ADMINISTRACIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN PÚBLICA
Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Investigador Responsable: Dr. Rafael Potrie

Una cara de los Reales por fracciones continuas

Prof. Pablo Rolón
Prof. Alejandro Mello
Consejo de Educación Secundaria
Artigas

Pasantía : Sistemas dinámicos vía fracciones continuas

estímulo a la cultura científica y tecnológica
PEDECIBA

Introducción

Las fracciones continuas son una de las herramientas más utilizadas a lo largo de la historia de las Matemáticas. Sus inicios se deben al Algoritmo de Euclides. Este algoritmo introdujo la idea de obtener una sucesión de restos a partir de dos números enteros iniciales.

Son una forma conveniente de desarrollar los números reales para encontrar las mejores aproximaciones de estos (desde el punto de vista de los denominadores). El vínculo de estas con la transformación de Gauss permite encontrar propiedades relevantes de esta descomposición de los números.

Definición: Dado cualquier número real x existe una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ (donde $a_k \in N^*$) tal que el número x puede ser escrito de la forma

$$\boldsymbol{x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}}$$

donde a_0 es un número entero.

Esta expresión es la expresión en *fracciones continuas* del número x, que puede ser escrita de la siguiente manera: $\boldsymbol{a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots]}$

Esto significa que $x = \lim_{k\to+\infty} \frac{p_k}{q_k}$

donde $\frac{p_k}{q_k} = \boldsymbol{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}$

Los números a_i se llaman *cocientes* de x y las fracciones p_k/q_k son los *convergentes* de x

Una de las ventajas de este desarrollo es que podemos obtener propiedades de los números reales simplemente observando el desarrollo en *fracciones continuas*.

Dos ejemplos:

- Los números racionales se caracterizan por tener un desarrollo finito
- Un número irracional que es solución de una ecuación cuadrática de coeficientes enteros tiene un desarrollo periódico

Cómo realizar el desarrollo en *fracciones continuas* de un número real. Caso para un racional

Vamos a desarrollar el racional $\frac{23}{28}$.

Primero observamos que $\left[\frac{23}{28}\right] = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$

$$\frac{23}{28} = \frac{1}{\frac{28}{23}} = \frac{1}{1+\frac{5}{23}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

Por lo tanto $\frac{23}{28} = 0 + [1,4,1,1,2] = [1,4,1,1,2]$

Desarrollo de un número racional:

$$\frac{23}{28} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}} = [1,4,1,1,2]$$

Desarrollo de un número irracional

$$\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ddots}}}} \quad 2 + [1,4,1,4,\ldots]$$

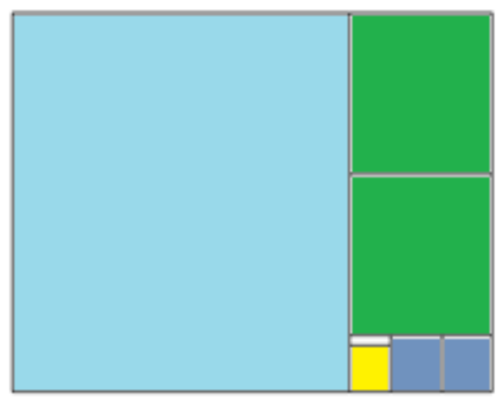
Resultados destacados

Teorema: *Un número $x \in R$ es racional si solo si posee un desarrollo en fracciones continuas finita, esto es, existe una sucesión finita $(a_k)_{k=0}^{m}$ de números reales tales que* $\boldsymbol{x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_k]}$

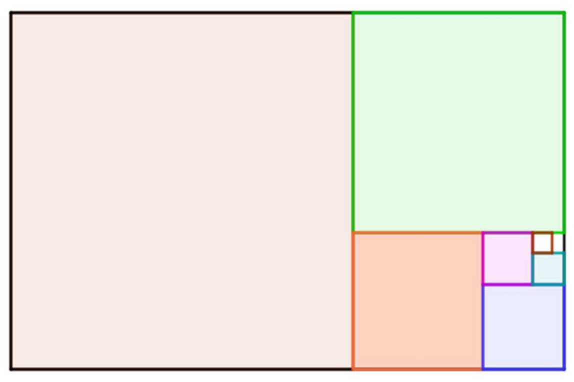
Teorema: *Un número $x \in R$ es irracional si solo si posee un desarrollo en fracciones continuas infinita, esto es, existe una sucesión infinita $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ de números reales tales que* $\boldsymbol{x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots\ldots]}$

Teorema de Lagrange: *Sea x un número irracional. El desarrollo en fracciones continuas de x es periódica o pre-periódica si, y solamente si, x es una solución de una ecuación cuadrática de coeficientes enteros.*

Interpretación Geométrica



Teniendo en cuenta la construcción de un rectángulo áureo podemos obtener la fracción continua del número de oro



$$\theta = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

Aproximaciones

Teorema de Liouville : *"Sea x un número algebraico de grado n. Entonces, existe una constante C=C(x)>0, tal que* $\left|x - \frac{a}{b}\right| > \frac{C}{b^n}$ *para todo* $a, b \in Z, b > 0, x = \frac{a}{b}$*"*

Este teorema caracteriza los números algebraicos como aquellos que no admiten *"Buenas Aproximaciones"* por números racionales que exceden una determinada orden. Decimos que la fracción $\frac{a}{b}$,b>0 es ***una buena aproximación de un número real x si vale la desigualdad |dx-c|>|bx-a|, para todo*** $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$ ***con 0<d ≤ b***

Por lo tanto, el Teorema de Liouville proporciona una poderosa herramienta para construir números trascendentes (que son bien aproximados por números racionales)

Agradecemos a Procencia-ANEP, por el apoyo económico y la Facultad de Ciencias de la UDELAR por su apoyo académico