examinar si los estudiantes tienden a realizar la operación en los casos de la división entre cero; esto es, asignar un resultado a las expresiones que involucran la división entre cero, (2) analizar las justificaciones que dan los estudiantes a sus respuestas, y (3) estudiar el efecto que tiene sobre las respuestas de los estudiantes el hecho de haber trabajado o no con el tema *Divisibilidad en N*.

MARCO TEÓRICO

Fischbein (1987, citado por Tsamir y Tirosh, 2002) sostiene que las creencias intuitivas son un tipo de creencia cognitiva es decir, un tipo de conocimiento. Las define como formas de conocimiento particulares (en el sentido de propias de cada individuo) e inmediatas, que se refieren a afirmaciones o conceptos que exceden los hechos observables y son aceptadas sin exigir una prueba empírica o formal que las justifique.

Algunas de las características de las creencias intuitivas que este autor identifica son:

- *Auto-evidencia*: Las personas perciben estas creencias como verdaderas sin necesidad de ninguna otra justificación.
- *Certeza intrínseca*: Están asociadas con un sentimiento de certidumbre, de convicción intrínseca. Esta característica y la anterior están relacionadas, aunque no son reducibles una a la otra. Existen afirmaciones que se nos imponen y que las creemos convencidos pero no son auto-evidentes (por ejemplo la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas).
- *Persistencia*: Hace referencia a la potencia de estas creencias, una vez adquiridas se arraigan fuertemente. Se mantienen incluso después de haber adquirido un grado avanzado de educación formal.
- *Carácter coercitivo*: Ejercen un efecto coercitivo frente al desarrollo del razonamiento del individuo que tiende a rechazar interpretaciones alternativas que estarían en contradicción con sus intuiciones.

En lo que concierne a las creencias intuitivas sobre operaciones matemáticas, Fischbein (1987) argumenta que la experiencia inicial con las operaciones conduce al desarrollo de creencias específicas e intuitivas sobre cada una de las cuatro operaciones aritméticas básicas, por ejemplo, multiplicar hace más grande.

También plantea otros dos ejemplos de creencias intuitivas del tipo realizar la operación: (1) Los estudiantes tienden a juntar o completar expresiones algebraicas (por ejemplo, $3+2x=5x$). Esperan que el comportamiento de las expresiones algebraicas sea similar al de expresiones aritméticas, es decir, interpretan símbolos como el "+" como las acciones a realizar y esperan que las soluciones sean de un sólo término, (2) los estudiantes consideran incompletas las expresiones que incluyen los símbolos operativos. Por ejemplo, al examinar las concepciones de los estudiantes en torno a los números complejos se encontró que los estudiantes eran reacios a aceptar expresiones tales como $3+2i$ como un número.

La formación de las creencias intuitivas sobre cada operación matemática particular y también sobre las características generales de las operaciones matemáticas, inevitablemente dan lugar a la creencia intuitiva de que cuando se enfrenta un problema matemático, se debe realizar una operación matemática y que, por otra parte, realizarla implica encontrar un resultado o una respuesta. Estas experiencias, que consisten principalmente en las manipulaciones y en llegar a soluciones numéricas es lo que generan en el individuo una creencia intuitiva de realizar la operación.

Resolver la operación división entre cero podría ser considerada como un ejemplo de la creencia intuitiva de realizar la operación. Esta es generalmente la primera operación matemática no definida a la que los estudiantes se enfrentan en sus estudios escolares y un estudiante que tenga incorporada esta creencia podría asignarle valores numéricos a las expresiones que involucran la división entre cero.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Participantes

En este estudio participaron 195 estudiantes: 160 de primer año y 35 de segundo año de educación media básica de seis liceos urbanos de Montevideo, Uruguay. Además, 143 de los alumnos de primer año habían estudiado el tema Divisibilidad en N y 17 no lo habían hecho aún. Todos los alumnos de segundo año lo habían estudiado previamente.

Instrumento

Se propuso a los estudiantes un cuestionario con 20 multiplicaciones y divisiones (ver Anexo). Las operaciones fueron seleccionadas a partir de las cinco categorías consideradas por Tsamir y Tirosh (2002, p. 334):

(1) Cuatro divisiones del tipo "$a \div 0$ *con* $a \neq 0$" (por ejemplo $4 \div 0$, $\frac{12}{0}$)

(2) Tres divisiones del tipo "$0 \div 0$" (por ejemplo $0 \div 0$, $\frac{(2 \times 3) \times 0}{0}$)

(3) Siete divisiones del tipo "$a \div b$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$" (por ejemplo $15 \div 3$, $\frac{6+4}{2}$)

(4) Cuatro divisiones del tipo "$0 \div a$ con $a \neq 0$" (por ejemplo $\frac{0}{15}$, $0 \div 6$)

(5) Dos multiplicaciones del tipo "$a \times 0$" (por ejemplo 0×0, 9×0)

El interés principal estuvo en conocer las respuestas de los estudiantes a las operaciones que involucran la división entre cero. Se esperaba que a través de dichas respuestas se evidenciara si existía en los estudiantes la creencia intuitiva de realizar la operación. El resto de las multiplicaciones y divisiones fueron propuestas, al igual que lo expresan Tsamir y Tirosh (2002), con los siguientes propósitos:

1. Reducir la posibilidad de recibir respuestas automáticas mezclando las expresiones de división indefinidas con las expresiones definidas.
2. Asegurar que los malos resultados en las divisiones entre cero no provienen de una incompetencia general en multiplicaciones y divisiones.
3. Registrar las sobregeneralizaciones de las respuestas en las expresiones que involucran el cero. (p. 335)

Las divisiones fueron presentadas utilizando dos notaciones diferentes: $a \div b$ y $\frac{a}{b}$ ya que, como lo mencionan las autoras, existen estudios anteriores (Grouws y Reys, 1975, citado por Tsamir y Tirosh, 2002), que hacen referencia a que los estudiantes tienen mejores resultados con la notación $a \div b$. Por lo tanto, un objetivo secundario de este trabajo fue observar si esto influía en las respuestas de los estudiantes.

Procedimiento

El cuestionario fue propuesto a los estudiantes durante una hora de clase (45 minutos) en sus respectivos cursos de matemática. Luego del cuestionario se realizaron entrevistas individuales a alumnos (2 o 3 de cada uno de los nueve grupos de práctica) cuyas respuestas nos llamaron más la atención, por ejemplo aquellos que respondieron infinito como resultado de la división entre cero o aquellos que consultaron la definición de división entera.

RESULTADOS

En esta sección presentaremos los resultados obtenidos y las justificaciones dadas por los estudiantes a sus respuestas, así como también parte de las entrevistas realizadas.

Las siguientes tablas (Tabla 1 y Tabla 2) muestran los porcentajes de respuestas a las preguntas del cuestionario que corresponden a divisiones entre cero.

		Grupos 1°	Grupos 1° (no trabajaron divisibilidad en N)	Grupos 2°	Total
	Respuestas/N° alumnos	143	17	35	195
$4 \div 0$	No se puede	30%	0%	11%	24%
	0	47%	53%	49%	48%
	4	15%	23%	31%	19%
	Infinito	2%	0%	0%	2%
	Otras[1]	1%	6%	0%	1%
	Sin responder	5%	18%	9%	6%
$\frac{12}{0}$	No se puede	19%	0%	11%	16%
	0	51%	41%	60%	52%
	12	16%	35%	6%	16%
	Infinito	2%	0%	0%	2%
	Otras	1%	0%	3%	1%
	Sin responder	11%	24%	20%	13%
$\frac{9}{3-3}$	No se puede	18%	0%	9%	14%
	0	49%	29%	60%	49%
	9	13%	12%	9%	12%
	Infinito	3%	0%	0%	2%
	Otras	1%	12%	0%	3%
	Sin responder	16%	47%	22%	20%
$7 \div 0$	No se puede	25%	0%	14%	21%
	0	47%	35%	69%	50%
	7	17%	47%	11%	19%
	Infinito	3%	0%	0%	2%
	Otras	1%	0%	0%	1%
	Sin responder	7%	18%	6%	7%

Tabla 1. Porcentajes de respuestas a expresiones del tipo $a \div 0$ con $a \neq 0$.

[1] Respuestas numéricas distintas de cero y del dividendo de la operación.

		Grupos 1°	Grupos 1° (no trabajaron divisibilidad en N)	Grupos 2°	Total
	Respuestas /N° alumnos	143	17	35	195
$0 \div 0$	No se puede	18%	0%	14%	16%
	0	75%	82%	86%	76%
	Infinito	2%	0%	0%	2%
	Otras	1%	0%	0%	1%
	Sin responder	4%	18%	0%	5%
$\frac{5\times 0+4\times 0}{0}$	No se puede	16%	0%	9%	13%
	0	65%	59%	74%	66%
	Infinito	1%	6%	0%	2%
	Otras	7%	12%	6%	7%
	Sin responder	11%	23%	11%	12%
$\frac{(2+3)\times 0}{0}$	No se puede	19%	0%	3%	15%
	0	62%	53%	80%	64%
	Infinito	1%	0%	0%	1%
	Otras	10%	29%	9%	11%
	Sin responder	8%	18%	8%	9%

Tabla 2. Porcentajes de respuestas en las expresiones del tipo $0 \div 0$.

A partir del análisis de las tablas anteriores podemos afirmar que en promedio[2] el 17% de los estudiantes encuestados respondieron que no es posible realizar la división entre cero. La operación que obtuvo el mayor número de respuestas "no se puede" fue del tipo $a \div 0$ *con* $a \neq 0$.

Encontramos también que el 73%[3] de los estudiantes encuestados realizaron la operación, esto es, asignaron valores numéricos a expresiones que involucran la división entre cero. Entre las diferentes respuestas que dieron a las operaciones, distinguimos: el 57,9% dio como resultado cero, el 16,5% al

[2] Este promedio se calculó con los porcentajes totales correspondientes a la respuesta "no se puede".
[3] Este valor también representa un promedio calculado de igual forma que el anterior.

dividendo (cuando este no es cero) y el 1,86% respondió infinito. Algunos de los estudiantes que respondieron que el resultado era infinito justificaron su respuesta no considerando el infinito como un número, sino como "el representante de todos los números". Esto se puede observar en la justificación brindada por un estudiante en el cuestionario: *"Da infinito porque al dividir un número mayor que 0 entre 0 no se puede entonces es como si te da cero pero también podés poner cualquier número y siempre te da, entonces es infinito porque te da todos los números".*

Todos los estudiantes que afirman la imposibilidad de realizar la operación habían trabajado previamente el tema Divisibilidad en N, ya sea en el mismo curso o en años anteriores. Y de los 17 estudiantes de primer año que no habían trabajado el tema Divisibilidad en N, ninguno respondió que no era posible realizar la operación cuando el divisor es cero.

Distinguimos dos categorías en las justificaciones a las respuestas dadas por los estudiantes entrevistados en las operaciones que involucran la división entre cero: (1) la división entre cero no es posible y (2) La división entre cero da un resultado problemático. A continuación las describimos y desarrollamos.

Categoría 1: La división entre cero no es posible

Dentro de esta categoría los estudiantes dieron justificaciones basadas en: (a) la definición de división entera, (b) en la división aplicada a situaciones cotidianas y (c) en la aceptación de la autoridad del docente (los alumnos aceptan las reglas matemáticas que da el docente).

(a) Justificaciones basadas en la definición de división entera

Este tipo de justificaciones hace referencia a la definición de división entera, más específicamente a la relación existente entre resto y divisor. Reproducimos un fragmento de dos entrevistas realizadas:

Profesor entrevistador: La primera pregunta que te quiero hacer es: ¿Por qué me decís que $4 \div 0$ no se puede hacer?

Estudiante 1: Porque no se puede dividir entre cero.

P: ¿Y por qué no se puede dividir entre cero?

E1: Porque el resto tiene que ser menor que el cociente…. Al dividendo…. Al divisor digo.

P: Bien, ¿y cuál sería el resto?

E1: El resto sería 4.

P: Vos en la encuesta nos pusiste que 4 dividido cero no se puede hacer, y después nos dijiste que daba 4, entonces ¿se puede y da 4 o no se puede?

Estudiante 2: No, porque el resultado puede ser cualquiera y es el resto el que te da 4, y eso está mal porque el divisor no puede ser menor que el resto y ahí no se cumple la definición.

(b) Justificaciones basadas en la división aplicada a situaciones cotidianas

Esta subcategoría hace referencia a aquellos estudiantes que conciben que la división es repartir y el cero es "nada".

P: En el cuestionario tú indicaste que $\frac{4}{0} = 0$, ¿me explicás por qué?

Estudiante 3: Porque si tenés cuatro caramelos y no tenés ninguna persona para repartirlo, es cero. O si tenés cero caramelos y cuatro personas no le podés dar nada a nadie, sería cero.

(c) Justificaciones basadas en la autoridad del docente

En esta subcategoría los alumnos aceptan las reglas que da el profesor sin cuestionarlas. Una estudiante brindó el siguiente argumento para las operaciones del tipo $a \div 0$.

Estudiante 4: No se puede hacer porque en la definición que vos nos diste dice que no se puede, además por la historia que nos contaste: si voy a una tienda en la que todo sale cero pesos me puedo llevar lo que yo quiero o sea una cosa, todas o ninguna y *además no tiene sentido la plata que tengo y por todo eso no se puede hacer la división, no tiene sentido.*

Categoría 2: La división entre cero da un resultado problemático

En esta categoría se encuentran las justificaciones de los estudiantes que hicieron referencia a que si bien no es posible dividir entre cero, igualmente obtenían cero como resultado de la operación y otros que, al dividir entre cero dicen que el resultado es infinito (o que tiene infinitos resultados). Uno de los argumentos es el siguiente:

> *Profesor entrevistador: Queremos que nos cuentes por qué 4 dividido cero da infinito.*
>
> *Estudiante 5: Porque si vos querés realizar una división como por ejemplo 20 dividido 2 vas sumando 2 es decir* 2×1 *es 2,* 2×2 *es 4 y así hasta que llegás a que* 2×10 *es 20, pero lo que vi del cero es que si vos vas sumando nunca te va a dar un número más alto del cero que no es nada, o sea no te va a dar porque así no llegas al 4 y siempre te pasa lo mismo, da cero.*
>
> *P: Entonces, esta operación ¿tiene resultado?*
>
> *E5: Tiene todos los resultados que quiera, por eso es infinito. Yo pongo cualquier resultado y tengo que sumar ceros la cantidad de veces que puse en el resultado, pero como cero no es nada*[4] *si yo sumo cero cualquier cantidad de veces, nunca llego a 4.*
>
> *P: En el ejemplo que nos diste dijiste que 20 dividido 2 da 10, eso ¿por qué?*
>
> *E5: Porque cuando yo hago* 2×10 *me da 20.*
>
> *P: ¿Y cuál es el resto en este caso?*
>
> *E5: Cero, no sobra nada, te da justo.*
>
> *P: Bien, entonces tú nos dijiste que al dividir 4 entre cero puede tener todos los resultados que quieras, ¿cómo puedo verificar que el resultado es el correcto?*
>
> *E5: Multiplicás el resultado por cero y siempre te da cero.*

[4] Observamos que aquí "nada" tiene un significado diferente al de la categoría (1) b.

P: Y ahora, ¿cuál es el resto en este caso?

E5: Cero también... no, no es cero, sería 4, ¿no?

P: ¿Por qué 4?

E5: Y por lo mismo que la de 20 dividido 2 sobra cero, ¿no? Si yo multiplico lo que me da que puede ser cualquiera por cero, me da cero y entonces me sobra 4.

P: Pensando en la definición, ¿el resto puede ser cualquiera?

E5: ¡Ah! No, siempre me tiene que sobrar menos si no, no reparto nada.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes encontramos que en una gran mayoría (73%) los alumnos tienen la creencia intuitiva "realizar la operación" y para el caso de la división entre cero dan como resultado cero, el dividendo de la división planteada, infinito (entendiendo al infinito como el representante de todos los números) u otros números diferentes al cero y al dividendo. Encontramos también que el 17 % de los estudiantes, ante una división entre cero, responde que no es posible realizarla y todos ellos habían trabajado con anterioridad el tema Divisibilidad en N y que, de los que no habían trabajado el tema (17 estudiantes), ninguno respondió "no se puede".

Además, las diferentes notaciones, $a \div b$ y $\frac{a}{b}$, no influyeron en las respuestas que dieron los estudiantes ya que todos completaron el cuestionario y ninguno preguntó qué significaba cada uno de los símbolos.

Al analizar las justificaciones de los alumnos entrevistados en torno a las operaciones que vinculan las divisiones entre cero encontramos que para justificar sus respuestas apelan a la definición de división entera en N, a lo cotidiano (dividir es repartir y el cero es nada) y a argumentos de autoridad (lo que dice el profesor).

Aunque no nos propusimos analizar si había alguna diferencia entre las respuestas que daban los alumnos de primer año y las que daban los alumnos de segundo, encontramos que estos últimos tienen más arraigada la creencia intuitiva “realizar la operación” ya que responden con menor frecuencia que “no se puede” en los casos de divisiones entre cero.

REFLEXIONES FINALES

Los resultados de este estudio muestran que la mayoría de los estudiantes encuestados (73%) tienen arraigada la creencia intuitiva “realizar la operación” en los casos que involucran la división entre cero (los de segundo año en mayor medida que los de primero). Por otro lado el 17% de los estudiantes encuestados planteó, en algunas expresiones, la imposibilidad de dividir entre cero y todos ellos habían trabajado previamente el tema Divisibilidad en N. Por tanto, si bien más investigación sería necesaria, es posible conjeturar que el hecho de tener presente la definición de división entera permitió a estos estudiantes dar tal respuesta.

Esto nos conduce a reflexionar sobre la pregunta planteada por Tsamir y Tirosh (2002, p. 342): “¿Cómo pueden los estudiantes superar el efecto de la creencia intuitiva realizar la operación y aceptar que algunas expresiones matemáticas no están definidas?” Creemos, al igual que las autoras, que los profesores debemos ayudar a los estudiantes a construir nuevas intuiciones consistentes con la definición matemática de la división entera en el conjunto de los números naturales. Entendemos que estos alumnos no logran por sí solos considerar todas las implicancias que tiene la definición formal y, al tener que ponerla en práctica en situaciones concretas, no consiguen controlar sus intuiciones. Es posible que haya que trabajar especialmente con aquellos alumnos cuya imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981) de división incluye únicamente la concepción de repartir. Al enfrentarse a situaciones que involucran la división entre cero, consideran que “no se está repartiendo nada o repartiendo entre nadie" y por lo tanto dan como respuesta cero o el dividendo. En estos alumnos esta creencia no entra en conflicto con la definición del concepto (ya que no contemplan todos los aspectos de la definición formal). En estos casos sería apropiado proponer actividades en las que los estudiantes pudieran tomar conciencia del conflicto que se genera al aplicar ambas simultáneamente. De esta forma su imagen del concepto se vería enriquecida para que pueda ser aplicada en instancias posteriores de su formación académica, especialmente en aquellas que involucren casos de estas y otras operaciones no definidas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht, Holland: Reidel.

Grouws, D. y Reys, R. (1975). Division involving zero: an experimental study and its implications. *Arithmetic Teacher*, 22, 74-80.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(7)*, 151-169.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (2002). Intuitive beliefs, formal definitions and undefined operations: Cases of division by zero. En G.C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 331-344). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

ANEXO

Cuestionario

Nombre y apellido:______________________ Grupo:_____________

Realiza las siguientes operaciones:

$4 \div 0 =$	$\frac{9}{3-3} =$	$0 \div 0 =$	$7 \div 0 =$
$15 \div 3 =$	$\frac{(3+2)}{4} =$	$9 \times 0 =$	$\frac{21}{7} =$
$\frac{0}{15} =$	$0 \times 0 =$	$\frac{6+4}{0} =$	$\frac{9 \times 0}{3} =$
$\frac{16}{4} =$	$\frac{12}{0} =$	$\frac{(2+3) \times 0}{0} =$	$0 \div 6 =$
$\frac{5 \times 0 + 4 \times 0}{0} =$	$\frac{4-3}{17} =$	$\frac{10-4}{3} =$	$\frac{3+2}{1} =$

AUTORES

JUAN ÁLVAREZ es estudiante del Profesorado de Matemática de la experiencia piloto de culminación de la carrera en el Profesorado Semipresencial. El trabajo de su autoría presentado en este libro es fruto de un trabajo colectivo en la asignatura Análisis I (2016).

NATALI AVELLANEDA es estudiante de tercer año del Instituto de Profesores Artigas. El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco del grupo DID1BB14 conformado a partir del curso de la asignatura Didáctica I (2014).

JOAQUÍN BATISTA es estudiante de tercer año del Instituto de Profesores Artigas. El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco del grupo DID1BB14 conformado a partir del curso de la asignatura Didáctica I (2014).

GABRIELA BUENDÍA es Doctora en Matemática Educativa (CINVESTAV, IPN, México). Se ha desempeñado como profesora e investigadora en CICATA-IPN (México). Actualmente es investigadora del Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

NATALIA CAGGIANI es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Didáctica III (2016).

VIRGINIA DE LEÓN es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de un trabajo elaborado en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2016).

CARMEN DELGADO es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. Los trabajos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de las asignaturas Didáctica III (2016) y Análisis del Discurso Matemático Escolar (2016).

LUCÍA DIZ es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Didáctica III (2016).

MARINÉS DOLGAY es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2016). El artículo de su autoría que se incluye en esta obra se elaboró a partir del primer parcial de la asignatura Didáctica lll (2016).

STEFANI FLEITAS es estudiante de tercer año del Instituto de Profesores Artigas. El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco del grupo DID1BB14 conformado a partir del curso de la asignatura Didáctica I (2014).

CAROLINA GONZÁLEZ es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Didáctica III (2016).

SILVINA GONZÁLEZ es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2016). Los trabajos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de las asignaturas Didáctica III (2016) y Análisis del Discurso Matemático Escolar (2016).

VANESSA GONZÁLEZ es estudiante del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2016).

LILIANA LEIRÓS es estudiante del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Didáctica III (2016).

FLORENCIA LEPRATTE es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2016). Los trabajos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de las asignaturas Didáctica III (2016) y Análisis del Discurso Matemático Escolar (2016).

ANA MARTÍNEZ es Profesora de Matemática egresada del Instituto de Profesores Artigas. Actualmente se desempeña como profesora efectiva de Didáctica de la Matemática en el Instituto de Profesores Artigas.

ROCÍO MARTÍNEZ es estudiante del Profesorado de Matemática de la experiencia piloto de culminación de la carrera en el Profesorado Semipresencial. El trabajo de su autoría presentado en este libro es fruto de un trabajo colectivo en la asignatura Análisis I (2016).

CLAUDIO MEIRAS es estudiante de tercer año del Instituto de Profesores Artigas. El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco del grupo DID1BB14 conformado a partir del curso de la asignatura Didáctica I (2014).

ANDREA MELO es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Didáctica III (2016).

ROSANA MIDAGLIA es estudiante de tercer año del Instituto de Profesores Artigas. El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco del grupo DID1BB14 conformado a partir del curso de la asignatura Didáctica I (2014).

VERÓNICA MOLFINO es Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

GIMENA NEGRETTE es estudiante de tercer año del Instituto de Profesores Artigas. El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco del grupo DID1BB14 conformado a partir del curso de la asignatura Didáctica I (2014).

CRISTINA OCHOVIET es Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

VALERIA RAMÍREZ es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Didáctica III (2016).

MARIELA REY es Magíster en Ciencias en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México) y egresada del Instituto de Profesores Artigas. Se desempeña como docente en las asignaturas Análisis I y Didáctica I del Profesorado Semipresencial. El trabajo de su autoría presentado en este libro es fruto de un trabajo colectivo en la asignatura Análisis I de la experiencia piloto de culminación de la carrera en el Profesorado Semipresencial (2016).

SILVIA ROMANIELLO es estudiante de tercer año del Instituto de Profesores Artigas. El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco del grupo DID1BB14 conformado a partir del curso de la asignatura Didáctica I (2014).

BIANCA SANTINI es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de un trabajo elaborado para la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2016).

VALERIA SCHAFFEL es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2016) y licenciada en Filosofía por la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (2014). El artículo de su autoría que se incluye en esta obra se elaboró a partir del primer parcial de la asignatura Didáctica lll (2016).

VERÓNICA SCORZA es egresada del Instituto de Profesores Artigas (IPA) y Diplomada en Matemática (mención Enseñanza) por la ANEP-UDELAR (2016). Se ha desempeñado como profesora de matemática en la enseñanza media y como docente de Didáctica en el IPA.

JULIETA TEJERÍA es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Didáctica III (2016).

CAROLINA VIERA es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. Los trabajos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de las asignaturas Didáctica III (2016) y Análisis del Discurso Matemático Escolar (2016).