ANEP **UDELAR**

TESINA

DIPLOMA EN MATEMÁTICA

(MENCIÓN ENSEÑANZA)

Las tareas de final abierto y su potencial para la enseñanza de la matemática en la formación de profesores

Presenta

María Verónica Scorza Arló

Directora

Cristina Ochoviet

Montevideo, octubre de 2016

La educación no cambia el mundo,
cambia a las personas que van a
cambiar el mundo.
Paulo Freire

Agradecimientos

A Cristina Ochoviet por acompañarme en el proceso con dedicación y generosidad.
A Verónica Molfino y Victoria Mesa por su participación en este trabajo.
A los profesores que gentilmente accedieron a participar en el taller.
A Clara, Emilia y Checho.

Resumen

En este trabajo delimitamos teóricamente qué entendemos por intervención didáctica en Matemática Educativa y dejamos abierta la posibilidad de que una intervención como la que proponemos pueda dar lugar a un proyecto de Investigación Acción.

En particular, diseñamos un proyecto de intervención didáctica para un curso de una asignatura específica del profesorado de Matemática de un Instituto de Formación Docente de Uruguay.

La intervención consiste en una propuesta de acompañamiento de las prácticas de los profesores encargados de ese curso utilizando como herramienta las tareas de final abierto y en una modalidad de trabajo colaborativa.

Con este proyecto pretendemos aportar una instancia de desarrollo profesional a los profesores responsables de ese curso que contempla dos asuntos fundamentales: entender la clase como un ámbito para la producción de conocimientos y desarrollar metodologías de enseñanza que estén en concordancia con lo que demanda la formación de profesores de matemática hoy en día. Esto incluye establecer conexiones explícitas entre la matemática del nivel superior que enseñan y la matemática que habrán de enseñar en sus aulas aquellos que se están formando.
Palabras claves: formación de profesores de matemática, intervención didáctica, tareas de final abierto, prácticas de enseñanza.

Abstract

In this work we delimit theoretically what we mean by pedagogical intervention in Mathematics Education and we establish the possibility that an intervention such as the one proposed may lead to an Action Research project.

In particular, we designed a project of pedagogical intervention for a course in a specific subject matter of the curriculum of the mathematics teacher training in Uruguay.

The intervention consists of a proposal to accompany the practices of the teacher educators using as a tool the open-ended tasks and working with a collaborative methodology.

With this project we aim to provide an instance of professional development for teacher educators including two fundamental issues: understanding the class as a field for the production of knowledge and develop teaching methodologies that are consistent with the demands of mathematics teacher training nowadays. This includes establishing explicit connections between the upper level mathematics they teach and the secondary level mathematics their student teachers will teach in their classrooms in the future.
Keywords: mathematics teacher training, pedagogical intervention, open-ended tasks, teaching practices.

Índice

Capítulo 1: Introducción y encuadre de la intervención didáctica en Matemática Educativa (ME)

1. 1 Introducción

Desde hace ya varias décadas, diferentes organizaciones como el NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*), la CBMS (*Conference Board of Mathematical Science)*, la MAA (*Mathematical Association of America*) y el Grupo Cero de Valencia, entre otros, han realizado recomendaciones para la formación de profesores para la enseñanza media y, entre ellas, se han referido a las prácticas de enseñanza de la matemática en la formación inicial de profesores. Algunas de las recomendaciones que realiza el NCTM (1991) son establecidas en los Estándares para el Desarrollo Profesional.

Como recomendación general, estos documentos acuerdan que los formadores de profesores, en los programas de formación inicial y continua, deberían poder mostrar una buena enseñanza de la matemática proponiendo tareas matemáticas valiosas, presentando la matemática como una actividad humana y creando ambientes de aprendizaje que sostengan y alienten el razonamiento matemático y la disposición y la habilidad para hacer matemática. Explorar, conjeturar, demostrar, comunicar las ideas y trabajar en forma colaborativa son actividades propias de ese quehacer matemático.

Además, sostienen que los profesores de matemática deberían tener un rol activo en su propio desarrollo profesional, aceptando que son responsables de experimentar en sus clases con abordajes y estrategias alternativas y de reflexionar sobre asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en forma individual y colectiva, discutiendo con otros colegas.

Por otro lado, numerosas investigaciones dan cuenta de la problemática relacionada con la enseñanza de la matemática en la formación de profesores.

En particular, en una de sus conclusiones, Olave (2013) recomienda que:

> […] sería deseable que el plantel de FPM (Formadores de Profesores de Matemática) tuviera una instancia de formación, no solo en la asignatura, sino también en didáctica de la matemática para nivel terciario en donde pudieran reflexionar sobre su acción pedagógica y las consecuencias de estas en sus estudiantes, EPM (Estudiantes de Profesorado de Matemática). (p. 194)

Tomando las recomendaciones antes referidas es que proponemos un proyecto de intervención didáctica con el objetivo de ofrecer una experiencia de desarrollo profesional para quienes se desempeñan como formadores de profesores de matemática, enmarcada en la conceptualización antes descripta: los formadores de profesores deberían poder ofrecer ambientes donde se desarrolle la producción de ideas matemáticas y deberían poder establecer conexiones explícitas con la matemática que los estudiantes, futuros profesores, habrán de enseñar.

La herramienta didáctica a utilizar son las tareas de final abierto (Zaslavsky, 1995). Estas tienen potencial para generar ambientes de producción de ideas matemáticas y también, para hacer explícitas las conexiones entre la matemática del nivel superior que se enseña y la matemática que habrán de enseñar en sus aulas aquellos que se están formando.

Por otra parte encontramos que, dado que el término *intervención didáctica* no aparece definido en los trabajos que consultamos, es necesario establecer cómo entenderemos este concepto en nuestro trabajo.

1. 2 Encuadre de la intervención didáctica en Matemática Educativa

Esta sección fue elaborada junto a la profesora Victoria Mesa. Al tratarse de una conceptualización que no existe actualmente en el campo, se decidió emprender un trabajo colaborativo para no pensar a solas un constructo teórico de esta naturaleza.

1.2.1 Hacia una conceptualización de intervención didáctica en Matemática Educativa

Existen reportes de investigaciones en ME que aluden a *intervenciones* (Arbaugh y Brown, 2005; Saeli, 2009) pero el término no aparece problematizado ni definido en ninguno de estos trabajos. Parecería tratarse de una noción *transparente* en el sentido de Chevallard, Bosch y Gascón (1997). Buscaremos entonces delimitar teóricamente qué entenderemos, en este trabajo, por *intervención didáctica* en *Matemática Educativa*.

En el diccionario de la RAE encontramos la siguiente definición: *"Intervención*: acción y efecto de intervenir". Y, de todas las acepciones que hay del verbo *intervenir*, centramos la atención en la siguiente: "tomar parte en un asunto", pues es fiel a su etimología latina, "participar en alterar una acción", que además se alinea con el tipo de tarea que estamos pensando. Pero claramente es una definición muy general e inespecífica para nuestro objetivo de trabajo y por tanto decidimos indagar qué se entiende por intervención en otras disciplinas.

En primer lugar observamos que el concepto de intervención adquiere diferentes connotaciones, desde muy negativas a muy positivas, dependiendo del campo disciplinar en el que se enmarque. A modo de ejemplo, una intervención artística, una intervención psicopedagógica, psicológica o médica son valoradas positivamente y son habituales en los mencionados campos de acción. En cambio, si nos trasladamos al campo de la política o al campo empresarial, las intervenciones adquieren a veces una connotación negativa porque en muchas ocasiones solo pretenden controlar aquello que se interviene. Pensemos por ejemplo la intervención como concepto asociado a las dictaduras militares en América Latina o el rol de un interventor en una empresa con problemas económico-financieros. Como consecuencia de estos tipos de intervención, muchas veces la noción de intervenir trae implícita también la idea de actuar sobre algo (sea un objeto o individuo) entendiendo ese algo como un ser pasivo.

Para poder delimitar a qué nos referiremos con *intervención* y que nuestra acción no quede teñida por los distintos significados que se asignan a este vocablo, es que planteamos definir qué entendemos por intervención específicamente en el ámbito de la ME.

Señalaremos a continuación algunas de las características de dos tipos de intervenciones: la social y la artística, ya que varias de ellas serán las que inspirarán la concepción de *intervención didáctica en ME* que adoptaremos.

Una *intervención social* puede entenderse según Fantova (2008) como "[…] una actividad que se realiza de manera formal u organizada intentando responder a necesidades sociales y, específicamente, incidir significativamente en la interacción de las personas, aspirando a una legitimación pública o social" (párr. 1).

Una intervención social es entonces un proceso complejo y se lleva a cabo en forma muy lenta y detallada, produciendo descripciones, informes y observaciones.

Por otra parte, una *intervención artística* se puede considerar como una acción original y diferenciada, mediante la cual se modifica alguna o varias de las propiedades de un espacio cualquiera (Intervención (arte), 30 de enero de 2016). Consiste generalmente en "una manifestación hecha por personas que se presentan en el espacio público a través de *performances*, murales, pinturas, esculturas, etc., que invite al disfrute y reflexión del público espectador" (Intervención artística, s. f). Tiene como características: la presencia de un objetivo, la realización de una investigación preliminar y el desarrollo de cierto nivel organizacional. Puede tener carácter permanente o efímero.

De estos tipos de intervenciones recuperamos los siguientes aspectos que parecen ser inherentes a toda intervención: una intervención es *compleja,* es *original,* se programa en *forma organizada,* tiene un *propósito específico* y pretende *generar algún cambio*.

En líneas generales, un proyecto de intervención puede definirse como: "una propuesta factible, creativa y detallada y su aplicación, para realizar una mejora o resolver una problemática grupal, social, institucional y empresarial, sobre cualquier aspecto que afecte a su buen desempeño." (Proyecto de intervención, s. f). Esta concepción de intervención no está alejada del proyecto que propondremos pero el nuestro no apunta necesariamente a resolver una problemática que esté afectando el desempeño de los docentes. Es más, nosotros no nos situamos en un lugar desde el cual el "buen desempeño" esté definido de antemano, ni somos nosotros quienes lo predeterminamos, sino que es en el trabajo conjunto con los profesores que se define lo que se considera un "buen desempeño" y se busca desarrollar herramientas para lograrlo.

Es evidente que una intervención, del tipo que sea, necesita *actores* participantes. En el caso de nuestro proyecto los principales actores serán el docente investigador y el docente a cargo de un curso de Matemática de la formación de profesores. El primero es el que propone la intervención como instancia de desarrollo profesional docente para enriquecer las prácticas o porque se ha detectado cierta problemática –en nuestro caso relativa a la enseñanza o al aprendizaje de la Matemática en la formación inicial de profesores de Matemática– y es el docente investigador el que está al tanto de resultados de investigación en ME relacionados con dichas temáticas. Partimos de la premisa de que es importante el desarrollo del *rol docente del investigador* para contribuir a la comprensión por parte del docente en ejercicio de los resultados de investigación en ME, tal como se propone en Ochoviet y Oktaç (2011) y en Fernández, Molfino y Ochoviet (2016). Mientras que el segundo actor es el docente que imparte una asignatura específica de la carrera de profesorado de Matemática y accede a participar, en una modalidad de trabajo colaborativa, con el docente investigador, en el proceso de intervención.

Otros de los actores involucrados en el proceso son los propios *estudiantes* que, en este caso, son futuros profesores de Matemática. Es por ello que propondremos determinadas prácticas docentes. El análisis del vínculo de los estudiantes con el conocimiento que se pone en juego en la clase –ámbito natural del proceso de enseñanza y de aprendizaje– será uno de los aspectos más importantes del proceso que pensamos llevar adelante.

Realizando una analogía con la intervención psicológica, así como el psicólogo es quien interviene a fin de atender a una problemática de un individuo o grupo, es el investigador en su rol docente quien actúa para contribuir y enriquecer las prácticas del profesor formador de profesores.

Haciendo un paralelismo con la intervención artística, pensemos a manera de metáfora en el siguiente escenario: el docente responsable de un curso en la formación de profesores viene realizando *una obra*, conoce su *público* y el *contexto*; otro docente (investigador) propone *una intervención* con el ánimo de modificar ciertos aspectos de esa obra, para enriquecerla. Su *acción*, que consiste en un proceso de planificación conjunta, está dirigida a ese público en particular y pretende generar un *cambio* que puede resultar *efímero* o *permanente*. Una intervención es *efímera* cuando se compone de instancias puntuales que pueden llevarse a cabo (una charla, una observación de clase para compartir reflexiones, aportar un material, un taller), mientras que se transforma en algo *permanente* si se consolida una práctica de trabajo colaborativa con el equipo de docentes, por un cierto período, que pueda dar cuenta de un proceso de trabajo.

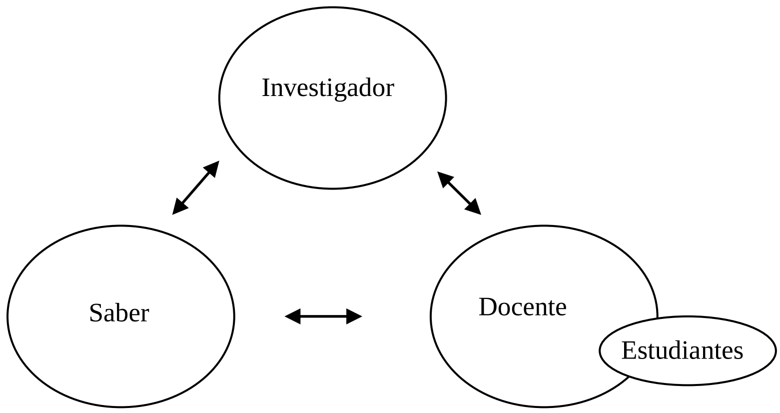
A partir de todo lo expuesto, conceptualizamos una intervención didáctica en el campo de la matemática educativa de la siguiente manera:

Una *intervención didáctica en matemática educativa* consiste en una propuesta de acción original y creativa, programada en el tiempo y desarrollada en forma colaborativa entre un investigador -en su rol docente- y un docente, desde una concepción teórica determinada, que busca contribuir o generar cambios en las prácticas docentes y está orientada a un objetivo.

Ese objetivo podría consistir en proponer metodologías de enseñanza acordes a las recomendadas para formación docente que es el caso en el que estamos particularmente interesadas.

1.2.2 Un diseño de intervención didáctica

Proponemos una intervención didáctica específica para la formación de profesores de matemática basada en un modelo que articula: el saber, el investigador en su rol docente, el docente de un curso de matemática de formación docente y los estudiantes, como refleja el siguiente esquema:



El investigador y el docente trabajan en forma conjunta y bajo la concepción de trabajo colaborativo, centrados en que los estudiantes logren ciertos aprendizajes. Es por esto que el investigador y el docente interactúan con el saber. Aquí aparecen dos aspectos del saber: por un lado, el saber matemático que es el conocimiento del contenido que el docente pone en juego en la clase de matemática y, por otro, el saber que se relaciona con el conocimiento didáctico y especializado del contenido para la enseñanza de la matemática. Este último hace referencia también al saber del investigador (en su rol docente) con respecto a resultados de investigación.

La intervención se centra en las prácticas del docente encargado de un curso, que se ven reflejadas en las metodologías que lleva a cabo en el aula, constituyendo estas el objeto específico de la intervención.

El estudiante no se ve directamente involucrado en la acción del investigador pero sí implícitamente a través de la modificación de las prácticas del docente a cargo del curso.

El proyecto de intervención didáctica que proponemos está basado en la planificación de un trabajo conjunto entre investigador y docente a cargo de un curso de matemática en la formación de profesores. Consiste en la planificación de actividades, su análisis a priori, implementación y análisis a posteriori.

El modelo de intervención que proponemos consta por lo menos de las siguientes etapas:

1. Presentación del proyecto por parte del docente investigador a docentes de las asignaturas implicadas a través de salas docentes. Explicitación del plan de trabajo. Reflexión sobre la pertinencia de una intervención didáctica en cursos

de Matemática de formación docente a partir de resultados de la investigación en matemática educativa.

2. Ejemplificación de la propuesta en lo que refiere al marco teórico específico de la intervención. Acercamiento a los docentes encargados de cursos de matemática de resultados de investigaciones en matemática educativa que el docente investigador considere convenientes para el desarrollo de la intervención.
3. Realización de salas conjuntas entre docentes y docente investigador donde los primeros, a través de un trabajo creativo, produzcan actividades para proponer a sus estudiantes, acorde a lo trabajado en la sala previa. Análisis en forma conjunta de la adecuación de las actividades a proponer en base a los objetivos y contenidos del curso, e identificación del potencial a priori de las actividades.
4. Proposición de las actividades a los alumnos en el aula de clase por parte del docente del curso. El rol del investigador en esta instancia es de acompañamiento para facilitar el análisis crítico de la práctica.
5. Realización de una entrevista final entre investigador y cada docente de los cursos para un análisis a posteriori de la propuesta en relación a la potencialidad de las actividades y de la metodología de trabajo utilizada, y la posibilidad de continuidad de la propuesta y de extensión a otros contenidos del curso o a otros cursos.

1.2.3 La intervención didáctica en ME como vía hacia la Investigación Acción

La Investigación Acción (*Action Research*) tiene sus orígenes en el ámbito de las ciencias sociales cuando Kurt Lewin, en los años 50, usó el término para describir un proceso de investigación social que llevó a un cambio social, caracterizándolo además por una activa participación y una toma de decisiones en forma democrática.

En esta línea, A. H. Halsey (sociólogo británico) entiende la Investigación Acción como "una intervención a pequeña escala en el funcionamiento del mundo real y un examen detallado de los efectos de tal intervención". (Halsey, 1972, p. 165 referido en Saeli, 2009, p. 84).

Por su parte, Carr y Kemmis (1986) señalan que: "Hay dos *objetivos* esenciales de toda investigación acción: *mejorar* e *involucrar*" (p. 165). Estos autores proponen que la investigación acción apunta a la mejora en tres ámbitos: la mejora de una *práctica*, la mejora de la *comprensión* de la práctica por sus participantes y la mejora de la *situación* en la que la práctica se lleva a cabo. Consideran además que los actores involucrados en la práctica deben participar en todas las fases del proceso de investigación acción que han identificado como las siguientes cuatro: *planificación, acción, observación y reflexión.*

Carr y Kemmis (1986) preocupados por la investigación en educación y el desarrollo profesional de los docentes, llevaron la investigación acción al campo de la educación, definiéndola de la siguiente manera:

> La investigación acción educativa es un término que se usa para describir una familia de acciones en el desarrollo del currículo, el desarrollo profesional, los programas de mejoramiento escolar, y los sistemas de planificación y políticas de desarrollo. Estas actividades tienen en común la identificación de estrategias de acción planificadas que son *implementadas*, y sistemáticamente sometidas a *observación, reflexión y cambio.* Los participantes considerados en la acción están íntegramente involucrados en todas estas actividades. (pp. 164-165)

En este mismo sentido Cohen y Manion (1980, 1984; referidos en Saeli, 2009, p. 84) identifican algunas de las características de la Investigación Acción: es *situacional*, pues diagnostica y aborda un problema en un contexto específico; es *colaborativa*, dado que investigadores y profesionales trabajan juntos en un proyecto; es *participativa*, todos los integrantes del proyecto forman parte directa o indirectamente en la implementación de la investigación; y es *auto-evaluativa*, porque las modificaciones son evaluadas continuamente en un proceso en espiral en donde el núcleo que se repite es el formado por las cuatro fases antes mencionadas: *planificación, acción, observación y reflexión*.

Carr y Kemmis (1986) señalan que en la investigación acción son los propios docentes los que se involucran en el proceso de investigación, con sus propias convicciones e intereses, teorizando sobre su propia práctica y revisándola a la luz de las consecuencias de llevarla a cabo. Sin embargo, identifican tres diferentes tipos de investigación acción: la *técnica*, la *práctica* y la *emancipadora* o *crítica* que surgen de diferenciar el rol que toma el facilitador cuando trabaja con los docentes en los proyectos de investigación. En la IA del tipo técnica los facilitadores conforman un equipo con los docentes para trabajar sobre preguntas “externamente-formuladas” (p. 202) que en general no se basan en preocupaciones de los profesores acerca de sus prácticas. Además es posible que los facilitadores “persuadan a los profesionales a probar en sus prácticas los resultados de investigaciones externas […] y serviría para alimentar de nuevos resultados a dichas investigaciones externas.” (Carr y Kemmis, 1986, p. 202). Si bien una investigación acción del tipo técnica surgiría del interés de un docente investigador y a partir de ello involucraría a los otros docentes aunque no por motivación propia de estos, aceptando las condiciones que les impone el facilitador, Carr y Kemmis (1986) establecen su defensa en el hecho de que “pueden producir valiosos cambios en la práctica” (p. 202). Por otra parte, puede considerarse como una actividad que involucra a los docentes en una instancia de desarrollo profesional.

En la IA del tipo práctica, que se denomina así pues tiene como objetivo desarrollar el razonamiento práctico de los profesionales, el rol de los facilitadores es descrito de la siguiente manera:

> Facilitadores externos establecen relaciones de cooperación con los profesionales, ayudándolos a articular sus propias preocupaciones, a planificar acciones para el cambio, a monitorear los problemas y los efectos del cambio, y a reflexionar sobre el valor y las consecuencias de los cambios que realmente se consiguen. (Carr y Kemmis, 1986, p. 203)

Catalogan este rol como *socrático*, en el sentido de que el facilitador funciona como una suerte de “caja de resonancia para los profesionales, quienes ponen a prueba sus ideas, aprenden más acerca de las razones de sus propias acciones y acerca del proceso de auto-reflexión” (p. 203).

Finalmente, en la IA emancipadora o crítica como es el propio grupo de profesionales el que tiene la responsabilidad conjunta del desarrollo de la práctica, de comprender y analizar las situaciones, cualquiera de sus miembros puede tomar el rol de facilitador. En este caso, un facilitador externo podría considerarse poco apropiado para el desarrollo del proceso de investigación.

Consideramos que luego de realizada la primera etapa del ciclo de diseño de la intervención didáctica que proponemos, se podría dar lugar a un proyecto de *investigación acción.* Pensamos que podrían darse dos escenarios diferentes: uno sería el caso en que, de los docentes participantes, surgiera una problemática referida a sus prácticas que consideren relevante para analizar y el otro sería que el docente investigador planteara dicha problemática. El primer escenario daría lugar a un proyecto de IA del tipo práctico y el segundo a una del tipo técnico. En cualquiera de los casos entendemos que el proyecto que surja compartiría las características generales de toda investigación acción: ser situacional, colaborativa, participativa y auto-evaluativa. Por otra parte, en el diseño de intervención didáctica que proponemos, las etapas 3, 4 y 5 pueden dar lugar a las fases que constituyen los elementos indispensables del ciclo de investigación acción: *planificación, acción, observación y reflexión.*

Capítulo 2: Revisión bibliográfica y formulación de objetivos

2.1 Los modelos de enseñanza de los docentes formadores de profesores

En muchos formadores de profesores, tal como lo reporta Mellado (1999, referido en Ochoviet, 2010), prevalece la idea de que para ser profesor es suficiente con tener conocimientos de la asignatura que se enseña, experiencia, sentido común y cualidades personales innatas.

Además, es común que los formadores de profesores adopten metodologías tradicionales basadas en la exposición y trasmisión de conocimientos. En ese sentido, Dalcín, Ochoviet y Olave (2011), luego de realizar un análisis de las prácticas de aula de diez docentes formadores de futuros profesores de matemática para la enseñanza media en un Instituto de Formación Docente de Uruguay, concluyen que es necesario emprender proyectos de trabajo que atiendan el diseño y gestión de las clases de matemática de formación docente para que estas estén en consonancia con lo que se espera de ellas: que los futuros profesores se formen a través de metodologías de trabajo similares a las que habrán de emplear en sus clases cuando sean docentes de enseñanza media.

En un estudio de casos sobre cuáles son los modelos de los formadores de profesores de matemática y en qué medida estos se transmiten a los futuros docentes, Olave (2013) identifica tres modelos docentes denominados *disciplinar*, *pedagógico y didáctico-pedagógico*, de acuerdo a si se lograron detectar vinculaciones desde la dimensión disciplinar con otras dos dimensiones: la pedagógica y la didáctica. El *modelo disciplinar* corresponde a aquel en el que no se detectaron vínculos desde lo disciplinar con las otras dimensiones. El *modelo pedagógico* corresponde a uno en el que, desde lo disciplinar se establecen vínculos con la dimensión pedagógica exclusivamente. El *modelo didáctico-pedagógico* corresponde a aquel en el que, desde lo disciplinar se establecen vinculaciones tanto con la dimensión pedagógica como con la didáctica. Este último modelo se caracteriza principalmente por la capacidad del docente para habilitar espacios de aprendizaje donde se negocian significados con los estudiantes y son ellos mismos los que generan el conocimiento matemático, al que concibe como parte de la problemática didáctica.

Por otra parte, en Uruguay no todos los formadores de profesores tienen formación en didáctica y, en general, no están al tanto de las investigaciones en Matemática Educativa y los resultados que estas reportan. También, tal como lo señalan

Ochoviet y Oktaç (2011), los profesores necesitan ayuda para comprender los resultados de investigación, tornándose fundamental el *rol docente del investigador*.

2.2 El conocimiento matemático y el conocimiento didáctico

En relación al conocimiento matemático, Marcelo (1994, p. 21) plantea que es necesario analizar "[…] en qué medida el conocimiento que los profesores en formación están recibiendo o construyendo es relevante para desenvolverse en contextos reales de enseñanza".

Por su parte Santaló (1994, p. 2) sentencia:

> No se debe, por ejemplo, dar un curso de Álgebra Lineal o de Cálculo Infinitesimal para futuros profesores, de igual manera que para licenciados en matemática, ingenieros o economistas. La enseñanza en el profesorado debe ser coherente, salvando los niveles y la extensión de los temas, con la que los alumnos, futuros profesores, deberán luego impartir a sus alumnos.

Además, Santaló (1994) señala que en la formación de profesores las asignaturas que deben cursar los futuros profesores se clasifican en matemática propiamente dicha, en las que se enseña "qué" enseñar y, en materias de didáctica o metodología, en las que se enseña "cómo" enseñar. Parece entonces que, el *conocimiento del contenido* (Shulman, 2005), esto es el conocimiento matemático, está disociado del conocimiento didáctico y la responsabilidad de la enseñanza del *conocimiento didáctico del contenido* (Shulman, 2005), queda casi en exclusiva en la órbita de los profesores de didáctica.

Lo señalado anteriormente se relaciona con lo que Blanco, Mellado y Ruiz (1995) llaman *componente estática* y *componente dinámica* del conocimiento. La primera es impersonal y se puede encontrar en cualquier libro, pero la segunda se refiere a:

> […] la parte del conocimiento profesional que se genera y evoluciona a partir de los propios conocimientos, creencias y actitudes, que requiere una implicación personal, y que evoluciona mediante un proceso dialéctico entre la teoría asimilada y la práctica desarrollada, todo ello en un proceso de reflexión-acción. (p. 7)

En la misma línea, Gudmundsdóttir y Shulman (2005) realizan un estudio comparativo entre un profesor experto y un profesor principiante de Ciencias Sociales. Observaron que el profesor experto además de dominar su materia, esto es, el *conocimiento del contenido* (Shulman, 2005), mostró flexibilidad para narrarla y para seleccionar la metodología adecuada para cada tema. Por su parte, el profesor principiante si bien también tiene un conocimiento experto de su materia, mostró dificultades para hacer conexiones entre los temas y para visualizar el curso como un todo. A partir de este estudio concluyen con implicaciones para la formación del profesorado, apuntando a la necesidad de aprender las materias en términos de sus contenidos didácticos.

Por su parte Ticknor (2012) reporta un estudio sobre aprendizaje situado en una clase de álgebra abstracta con el que pretende responder entre otras, a dos preguntas: ¿La comprensión matemática de conceptos como la conmutatividad, asociatividad e inversos desarrollados en el curso de álgebra abstracta impactan en los conocimientos matemáticos que ya tienen los estudiantes de profesorado? Y ¿cómo se ve influenciada la identidad matemática de los estudiantes de profesorado al involucrarse en las prácticas del curso de álgebra abstracta? A la primera pregunta responde que los estudiantes no logran por sí solos establecer vínculos entre los conocimientos matemáticos que están recibiendo en el curso de álgebra abstracta y los que ya tienen, siendo estos últimos los que van a poner en juego en sus clases de matemática. En lo que se refiere a la segunda pregunta, reporta que el mayor impacto en las identidades de los futuros profesores percibido por los estudiantes, fue que se sintieron influenciados por el estilo de enseñanza del profesor del curso de álgebra abstracta. Concluye entonces que es necesario que los formadores de profesores tengan como meta intencional y que la expliciten, la de vincular los conceptos acerca de sistemas numéricos y sus estructuras –discutidos en la clase de álgebra abstracta- con el álgebra que habrán de enseñar a nivel de secundaria.

Esto se alinea con las recomendaciones del CUMP (*Committee on the Undergraduate Mathematics Program*) (2004, referido en Ticknor, 2012) de que los profesores en formación deberían aprender a hacer conexiones apropiadas entre las matemáticas avanzadas que están aprendiendo y las que estarán enseñando a nivel secundario.

En relación a esta concepción García y Blanco (2002, referido en Olave, 2013), señalan que:

> […] entre los conocimientos del Formador de Profesores de Matemática (FPM) se debe encontrar, además de los contenidos matemáticos a trabajar con los Estudiantes de Profesorado de Matemática (EPM), el conocimiento de los procesos de transformación de dichos contenidos con el objetivo de enseñar a EPM. Para ello debe saber diseñar

> actividades para desarrollar en los EPM procesos de generación de conocimiento útil para el desarrollo de su futura profesión. (p. 193)

Particularmente, cuando Olave (2013) hace referencia a la formación académica del Formador de Profesores de Matemática (FPM) sostiene que:

> El FPM debe conocer a fondo la disciplina a enseñar pero también debe saber adecuarlo para re-aprenderlo y adecuarlo a los estudiantes de forma tal que estos puedan decidir qué es esencial y qué es periférico. Esto último depende de la comprensión del FPM y de la forma que comunica los conocimientos en clase. El FPM debe ser consciente que también comunica, conscientemente o no, ideas acerca de las formas de obtener el conocimiento matemático, además de una serie de actitudes y valores que influyen notablemente en la comprensión de sus alumnos. Es decir, que el FPM debe ser consciente de que transmite valores y modelos docentes que afectarán a los EPM en la forma de comprender qué es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje (p. 54).

Con el objetivo de involucrar a profesores de matemática en un estudio inicial de sus prácticas y de fomentar el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido de esos profesores, Arbaugh y Brown (2005) reportan una experiencia de desarrollo profesional realizada durante ocho meses con siete profesores de matemática de enseñanza media. Diseñaron una intervención didáctica utilizando una estrategia que denominaron "no intimidante"[1] (en el sentido de ser relativamente segura para los docentes desde el punto de vista emocional) para que los profesores aprendieran acerca de los Niveles de Demanda Cognitiva[2] y emplearan esos criterios para examinar críticamente las tareas matemáticas que usan para su enseñanza y para pensar en las decisiones que toman en su elección. El estudio muestra que no solo se logró un crecimiento en el conocimiento didáctico del contenido de los profesores, sino también un cambio en las prácticas, específicamente en la elección de las tareas. Y concluyen: "Este estudio contribuye además a la comunidad de educación matemática proporcionando un instrumento para medir cambios en el conocimiento didáctico del contenido" (Arbaugh y Brown 2005, p. 578).

---

[1] *Non-threatening strategy* (Arbaugh y Brown, 2005, p. 499)

[2] *Levels of Cognitive Demand* (término desarrollado en el QUASAR *Project*).

2.3 Formulación de objetivos

En el marco de la intervención didáctica expuesta en el capítulo 1 y a la luz de la revisión temática realizada en las secciones anteriores de este capítulo proponemos los siguientes objetivos:

Objetivo general

- Ofrecer a los formadores de profesores una experiencia de desarrollo profesional.

Objetivos específicos

- Promover metodologías de enseñanza acordes a las recomendadas para la formación docente.
- Generar ambientes de producción de ideas matemáticas en las aulas de formación docente.
- Establecer conexiones explícitas con la matemática que los estudiantes, futuros profesores, habrán de enseñar.

Capítulo 3: Consideraciones teóricas

Para elaborar el diseño de la intervención didáctica que proponemos, consideramos los aspectos teóricos aportados por Shulman (2005) que refieren a la base de conocimientos para la docencia, en particular a uno de ellos: el *conocimiento didáctico del contenido*; a su concepción de la enseñanza y a su modelo de *acción y razonamiento pedagógico.* Además nos centramos en la importancia de las *tareas* considerando los aportes de Zaslavsky y Sullivan (2011) y de Zaslavsky (1995, 2005, 2008).

3.1 La base de conocimientos para la enseñanza

Shulman (2005) plantea la necesidad de reorientar el concepto de enseñanza, así como también la formación y evaluación de los profesores, estableciendo para ello los requerimientos mínimos para el conocimiento de un profesor que denomina *base de conocimientos para la enseñanza*. Estos son:

- Conocimiento de la materia impartida, al que denomina *conocimiento del contenido.*
- Conocimientos pedagógicos generales, *conocimiento pedagógico general*, es decir los principios y estrategias generales en cuanto al manejo y organización de la clase.
- Conocimiento del currículo, en especial los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio del docente" (p. 11).
- Conocimiento pedagógico de la materia, al que denomina *conocimiento didáctico del contenido*: "[…] esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional" (p. 11).
- Conocimiento de los estudiantes y de sus características.
- Conocimiento de los contextos educacionales.
- Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

De todas estas categorías, la que comporta mayor interés para este trabajo es la del *conocimiento didáctico del contenido* porque según Shulman (2005): "identifica los bagajes distintivos de conocimientos para la enseñanza" (p. 11). Esto es, la articulación entre los contenidos de la asignatura y la didáctica que permite llegar a comprender cómo se organizan determinados temas y problemas, cómo se representan, cómo se adaptan a los intereses y capacidades de los alumnos; es decir, qué decisiones se toman para su enseñanza. En palabras de Shulman (2005): “El conocimiento pedagógico de la materia es la categoría que con mayor probabilidad permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo” (p. 11).

Además, este autor expone su concepción de enseñanza recurriendo al marco de análisis que proporciona Fenstermacher (1978, 1986):

> El objetivo de la formación docente, sostiene, no es adoctrinar o capacitar a los profesores para que actúen de maneras prescritas, sino educarlos para que razonen bien sobre lo que enseñan y desempeñen su labor con idoneidad. Para razonar bien se requiere tanto un proceso de reflexión sobre lo que se está haciendo como una adecuada base de datos, principios y experiencias a partir de los cuales se pueda razonar. Los maestros tienen que aprender a usar su base de conocimientos para fundamentar sus decisiones e iniciativas. En consecuencia, la formación docente debe trabajar con las convicciones que orientan las acciones de los profesores, con los principios y las evidencias que subyacen en las alternativas que escogen. (Shulman, 2005, p. 17)

Esto pone en evidencia una vez más la especificidad del trabajo del docente formador de profesores, que no sólo debe dominar su asignatura (en el sentido estricto de los contenidos matemáticos que enseña en sus clases) sino también identificar los conocimientos a enseñar, comprender cómo se organizan, qué problemas tienen asociados y tomar decisiones respecto a cómo adaptarlos para ser enseñados. En ese sentido Shulman (2005, p. 21) sostiene:

> La clave para distinguir el conocimiento base para la enseñanza está en la intersección de la materia y la didáctica, en la capacidad de un docente para transformar su conocimiento de la materia en formas que sean didácticamente impactantes y aun así adaptables a la variedad que presentan sus alumnos en cuanto a habilidades y bagajes.

Además, consciente de que sus estudiantes serán futuros profesores, deberá atender aspectos metodológicos específicos para esta formación. Se podría esperar que el formador realizara conexiones explícitas entre las temáticas que se están tratando en su curso y las que los estudiantes habrán de enseñar en sus futuras aulas (Ticknor, 2012) y que sea consciente del impacto que tiene en sus estudiantes el estilo que le imparte a sus clases no solo en lo que se refiere a las actitudes y valores que transmite sino en cuanto a la metodología que emplea (Olave, 2013).

3.2 El modelo de acción y razonamiento pedagógico

Shulman (2005) hace "hincapié en la docencia como un acto de comprensión y razonamiento, de transformación y reflexión" (p. 17) y desarrolla un modelo de *acción y razonamiento pedagógico* que abarca las siguientes actividades: *comprensión, transformación, enseñanza o instrucción, evaluación, reflexión y nuevas maneras de comprender*. Cada una de estas actividades es descrita exhaustivamente y el autor sostiene que se dan cada vez que un docente se enfrenta "a un material didáctico concreto, a un conjunto de objetivos educativos y/o a una serie de ideas en particular" (Shulman, 2005, p. 19).

En particular, sostiene que una vez que el docente comprende las ideas que tiene que enseñar, estas deben transformarse para ser comprendidas por los estudiantes. Esta actividad de *transformación* se compone de otros procesos que están interrelacionados y Shulman (2005, p. 21) los describe de la siguiente manera:

> *Preparación*: interpretación y análisis crítico de textos, estructuración y segmentación, creación de un repertorio curricular y clarificación de los objetivos.
>
> *Representación*: uso a partir de un repertorio de representaciones que incluye analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones, explicaciones, etc.
>
> *Selección*: escoger a partir de un repertorio pedagógico que incluye modalidades de enseñanza, organización, manejo y ordenamiento.
>
> *Adaptación* y ajuste a las características de los alumnos: considerar los conceptos, preconceptos, conceptos erróneos y dificultades, idioma, cultura y motivaciones, clase social, género, edad, capacidad, aptitud, intereses, conceptos de sí mismo y atención.

Y Shulman (2005, p. 23) concluye: "Todos estos procesos redundan en un plan, o un conjunto de estrategias, para presentar una lección, una unidad o un curso." Ese plan que será ejecutado, se traduce en una actividad denominada *enseñanza* que incluye aspectos vinculados con la organización y manejo de la clase, evidenciándose entre otros aspectos, el tipo de interacciones que se dan entre docente y alumno, y entre los alumnos frente a la propuesta del profesor. Durante la actividad de enseñanza se da un proceso de *evaluación* que comprende no sólo la atención inmediata a lo que ocurre en la clase sino también "el sistema más formal de examen y evaluación que los profesores aplican para proporcionar retroinformación y calificar" (Shulman, 2005, p. 25). Una vez que culminan los actos de enseñanza y evaluación el docente se involucra en las actividades de *reflexión* y de *nueva comprensión*: "[…] el profesor analiza, en forma retrospectiva, el proceso de enseñanza y aprendizaje que ha tenido lugar, y reconstruye, vuelve a escenificar y/o experimentar los sucesos, las emociones y los logros" (Shulman, 2005, p. 25), para dar lugar a una nueva comprensión de lo que ha ocurrido que implica que el docente aprenda de su propia experiencia.

Nos interesa además referirnos a los materiales y el entorno del proceso educativo institucionalizado pues supone, para nuestra propuesta, que un formador de profesores debería conocer, tal como lo reporta Olave (2013):

> […] el "territorio" en el que desempeña su actividad: los currículos, los libros de texto, la organización escolar y la estructura de la profesión docente. Estos constituyen las herramientas del oficio y las circunstancias contextuales que facilitarán o inhibirán las iniciativas de enseñanza. (p. 54)

En este sentido y al mismo nivel que los libros de texto que emplea y recomienda, están los tipos de tareas que el formador de profesores propone a sus estudiantes. Es por esta razón que, como desarrollaremos a continuación, nos situaremos en el estudio de *las tareas*.

3.3 La importancia de las tareas en el desarrollo profesional del docente

Algunas de las preguntas que motivaron nuestro trabajo son: A través del diseño, la implementación y el análisis de las tareas que los profesores proponen a sus estudiantes, ¿es posible mejorar el conocimiento didáctico del contenido del profesor formador de profesores? ¿Es posible que ello genere cambios en sus prácticas de enseñanza que se orienten a desarrollar metodologías más acordes a lo que demanda la formación de profesores de matemática hoy en día? ¿Hay actividades que por su diseño específico contribuyen a aprendizajes más ricos de los contenidos?

Es así que consideramos los aportes de Zaslavsky y Sullivan (2011) que establecen un marco conceptual para examinar y desarrollar tareas para la formación del profesorado de matemática, de Zaslavsky (2008) sobre los desafíos de diseñar e implementar tareas y de Zaslavsky (1995) referido a la potencialidad de las *tareas de final abierto* para el desarrollo profesional de los profesores de matemática.

3.3.1 El diseño de tareas para la formación de profesores

En relación a algunos de los desafíos que involucra la formación de profesores Zaslavsky y Sullivan (2011) plantean que:

> Uno de los objetivos de la formación de profesores es ayudar a futuros docentes y docentes en práctica a evolucionar desde perspectivas novicias posiblemente acríticas acerca de lo que es la enseñanza y el aprendizaje hasta convertirse en profesionales competentes, expertos, adaptables, con espíritu crítico, perspicaces, inventivos, reflexivos, preparados para enfrentar los desafíos que demanda la enseñanza de la matemática a nivel secundario. (p. 1)

Esta no es una meta sencilla para los formadores de profesores que son responsables de facilitar las oportunidades de aprendizaje necesarias para lograrla. Zaslavsky (2008) sostiene que una de las formas de lograrlo, tal vez la que más consenso tiene entre los formadores de profesores de matemática, es el involucramiento en *tareas.* Tanto es así que Kilpatrick, Swafford y Findell (2001, p. 9, referido en Zaslavsky, 2005, p. 298) afirman que:

> La calidad de la enseñanza depende, por ejemplo, de que los profesores seleccionen tareas demandantes desde el punto de vista cognitivo, que planifiquen las clases elaborando la matemática que los estudiantes van a aprender a través de esas tareas, y que destinen el tiempo suficiente para que los estudiantes se involucren y dediquen tiempo a la tarea.

El nivel de demanda cognitiva de una tarea ha sido profundamente estudiado e incorporado por ejemplo a las recomendaciones del NCTM (2015) donde se establece, siguiendo a Smith y Stein (1998, referido en NCTM, 2015, p. 20), que las tareas que implican exigencias de alto nivel cognitivo hacen que la atención de los estudiantes se enfoque en los procedimientos, desarrollando niveles más profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas que subyacen en esos procedimientos; que se utilicen múltiples formas de representación realizando conexiones entre ellas que ayudan a desarrollar el significado; que se exploren diferentes caminos pues la tarea no sugiere uno en forma explícita, predecible o trivial. Además requieren que el alumno se autorregule en esos procesos (que no son algorítmicos, ni mecanizados, ni irreflexivos), que vaya verificando los resultados que obtiene y que analice las restricciones de la tarea que pudieran limitar las posibles estrategias de resolución y las soluciones de la misma.

Cuando Zaslavsky y Sullivan (2011) hablan de *tareas* se refieren a problemas o actividades que los formadores de profesores proponen a futuros docentes, para que se involucren en forma activa, colaborativa y con amplitud de criterio. Sostienen además, que estas deben estar orientadas hacia la práctica futura de los profesores en formación.

Entienden que es a través y en torno a tareas, que los profesores y los alumnos se comunican y aprenden ideas matemáticas. Por ese motivo las tareas usadas por los profesores se transforman en verdaderas herramientas de mediación.

Estos autores desarrollaron además un marco conceptual para examinar y desarrollar tareas que abarca ocho temáticas unificadas en torno a tareas que se usan en la formación de profesores de matemática. Las ocho temáticas son:

1. Desarrollar adaptabilidad;
2. Fomentar la conciencia acerca de similitudes y diferencias;
3. Afrontar conflictos y dilemas;
4. Diseñar y resolver problemas para su uso en la clase de matemática;
5. Aprender del estudio de la práctica;
6. Seleccionar y usar herramientas y recursos apropiados para la enseñanza;
7. Identificar y superar barreras en el aprendizaje de los estudiantes; y
8. Compartir y revelar disposiciones y creencias propias, de los pares y de los estudiantes respecto a lo que es “la matemática” y lo que es “hacer matemática”. (p. 2)

Estas temáticas reflejan varias de las metas que tiene la formación de profesores en cuanto a habilidades a desarrollar por parte de los futuros profesores y que los autores consideran que constituyen aspectos del conocimiento requerido para enseñar matemática a nivel secundario. Si bien se habla de “conocimiento” y no de “conocimiento didáctico” en el sentido de Shulman (2005), y se hace referencia al conocimiento del futuro profesor de enseñanza media; sostenemos que, apuntar al desarrollo y fortalecimiento de estas temáticas en los estudiantes por parte del formador de profesores, se podría traducir en un mejoramiento de su conocimiento didáctico del contenido.

En particular, cuando los autores exponen la temática que se refiere al diseño y resolución de problemas para su uso en la clase de matemática, está implícito el rol de diseñador de tareas como uno de los tantos que el formador de profesores debe cumplir.

Este rol comporta grandes desafíos ya que, como expresa Zaslavsky (2008), las fuentes de las que dispone el formador de profesores para la elaboración de tareas no es tan vasta como la que tienen los profesores y futuros profesores de matemática a nivel medio. Por contrapartida menciona la libertad y flexibilidad que tiene el formador para elaborar las tareas que presentará a sus estudiantes.

Por otra parte Zaslavsky y Sullivan (2011) sostienen que, al igual que lo que sucede con los estudiantes de profesorado, el aprendizaje de los formadores ocurre en gran parte a través del involucramiento en tareas efectivas, junto con la reflexión sobre la experiencia de trabajar con las mismas. Esto requiere de un largo proceso iterativo sostenido en el tiempo (en el sentido de ser propuestas una y otra vez, en diferentes grupos, momentos, etc.) que involucra el diseño, evaluación y redefinición de tareas para la formación del profesorado de matemática. Es así que Zaslavsky (2008) sentencia: "… las tareas evolucionan y son el resultado de años de reflexión sobre la práctica por parte de los formadores de profesores de matemática." (p. 112).

3.3.2 El diseño de tareas de final abierto

Cuando Zaslavsky y Sullivan (2011) describen la temática relacionada con el diseño y resolución de problemas, hacen referencia a diferentes tipos de problemas que sería deseable que los formadores propongan a sus estudiantes. Entre ellos mencionan aquellas tareas que tengan múltiples soluciones y/o múltiples caminos o formas de resolución.

El tipo de tareas que propone Zaslavsky (1995) y que apuntan a generar situaciones que involucran poderosos procesos de aprendizaje y la posterior reflexión de lo que ha ocurrido en ese proceso son las denominadas *tareas de final abierto.*

Las tareas de final abierto, en oposición a las tareas estándar o cerradas, son aquellas que, aún basadas en contenidos familiares del currículo, admiten múltiples respuestas correctas. Una tarea estándar (con una sola respuesta correcta) se puede transformar en una de final abierto realizándole pequeñas modificaciones a su consigna. Estas modificaciones pueden ser omitir un dato, re-redactar la consigna, etc. Zaslavsky (1995, p. 15) aporta el siguiente ejemplo:

Tarea estándar	*Tarea modificada*
¿Cuántos puntos de intersección tiene la parábola $y = x^2 + 4x + 5$ con la recta $y = 2x + 5$?	Encuentre la ecuación de una recta que tenga dos puntos de intersección con la parábola $y = x^2 + 4x + 5$.

Tal como lo reporta la autora, "el análisis de la tarea se focalizó en la riqueza que generó un pequeño cambio en una tarea estándar" (p. 18). Refiriéndose entonces a que pequeños cambios generan grandes diferencias, es decir, con leves modificaciones en la redacción de la tarea estándar se producen diferencias en varios planos tanto para los estudiantes como para los docentes.

En lo que tiene que ver con la tarea en sí, el hecho de que tenga múltiples respuestas permite que todos los estudiantes puedan dar (al menos) una respuesta (correcta) trabajando a su manera y a su nivel, lo que asegura que cada estudiante pueda tener algún éxito; hace que los estudiantes comparen estas respuestas entre sí y con las de otros compañeros, verifiquen su validez y busquen relaciones entre ellas, pudiendo incluso llegar a generalizaciones. Además permite realizar vinculaciones con otras temáticas del curso o con las de otros cursos. En cuanto a lo actitudinal, este tipo de tareas resultan estimulantes y desafiantes y aportan a crear un ambiente de mutua colaboración y gran involucramiento, rescatando la creatividad, la profundidad y la persistencia en el trabajo de los alumnos. También permiten ver a la actividad matemática como una actividad humana en tanto dependiente de quien la produce, fomentando habilidades tales como explorar, crear, problematizar, comunicar, generalizar y llegar a entender procedimientos. En cuanto a lo cognitivo, ayudan a mejorar el discurso matemático y a lograr elaborar argumentos convincentes.

A los docentes los obliga a revisar sus propios conocimientos y los invita a tener confianza en que se puede enseñar de otra manera, desafiándolos didácticamente al tener que diseñar, planificar e implementar este tipo de tareas.

Capítulo 4: Metodología y Método

Atendiendo a la distinción que Ochoviet y Oktaç (2010) realizan entre *metodología* y *método*, entendiendo al primero como el "estudio del método" (p. 1) o "la reflexión crítica sobre la elección del método" (p. 2) y al segundo como "la descripción de los pasos y procedimientos a seguir con el fin de alcanzar los objetivos" (p. 2); es que en este capítulo presentaremos una fundamentación para el diseño metodológico de nuestra intervención didáctica y dedicaremos la siguiente sección a la presentación del Método.

4.1 Metodología

En primer lugar debemos señalar que buena parte de nuestro proyecto de intervención se basa en el diseño de tareas para la formación de futuros profesores en el sentido que fue presentado en el capítulo correspondiente al Marco Teórico. Entonces mencionamos que mientras un profesor tiene acceso a gran cantidad y variedad de libros de texto, guías para docentes y otros materiales que puede usar para elaborar tareas, el formador de profesores se enfrenta a una relativa escasez de fuentes para el diseño de tareas. Al respecto, Zaslavsky (2008) señala:

> Las principales fuentes que son específicas para el formador de profesores (esto es, además de los recursos disponibles para profesores) son las revistas y libros profesionales, trabajos de investigación y otros reportes de profesionales y experiencias personales, todas relacionadas bastante indirectamente con las tareas para la formación de profesores. (p. 100)

Por su parte, Ochoviet y Oktaç (2010) observan la dificultad que existe para integrar los resultados de la investigación a la práctica y plantean una alternativa a esta situación proponiendo un diseño metodológico para integrar la investigación con la enseñanza:

> La orientación actual de buena parte de la investigación en educación matemática no ha resuelto totalmente cómo conectar los resultados de investigación con acciones concretas que permitan mejorar la práctica educativa. Las implicaciones didácticas de los *papers*, muchas veces quedan en eso, en implicaciones que no logran concretarse en la práctica, ya sea porque los docentes no tienen acceso a ellas, porque se hace difícil la transferencia a la práctica o porque los investigadores no se abocan a la producción de material didáctico, entre otros asuntos. Una alternativa posible consiste en

> complementar los resultados de la investigación actual con el diseño de unidades de enseñanza y la investigación acerca de su implementación en clase. (p. 1)

Además, las autoras proponen una metodología a utilizar, que denominan *metodología interactiva* que en el marco de un modelo de investigación colaborativa, supone una forma de trabajo en la que un investigador-docente trabaja junto a otros docentes de forma coordinada para alcanzar los objetivos de investigación determinados por el investigador.

> La metodología de trabajo propuesta tiene en cuenta los escenarios en los que se producen los aprendizajes, con el objetivo de que el saber producido de la investigación sea un saber ajustado a la práctica y no un saber elaborado desde la teoría de quien investiga. (Ochoviet y Oktaç, 2010, p. 3)

Si bien nuestra propuesta no corresponde a una investigación, la metodología de trabajo que sugieren fue tenida en cuenta en el diseño de nuestra intervención en tanto lo que se pretende es, justamente, integrar resultados provenientes de la investigación, a la práctica. Específicamente, al diseño de tareas para la enseñanza.

En referencia a los desafíos de integrar la investigación con la práctica, Czarnocha y Prabhu (2005) sostienen que esta integración puede darse bajo dos formas complementarias: desde la enseñanza hacia la investigación a través del desarrollo de metodologías de Enseñanza-Investigación[3] llevadas a cabo en las clases de profesores-investigadores o desde la investigación hacia la enseñanza a través de la "importación de un laboratorio de enseñanza a las clases de aquellos docentes que, en colaboración con los investigadores, participan en experimentos diseñados." (pp. 78-79).

En relación a estos últimos, Lesh y Kelly (s/f) explicitan algunas características distintivas que deben tener los experimentos diseñados[4] en ciencias y, en particular los experimentos diseñados en educación:

> […] (i) los docentes expresan repetidamente sus formas de pensar a través de complejas herramientas conceptuales que ellos mismos han diseñado, testeado (o puesto a prueba) y revisado repetidas veces con el objetivo de cubrir una necesidad específica de enseñanza, y (ii) las herramientas se han diseñado para ser compartidas (con otros) y re-usadas (en una variedad de situaciones). (p. 11)

[3] *Teaching-Research methodologies* (p.78)

[4] *Design experiment* (p. 1)

Por su parte, Arbaugh y Brown (2005) sostienen que existen varios medios efectivos que son recomendados para lograr un mejoramiento de las prácticas de enseñanza: examinar el trabajo de los alumnos, analizar videos u otros registros de las propias clases y consideran que la formación continua o el desarrollo profesional proporcionan un medio para comprender cómo y por qué aprenden los profesores o, mejor dicho, cómo re-aprenden, utilizando el término acuñado por Ball (1988, referido en Arbaugh y Brown, 2005, p. 500), para enseñar matemática: "El desarrollo profesional puede ser descrito como una experiencia que promueve el cambio docente – en las creencias, en el conocimiento y/o en la práctica" (p. 501). En ese marco de desarrollo profesional estos autores realizaron un estudio para investigar cómo, el aprender a examinar críticamente las tareas que proponen los profesores a sus alumnos, influye en lo que los profesores piensan acerca de las tareas matemáticas además de tener un efecto en la elección que hacen de las mismas para su uso en clase. Es decir, lograron diseñar una experiencia de desarrollo profesional que permitió a los profesores construir conocimiento didáctico del contenido y como consecuencia generó un cambio en sus prácticas de enseñanza. Fundamentaron su propuesta, siguiendo las ideas que exponen Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000, p. xii, referido en Arbaugh y Brown, 2005, p. 504):

> Adquirir la capacidad de pensar con precisión acerca de las tareas matemáticas y su uso en clase puede proveer a los profesores de habilidades más desarrolladas de las formas en que ellos seleccionan, modifican y presentan las tareas matemáticas a sus estudiantes.

Como ya reportamos en la sección 2.2, Arbaugh y Brown (2005) lograron involucrar a siete profesores de educación media para aprender acerca de los Niveles de Demanda Cognitiva[5] que son una serie de criterios que pueden ser usados para examinar críticamente las tareas matemáticas. Crearon un grupo de estudio, en el que uno de sus miembros era además una de las investigadoras y tenía el doble rol de participante y facilitador. Se plantearon como objetivos: 1) aprender y entender los criterios de los Niveles de Demanda Cognitiva; 2) clasificar tareas (propias y aportadas por las investigadoras); y 3) buscar tareas que encajaran en determinados criterios.

Además los autores manifiestan que, tradicionalmente, las clases son lugares de gran autonomía donde los docentes hacen su trabajo "a puertas cerradas" y no hay una

---

[5] *Levels of Cognitive Demand* (término desarrollado en el QUASAR *Project*).

cultura ni de análisis de clases ni de trabajo coordinado y colaborativo entre docentes y mucho menos una cultura de "mirar clases", de modo que cualquier propuesta en ese sentido podría resultar intimidante. También es sabido que las visitas de autoridades como directores o inspectores son visitas de carácter administrativo y/o evaluativo y no tienen el objetivo de ayudar a los docentes a repensar y mejorar sus prácticas. Teniendo esto presente, como metodología de trabajo, llevaron adelante una intervención que calificaron de estrategia no intimidante[6] en el sentido de ser relativamente segura para los docentes desde el punto de vista emocional, donde los autores se propusieron ayudar a los docentes a aprender a analizar críticamente el tipo de tareas que usan para su enseñanza, es decir examinar lo que hacen habitualmente de una forma que nunca lo habían hecho antes. En suma, los autores diseñaron una estrategia para involucrar a un grupo de profesores de matemática en una revisión de su enseñanza en una forma que ellos consideraron segura para los docentes desde el punto de vista emocional y que a la vez resultó eficaz para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido del profesor tal como lo reportaron en sus conclusiones.

Tomando todas estas ideas es que nos propusimos como metodología de trabajo realizar una intervención didáctica que se puede calificar de no intimidante en el sentido de Arbaugh y Brown (2005). Diseñaremos así un proceso de trabajo conjunto con los formadores (profesores de asignaturas específicas del profesorado de matemática), que supone la integración de resultados de investigación a la práctica, en una modalidad de trabajo colaborativo que se enmarcaría en la segunda forma que proponen Czarnocha y Prabhu (2005), pudiendo identificar en él las características de un experimento diseñado en el sentido de Lesh y Kelly (s/f) y que contempla las consideraciones señaladas por Ochoviet y Oktaç (2010) tanto para el diseño como para la implementación de la intervención.

Por otro lado, como ya mencionamos en la sección dedicada al marco teórico, Shulman (2005), con base en su concepción de la enseñanza, desarrolla un modelo de *acción y razonamiento pedagógico* que comprende las siguientes actividades: *comprensión, transformación, enseñanza o instrucción, evaluación, reflexión y nuevas maneras de comprender.* La concepción de enseñanza que aporta Shulman (2005) y su modelo de acción y razonamiento pedagógico constituirán una base para el diseño y análisis de nuestra propuesta, ya que un proyecto de intervención didáctica se concibe,

[6] *Non-threatening strategy* (Arbaugh y Brown, 2005, p. 499)

en nuestro caso, como un proceso de acción llevado a cabo luego de una profunda reflexión conjunta entre el docente investigador y los docentes que participen de la experiencia, a partir del convencimiento de que es necesario que las prácticas en las aulas de formación de profesores estén más acordes a la concepción de enseñanza de la matemática que se quiere propiciar. Además, durante y luego de una intervención, se dan procesos de reflexión que involucran el análisis crítico de nuestro desempeño como docentes y se generan nuevas formas de comprender lo que sucede en el aula.

Es posible establecer vinculaciones entre el modelo de intervención que presentamos, el modelo de acción y razonamiento pedagógico de Shulman (2005) y las fases del ciclo de investigación acción. En efecto, en el capítulo 1 presentamos un modelo de intervención didáctica y mencionamos que las etapas 3, 4 y 5 podrían dar lugar a las fases que constituyen los elementos indispensables del ciclo de investigación acción (IA): *planificación, acción, observación y reflexión.* Estas etapas y fases se vincularían además con las actividades del modelo de acción y razonamiento pedagógico de Shulman (2005): la etapa 3 de nuestro modelo prevé el diseño y análisis de actividades para implementar en el aula, esto se corresponde con la fase de *planificación* del ciclo de IA y con las actividades de *comprensión y transformación* del modelo de acción y razonamiento pedagógico ; la etapa 4 de nuestro modelo, que es la implementación de las tareas en el aula y la observación de lo que allí ocurre, se corresponde con las fases de *acción* y de *observación* del ciclo de IA y con las actividades de *enseñanza* y *evaluación* del modelo de acción y razonamiento pedagógico; finalmente la etapa 5 de nuestro modelo, que implica el análisis crítico de lo que ha ocurrido en el aula, se corresponde con la fase de *reflexión* del ciclo de IA y comprende las actividades de *reflexión* y *nuevas formas de comprender* del modelo de acción y razonamiento pedagógico de Shulman (2005).

El diseño y la implementación de la intervención didáctica que proponemos se presentarán en la siguiente sección dedicada al Método.

4.2 Método

De acuerdo a las consideraciones metodológicas expuestas en la sección anterior y al concepto de intervención didáctica en ME que presentamos en la Introducción de este trabajo, la intervención que proponemos consistirá en una propuesta de acción original y creativa, programada en el tiempo y desarrollada en forma colaborativa entre un investigador (en su rol docente) y un docente, desde una concepción teórica determinada, que busca contribuir o generar cambios en las prácticas docentes y está orientada a un objetivo.

Concretamente, nos proponemos trabajar conjuntamente con los formadores para revisar y reformular algunas de las tareas que proponen en sus cursos con el fin de convertirlas en tareas de final abierto en la concepción de Zaslavsky (1995) para luego llevarlas a sus clases y finalmente reflexionar sobre lo que implicó su implementación. Este proceso comprendería todas las actividades que Shulman (2005) desarrolla en su modelo de *acción y razonamiento pedagógico* pues supondría el acercamiento de los formadores a los planteos y concepciones de Zaslavsky (1995) (*comprensión*), el diseño de tareas y el análisis en conjunto de su potencialidad para el trabajo en el aula, centrándonos en el significado de la clase como ámbito para la producción de conocimientos y los vínculos con la matemática que los futuros docentes habrán de enseñar (*transformación*). Requeriría además acordar su implementación en el aula en lo que se refiere a los roles y formas de registro de lo que en ella acontezca (*enseñanza o instrucción*) y realizar un análisis a posteriori de la propuesta en relación a la potencialidad de las actividades y de la metodología de trabajo utilizada, y evaluar la posibilidad de continuar la propuesta y extenderla a otros contenidos del curso o a otros cursos (*evaluación, reflexión y nuevas maneras de comprender*).

El acompañamiento de los docentes que pensamos supone un proceso de trabajo colaborativo y de mutua confianza. Significa trabajar *con* el otro y no *para* el otro.
Entendemos que este trabajo será posible a partir de reuniones de trabajo periódicas, realización de seminarios internos, sesiones de discusión que involucren el análisis crítico de la propuesta y no la mera recepción pasiva por parte del formador de lo que se está planteando.

El modelo de intervención didáctica en ME que presentamos en la Introducción de este trabajo consta por lo menos de las siguientes etapas:

1. Presentación del proyecto por parte del docente investigador a docentes de las asignaturas implicadas a través de las salas docentes. Explicitación del plan de trabajo y ejemplificación de la propuesta. Reflexión sobre la pertinencia de una intervención didáctica en cursos de Matemática de formación docente a partir de resultados de la investigación en matemática educativa.

2. Acercamiento de los docentes encargados de cursos de matemática a resultados de investigaciones en matemática educativa que el docente investigador considere convenientes para el desarrollo de la intervención.
3. Realización de salas conjuntas entre docentes y docente investigador donde los primeros, a través de un trabajo creativo, produzcan actividades para proponer a sus estudiantes, acorde a lo trabajado en la sala previa. Análisis en forma conjunta de la adecuación de las actividades a proponer en base a los objetivos y contenidos del curso, e identificación del potencial a priori de las actividades.
4. Proposición de las actividades a los alumnos en el aula de clase por parte del docente del curso. El rol del investigador en esta instancia es de acompañamiento para facilitar el análisis crítico de la práctica.
5. Realización de una entrevista final entre investigador y cada docente de los cursos para un análisis a posteriori de la propuesta en relación a la potencialidad de las actividades y de la metodología de trabajo utilizada, y la posibilidad de continuidad de la propuesta y de extensión a otros contenidos del curso o a otros cursos.

Siguiendo el modelo presentado y teniendo en cuenta las actividades del modelo de acción y razonamiento pedagógico de Shulman (2005), el diseño de intervención didáctica que proponemos comprenderá diferentes instancias de trabajo que más adelante se describirán detalladamente:

- Convocatoria a docentes interesados en participar de la experiencia.
- Entrevistas a priori a docentes encargados de los cursos.
- Taller: "Las tareas de final abierto: su potencial en el aula"
- Implementación de la intervención didáctica.
- Entrevistas a posteriori a los docentes encargados de los cursos.
- Redacción de un informe con las reflexiones finales en relación al objetivo de trabajo.

4.2.1 Etapa 1: Convocatoria y entrevistas a priori

A través del Departamento de Matemática del instituto de formación docente se convocará a una sala docente a los docentes de las asignaturas específicas de primer y segundo año del profesorado de matemática. En la misma se reflexionará sobre la pertinencia de realizar una intervención didáctica en los cursos específicos de matemática y se les propondrá participar en una experiencia de desarrollo profesional, en una modalidad de trabajo colaborativo, que involucrará el acercamiento a resultados de investigaciones en matemática educativa que el docente investigador ha seleccionado y el acompañamiento de sus prácticas en la implementación de las tareas de final abierto como herramienta para potenciar el trabajo en el aula.

El docente investigador realizará entrevistas a los docentes a cargo de los cursos que han decidido participar de la experiencia con el objetivo de obtener información principalmente en torno a los materiales que utilizan en el curso y a la metodología de enseñanza que emplean en el aula.

1. Describa brevemente su formación académica.
2. ¿Cuántos años hace que dicta esta asignatura en el instituto y cómo accedió a este cargo?
3. ¿Qué materiales (libros de texto, manuales, prácticos, etc.) utiliza para este curso? ¿Cómo/de dónde los obtiene?
4. ¿Qué metodología de enseñanza prima en sus clases?
5. ¿Cómo elige las actividades, ejercicios, problemas que propone en sus clases a los estudiantes? ¿Utiliza algún criterio en particular?
6. ¿Utiliza prácticos? ¿Cómo selecciona las actividades que incluye? ¿Utiliza algún criterio en particular?
7. ¿Qué formas/instrumentos de evaluación emplea?

4.2.2 Etapa 2: El Taller[7]

El taller tendrá como objetivo acercar a los docentes a resultados de investigación que han sido seleccionados por el docente investigador y trabajar con ese marco teórico en el rediseño y análisis de una tarea.

Sesión 1

En esta sesión se realizará el estudio, análisis y discusión del artículo: Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 15-20.

Para ello el docente investigador (DI) preparará actividades para guiar la lectura y el análisis del artículo y tendrá como principal objetivo que los docentes responsables

[7] Una versión de este Taller se describe en el Capítulo 5.

de los cursos (DR) se familiaricen con las tareas de final abierto, su potencial en el aula y sus implicancias a nivel metodológico. Las siguientes preguntas se propondrán a manera de guía para la lectura crítica del artículo:

1. De acuerdo a lo que se plantea en el documento, ¿qué son las tareas de final abierto?
2. ¿De qué manera es posible modificar una tarea estándar o cerrada para convertirla en una de final abierto?
3. En el artículo se presenta una tarea modificada y posibles formas de resolverla. ¿Se le ocurre alguna otra?
4. De acuerdo a lo que se plantea en el documento, ¿qué implicancias tiene la puesta en práctica de este tipo de tareas?

Finalizado el taller, se propondrá a los docentes una actividad en la que se les presente una tarea estándar o cerrada extraída del material (prácticos) que usan en sus cursos para que realicen el ejercicio de transformarla en una tarea de final abierto y se les propondrán preguntas para el análisis de la tarea. Sus producciones se analizarán en la Sesión 2.

A modo de ejemplo presentamos la siguiente actividad[8]:

Considere la siguiente tarea del curso de Análisis I:

Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

i) Hallar los puntos $(a, f(a))$ del gráfico de f para los cuales la recta tangente a dicho gráfico es horizontal.

ii) Hallar los puntos $(a, f(a))$ del gráfico de f para los cuales la recta tangente a dicho gráfico es paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 1$.

Modifique la tarea para que resulte de final abierto.

Las siguientes preguntas se propondrán a manera de guía para el análisis de la tarea:

[8] El problema fue tomado de los prácticos de Análisis I disponibles en http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/

1. La tarea seleccionada es cerrada. ¿Por qué?
2. La tarea modificada resultó de final abierto. ¿Por qué?
3. Sitúese en el curso de Análisis 1 del profesorado de matemática. ¿Qué posibles abordajes y respuestas cree usted que darán los estudiantes?
4. Compare la resolución de la tarea abierta con la que demandaría la tarea original cerrada. ¿Qué aporta haberla convertido en una tarea de final abierto?
5. A través de esta tarea, ¿qué conexiones se podrían hacer con la matemática que los estudiantes (futuros docentes) habrán de enseñar en sus aulas de secundaria?
6. ¿Cómo se imagina la gestión de una clase en la que usted ponga en práctica esta tarea?

Sesión 2

En esta sesión se analizarán las propuestas que traen los DR, los posibles abordajes y respuestas para la tarea modificada, sus implicancias metodológicas y las conexiones con la matemática que los futuros docentes habrán de enseñar en sus aulas de secundaria. Se discutirá con los DR otros posibles abordajes y conexiones, entre ellos el propuesto por el DI para esta misma tarea y se comparará con las modificaciones y los abordajes que surgieron de los DR.

Siguiendo con el ejemplo se presentan a continuación posibles modificaciones a la tarea elegida.

(1)

1) Halle una función $f : R \to R$ polinómica de grado 3 de modo que la recta tangente a su gráfico en el punto $(1, f(1))$ sea paralela al eje O*x* (tangente horizontal).

2) Halle una función $f : R \to R$ polinómica de grado 3 de modo que la recta tangente a su gráfico en el punto $(1, f(1))$ sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 1$.

(2)

1) Halle una función $g : R \to R$ polinómica de modo que tenga tangente horizontal en los mismos puntos que f (la de la tarea estándar) pero que tenga una única raíz. (O que tenga más de tres raíces).

2) Halle una función $h : R \to R$ polinómica de modo que haya cuatro puntos de su gráfico donde la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 1$ y dos de ellos coincidan con los de f (la de la tarea estándar).

Si bien la primera posibilidad está analizada en profundidad en el Anexo 1, para esta tarea reformulada en particular pensamos algunas consideraciones que presentamos a continuación.

La tarea original, estándar o cerrada (presentada para modificar y analizar), demanda casi en exclusividad el trabajo con derivada y su interpretación como pendiente de la recta tangente al gráfico en uno de sus puntos. A lo sumo se presta para ser realizada en parejas de estudiantes y no demanda gran cantidad de tiempo, ni para su resolución ni para su corrección. Tampoco daría lugar a un debate durante la corrección ya que la respuesta correcta a cada parte es única.

Convertirla en una tarea de final abierto hace que se transite por varios contenidos temáticos, se presta para el trabajo grupal colaborativo y requiere de bastante más tiempo de ejecución para su resolución. La corrección implica un debate argumentativo sobre las diferentes respuestas correctas que aparezcan, obligando a los estudiantes a reflexionar acerca de la validez de las mismas y a compararlas entre sí y con las de los otros grupos.

En relación a los contenidos matemáticos, la tarea abierta (en las dos reformulaciones propuestas) involucra a una función polinómica, y no sólo toca aspectos referentes a la derivabilidad (en particular a la interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente al gráfico en un punto donde la función es derivable y a la función derivada de una función polinómica), sino que también involucra nociones referentes a los polinomios tales como división entera (y exacta), esquema de Ruffini, raíz de un polinomio y teorema de Descartes. Además el problema involucra conocimientos relativos a geometría analítica: ecuación de la recta y pendiente de la recta. Tanto los contenidos temáticos correspondientes al análisis como a los de álgebra y geometría habrán de ser enseñados a nivel de secundaria.

En relación a lo metodológico, los estudiantes tendrán la oportunidad de ver que es posible enseñar de otra manera (seguramente diferente a la que ellos han experimentado). Además esta metodología está de acuerdo con las sugerencias que realizan la NTCM (1991) y varias de las investigaciones en educación matemática que, como mencionamos con anterioridad, sugieren que los docentes formadores de profesores deberían experimentar en sus clases con abordajes y estrategias alternativas y reflexionar sobre asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; y además deberían proponer tareas matemáticas valiosas, presentando la matemática como una actividad humana, creando ambientes de aprendizaje que sostengan y alienten el razonamiento matemático, y la disposición y habilidad para hacer matemática.

Por otra parte, los estudiantes tendrán la oportunidad de trabajar con más libertad desarrollando un estilo propio, sin la presión de llegar a “la” respuesta correcta esperada por el docente que propuso la tarea. Deberán reflexionar sobre su trabajo y comparar sus producciones entre sí y con las de otros. Podrán revisar varios conocimientos matemáticos, ajustar su discurso matemático y deberán elaborar argumentos tendientes a justificar sus respuestas y a convencer a otros.

4.2.3 Etapa 3: El diseño de tareas

Para esta etapa el DI habrá realizado un relevamiento de las tareas (actividades y ejercicios) propuestas en los prácticos del curso de la asignatura específica con el fin de identificar tareas cerradas que puedan convertirse en tareas de final abierto. Seleccionará dos o tres y propondrá a los DR que elijan una de ella para modificarla y convertirla en una de final abierto. Además deberán analizar la tarea modificada en función de su potencial y sus posibles conexiones, de manera análoga a lo que se hizo en la Sesión 2 del taller.

En esta sesión el rol del DI será el de colaborador en el proceso de re-elaboración de la tarea. El diseño final de la tarea será el que se lleve al aula para experimentar su uso y estudiar luego las implicancias a nivel metodológico.

Las siguientes orientaciones se propondrán a manera de guía para el diseño de las tareas:

1. Elija una de las tareas seleccionadas y modifíquela para que resulte una tarea de final abierto.
2. Describa los posibles abordajes y respuestas que los estudiantes podrían dar a la misma.
3. Establezca posibles conexiones con la matemática que los estudiantes habrán de enseñar cuando sean profesores.

4.2.4 Etapa 4: La implementación

En esta etapa el DI y los DR procederán al diseño de la implementación de las tareas de final abierto en sus clases. Para ello será necesario definir roles, aspectos a registrar de lo que acontece en el aula, etc.

En esta etapa hay que tener en cuenta lo que establecen Ochoviet y Oktaç (2010):

> […] un docente no puede remitirse a un "libreto" ni a situaciones didácticas modélicas porque cada profesor tiene un estilo docente, un discurso que lo caracteriza, una manera de relacionarse con sus alumnos, una forma particular de trabajar y de elegir o diseñar las actividades para sus alumnos. (p. 8)

Además, como señalan estas autoras, el docente tiene que sentir libertad para implementar la tarea aportando su perspectiva y su experiencia.

Las siguientes orientaciones se propondrán a manera de guía para el diseño de la implementación:

1. Se acordará con el DR cómo se va a justificar la presencia del DI en el aula.
2. Se acordará con el DR la dinámica con la que se llevará a cabo la tarea y los materiales, recursos y herramientas que tendrán los estudiantes a su disposición.
3. El DR implementará la tarea elegida y el DI registrará la forma en que se desarrolle la enseñanza. Entre otros aspectos se observará: (a) la manera en que el DR presenta la tarea a sus alumnos; (b) la actitud de los estudiantes ante la propuesta; (c) la manera que el DR gestiona las inquietudes de los estudiantes; (d) la forma en la que el DR recoge y discute las respuestas y abordajes de los estudiantes.

4.2.5 Etapa 5: La reflexión

El DI realizará entrevistas a los DR a posteriori de la implementación de la tarea en el aula con el fin de analizar la potencialidad de las actividades realizadas y de la metodología de trabajo utilizada, y la posibilidad de continuar la propuesta y de extenderla a otros contenidos del curso o a otros cursos.

1. ¿Qué aspectos de la implementación de la tarea en el aula puede considerar como positivos? ¿Y negativos?
2. ¿Qué cree que le aportó a sus estudiantes el haber trabajado con este tipo de tareas? Y a usted, ¿qué le aportó?
3. ¿Cree que esta experiencia podría ser extendida a otros contenidos o a otros cursos?

Finalmente el docente investigador redactará un informe en el que describirá los aspectos más sobresalientes de la experiencia de realizar una intervención didáctica. Este informe podría contener los siguientes ítemes:

- Acerca del trabajo de los docentes con el marco teórico de referencia.
- Acerca del trabajo de los docentes en la modificación y análisis de las tareas.
- Acerca de la implementación en el aula de las tareas de final abierto diseñadas.
- Acerca de las reflexiones de los docentes en torno a la potencialidad de este tipo de tareas.

Capítulo 5: Análisis del taller realizado con docentes formadores de profesores

Dado el alcance de este trabajo, presentamos un avance del proyecto. Este refiere al desarrollo de una parte de la etapa 3 con algunos aspectos de las etapas 1 y 2. Una vez contactados los profesores, invitándolos a una instancia de taller, se pudo concretar la participación de tres docentes de la asignatura Fundamentos de la Matemática que es una de las asignaturas del 1er. año de la formación inicial de profesores. Teniendo en cuenta la especificidad de la asignatura que dictan los profesores participantes y siguiendo del diseño de nuestra intervención, las tareas elegidas para modificar son del material del curso disponible en la en la página web institucional (http://www.depdematematica.org/ipa/sitio).

5.1 Descripción del taller

El taller se desarrolló en torno a tres ejes:

1. Presentación por parte del docente investigador (DI) a los docentes participantes, responsables (DR) del curso de Fundamentos de la Matemática, del concepto de intervención didáctica en ME y de resultados de investigaciones en matemática educativa que considera convenientes para el desarrollo de la intervención, concretamente aquellos que tienen que ver con la importancia de las tareas en la clase de matemática. En particular se presentaron las *tareas de final abierto*: qué son, cómo se pueden diseñar y cuál es su potencialidad según Zaslavsky (1995).
2. Análisis de tareas (estándar o cerradas) que los docentes participantes proponen a los estudiantes en sus clases para luego realizar el ejercicio de modificarlas con el fin de transformarlas en tareas de final abierto. En el caso de este taller las tareas elegidas para intervenir son del curso de Fundamentos de la Matemática.
3. Análisis de las tareas modificadas en torno a qué aporta haberlas convertido en tareas de final abierto y a qué conexiones con la matemática que los estudiantes, futuros docentes, habrán de enseñar en sus aulas de secundaria.

A continuación presentaremos algunas de las reacciones de los docentes participantes en las diferentes etapas del taller.

5.2 Análisis de las respuestas de los profesores participantes del taller

En el taller participaron tres docentes que son Profesores de Matemática egresados del Instituto de Profesores "Artigas", todos tienen experiencia en la formación de profesores y/o maestros (dictando diferentes asignaturas) y todos cuentan con estudios de posgrado.

DR1 es la tercera vez que es docente de la asignatura Fundamentos de la Matemática. DR2 es la segunda vez que tiene a su cargo un grupo de la asignatura Fundamentos de la Matemática. DR3 es docente de la asignatura Fundamentos de la Matemática desde hace ocho años.

Presentaremos sus respuestas de acuerdo a los ítemes desarrollados, las analizaremos desde la perspectiva de nuestro Marco Teórico de referencia y elaboraremos un informe con las reflexiones acerca de la realización de esta experiencia.

5.2.1 Acerca del trabajo con el marco teórico de referencia

En la primera parte del taller el DI expuso a los docentes participantes (DR1, DR2, DR3) el concepto de intervención didáctica en ME y sus vinculaciones con la Investigación Acción, cuyo desarrollo es parte de este trabajo. Explicó la importancia de las tareas en las clases de matemática, en especial como "herramientas para el oficio del docente" desde la concepción de Shulman (2005, p. 11). Presentó las tareas de final abierto según Zaslavsky (1995). Proporcionó ejemplos, explicó cómo se pueden diseñar (por ejemplo, re-redactando las consignas u omitiendo datos) y analizó la potencialidad de su aplicación en el aula también desde la perspectiva de Zaslavsky (1995).

Los profesores escucharon con atención e interés la exposición del DI, realizando preguntas para ir familiarizándose con los conceptos y la terminología referida a las tareas de final abierto.

5.2.2 Acerca del trabajo de los docentes en la modificación y análisis de las tareas

En primer lugar se les propuso a los profesores la siguiente actividad[9]:

[9] El análisis de esta actividad se presenta en el Anexo 2.

Las siguientes son tareas estándar tomadas del material del curso de Fundamentos de la Matemática:

1. Se considera $P \in R[X]$. Halla *a* y *b* y resuelve $\overline{P}(x) = 0$ sabiendo que $P = X^3 + aX^2 + 7X + b$ es divisible entre $L = X^2 - 5X + 6$.
2. Se considera $f : C \to C, f(z) = az + b$ con *a* y *b* números complejos. Halla *a* y *b* sabiendo que $f(1+i) = i - 5$ y que $-2i - 2$ es un punto unido en *f*.

a. ¿Qué tipo de trabajo demanda de los alumnos cada una de las tareas?
b. ¿Es posible modificar alguna de ellas para transformarla en una tarea de final abierto en el sentido propuesto por Zaslavsky (1995)?

Con respecto a la primera pregunta se presentó la dificultad de distinguir entre “trabajo” y “tarea”, por lo que el DI intervino para aclarar que la *tarea* es la consigna, lo que se les propone a los estudiantes y que el *trabajo* que demanda la tarea, es lo que tienen que hacer los estudiantes para resolverla, el trabajo matemático que demanda a los estudiantes. Para el trabajo a futuro, tal vez sea necesario modificar la primera pregunta y plantearla así: Analicemos qué harían los alumnos para resolver esta tarea, ¿qué conocimientos matemáticos deberían poner en juego?

Para la primera tarea los DR plantearon las siguientes modificaciones:

- DR1 propuso poner una *c* en lugar del coeficiente 7, mantener el *L* y pedir que escriban la descomposición factorial de *P*. De esta forma, con un coeficiente indeterminado más, habrá infinitas soluciones.
- DR3 propuso re-redactar la consigna de esta forma: *Presenten un polinomio P de grado 3 que sea divisible entre* $L = X^2 - 5X + 6$ *y escriban la descomposición factorial de P.*
- DR2 propuso modificar el polinomio *L*. Esto se planteó de la siguiente manera: *¿Qué pasa si en lugar de L les hubiéramos dado uno que no tuviera raíces? Podríamos preguntar cómo cambiaría el problema haciendo variar el divisor*. Pero no se llegó a analizar.

Para la segunda tarea se plantearon las siguientes modificaciones:

- DR3 propuso pedir hallar *a* y *b* en una función lineal pero sacando un dato (el del punto unido).

- DR3 propuso también pedir una función cuadrática en lugar de una lineal manteniendo los mismos datos.
- DR1 propuso pedir una función $f: C \rightarrow C$ tal que $f(1+i) = i - 5$ (sin decir que sea lineal).

Si bien pudieron modificar las tareas estándar para convertirlas en una de final abierto, uno de los profesores manifestó:

DR1: Me está costando modificar esto pensando en los mismos conceptos y estrategias que se usaron en la cerrada.

Con esto vemos por un lado la dificultad que comporta modificar una tarea estándar para convertirla en una de final abierto y por otro vemos que los profesores se preocuparon por pensar en una modificación que mantuviera los conceptos y estrategias requeridos para resolver la tarea inicial, cuando en realidad una de las riquezas de las tareas de final abierto es poder observar una variedad de estrategias de resolución por parte de los estudiantes (no solo las que el docente pudiera anticipar).

Luego a los profesores se les planteó lo siguiente:

DI: Modificaron una tarea para transformarla en otra de final abierto, ¿podrían esbozar brevemente las ideas que podrían surgir por parte de los estudiantes al trabajar con ella?

Los docentes analizaron la primera tarea modificada (con la consigna re-redactada), para la cual sugirieron varias estrategias y finalmente uno de los docentes intervino para decir:

DR3: Si yo tuviera que ordenar las estrategias que aparecerían serían: la primera, tomar el polinomio genérico $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *, dividir con el algoritmo usual e igualar el resto a 0; la siguiente sería multiplicar L por un polinomio de primer grado, y después, un estudiante hábil, fijaría uno o dos coeficientes y después dividiría entre L.*

De las estrategias planteadas nos detuvimos en el análisis de la primera:

DI: Supónganse que algunos alumnos optan por la primera estrategia y lo consideran mónico[10]*, ¿a qué van a llegar?*

DR1: A un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

DI: ¿Y ahí qué hacen?

DR2: Escriben dos en función de una.

DR3: Si es que saben cómo hacerlo.

[10] Esto significa considerar coeficiente principal igual a 1 (a = 1).

DI: O sea que la estrategia puede morir por no saber cómo resolver un sistema indeterminado…

DR1: A menos de que conozcan eso de tener la libertad de elegir una de las incógnitas.

DR3: Puede ser que un alumno que opte por esa estrategia, llegue a ese punto y se sienta en la necesidad de resolver el problema, entonces fija esos valores, pero a priori, creo que no lo va a saber hacer.

DR1: Claro, porque en las tareas tradicionales, cuando los alumnos tienen que resolver sistemas que son indeterminados, lo que en general se les pide que informen elegantemente las raíces o soluciones de determinada forma, esto es, en función de una incógnita que se toma como grado de libertad. Es decir, que den las infinitas soluciones y no, que de todas las que tienen, den alguna.

DR3: Es verdad.

DR1: Se me ocurre que un alumno que tiene tendencia a la aplicación de técnicas, no tienda a elegir una sino a dar el formato de todas las soluciones.

En este diálogo se puede observar cómo los profesores comienzan a comparar el tipo de trabajo que genera las tareas de final abierto con el trabajo que se realiza en tareas estándar, haciendo referencia a que en estas últimas hay ciertos procedimientos que se espera que los estudiantes realicen. Además, están señalando algunas de las dificultades que los estudiantes podrían tener al enfrentarse a este tipo de tareas.

Para la segunda tarea, las modificaciones que se analizan son las de pedir la función compleja lineal pero sin el dato del punto unido y la de solicitar una función compleja tal que $f(1+i) = i - 5$.

De estas dos modificaciones, los profesores piensan que la segunda les da más libertad a los estudiantes porque pueden pensar en qué transformaciones hay que hacerle al complejo 1+*i* para que se transforme en *i*-5. En concreto, plantean lo siguiente:

DR1: O sea, sin escribir en términos de a y b, piensa en cómo transformar 1+i en i – 5.

DR3: Lo que decís es que piense en qué transformaciones hacerle a 1+i para llegar a i-5.

DR1: Sí, claro. Por ejemplo multiplicarlo por 2 y después sumarle algo, es decir ir acomodando para que le dé i-5. O mejor, multiplicar por 1 y queda f(z) = z más algo, y después piensa en lo que le tiene que sumar a 1+i para llegar a i-5, o sea que el algo es -6 y listo.

De esta resolución valoran además:

DR1: Lo interesente de la de final abierto es que si me piden números complejos, pueden ser también reales.

DR3*: Eso ya tiene algo conceptual, ¿no? Que piensen los reales como complejos…*

Sin embargo, señalan que si los estudiantes optan por un abordaje algebraico buscando una función lineal, podría suceder lo siguiente:

DR3: Si plantean (1+i)(x+iy) + (x´+ iy´) = i – 5 van a hacer cuentas y separar la parte real de la imaginaria y van a llegar a un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas, o sea con dos grados de libertad. Entonces sucede lo mismo que antes, en el ejercicio de polinomios cuando tenían que determinar los coeficientes.

Esto (se refiere a resolver un sistema indeterminado) *es novedoso la primera vez que se enfrentan a ello, pero una vez que hagan dos o tres, y sepan que se le puede asignar valores a dos de ellos y después resolver un sistema determinado para encontrar los otros dos, fácilmente se vuelve rutinario. La primera vez que lo ponés es un problema pero después ya no más.*

Este comentario revela que el docente está más preocupado por la estrategia que siga el estudiante que por la solución que este dé al problema planteado. La tarea pedía dar una función que transforme el complejo 1 + *i* en el *i* – 5, por lo tanto el interés está en la forma, es decir en cómo da esa función: si da una en particular, si da más de una, si escribe todas las posibles funciones lineales que transforman un complejo en el otro.

Con respecto a esto, otro docente plantea una variante:

DR1: Por eso a mí me parecería interesante en las tareas abiertas pedir más de una solución, para que no encuentren una y ya está, se quedan ahí.

DI: ¿Eso qué te aportaría?

DR1: Que con la estrategia que usaste tal vez sólo encontrás una solución, entonces para encontrar otra, esa ya no te sirve y tenés que pensar en otra estrategia para dar más de una solución.

5.2.3 Acerca de la implementación en el aula de las tareas de final abierto diseñadas

A los docentes participantes del taller se les preguntó:

DI: ¿Cómo se imaginan una clase en la que ustedes pongan en práctica estas tareas?

Estos plantearon algunos inconvenientes relativos a la implementación en el aula de este tipo de tareas:

DR2: Estas tareas llevan tiempo, los alumnos pueden empezar por un camino y yo me imagino que se pueden trancar, entonces hay que tirarles un pique, la cuestión es que no se paralicen, que sigan… capaz que el pique se lo da un compañero… O pasa que un problema nos lleva a otro problema… o a otra discusión.

DR3: Quiero hacer una precisión: No es que no me parezca interesante que se hagan este tipo de tareas, […] esta forma de trabajo exige cierta cantidad de tiempo, que hace *que vos debas desplazar un poco los contenidos del curso para poder hacer en la clase este tipo de tareas.*

Observamos cómo una y otra vez aparece la mención al tiempo como una tensión que enfrenta el docente a la hora de dar lugar a este tipo de actividades. Esto se contrasta con lo que Santaló (1994) comenta respecto al tiempo: "[…] se ganaría en eficacia y tiempo si en todas las materias de Matemática se aplicara la metodología que luego el profesor de didáctica especial se encarga de recomendar" (p. 2).

Por otro lado, no queda claro si el hecho de que los alumnos se pueden "trancar" o que "un problema lleve a otro problema" estén mencionados como inconvenientes. En la concepción de Zaslavsky (1995) esto claramente no es un problema sino uno de los beneficios de las tareas de final abierto.

DR1: Para abordar estas tareas se requiere una experiencia previa basada en tareas no abiertas. Para tener una previsión de lo que va a ocurrir, esto es, para poder imaginarme los diferentes caminos o estrategias para resolver una tarea abierta tengo que tener cierto trillo previo, [...] que les hayan aportado las técnicas y el entrenamiento para poder obtener y comprender los caminos. Porque además estoy pensando en la discusión posterior, ¿no? En la puesta en común, para que los otros estudiantes entiendan qué estrategia usé yo, tienen que saber de lo que estoy hablando.

Este planteo se podría interpretar como que no se puede trabajar con tareas abiertas sin haber pasado antes por tareas estándar y se deja entrever que no hay lugar para la sorpresa, es decir, que el profesor no admite que puedan aparecer estrategias que él no trabajó antes. Se pierde que en la puesta en común un alumno pueda ser el que le enseñe a los demás (y al profesor) un abordaje genuino, una resolución hecha por él que tiene que explicar a los demás porque nadie más la sabe o la ha podido desarrollar.

5.2.4 Acerca de las reflexiones de los docentes en torno a la potencialidad de este tipo de tareas

Finalmente se les preguntó:

DI: ¿Qué les parece que aporta haberlas transformado en tareas de final abierto?

Y además:

A través de estas tareas, ¿piensan que se podrían hacer conexiones con la matemática que los estudiantes, futuros docentes, habrán de enseñar en sus aulas de secundaria?

Algunos de los comentarios de los docentes tienen que ver con la forma de abordar este tipo de tareas:

DR2: Aportar, aporta en pensar mucho más en lo que se está haciendo, en no hacer las cosas en forma automática. Los alumnos se entrenan, miran los datos y dicen, esto se resuelve de esta manera. Acá hay que conceptualizar mucho más, pensar mucho más qué significan las cosas, pensar en el enunciado y podés no saber por dónde arrancar… podés no llegar a entender ni siquiera el enunciado…

Es claro que el comentario tiene que ver con contrastar el tipo de trabajo que demanda una tarea estándar o cerrada con el que demanda una tarea de final abierto.

Realizan además valoraciones en cuanto a la metodología de trabajo en el aula:

DR3: […] este tipo de tarea favorece la emulación de cierta actividad del matemático por encima de los contenidos. Es decir, si bien está bueno, que se implemente una forma de trabajo así, no creo que todo tenga que ser trabajado así.

DR1: Yo le daría más valor a cómo encarar el trabajo matemático que al conocimiento matemático en sí. Lo que menos me preocupa es la matemática como el listado de contenidos y me parece más que bueno que los estudiantes de profesorado estén en contacto con este tipo de cosas, explorar caminos, es valioso el hecho de aceptar diferentes opciones como posibles, la discusión, la argumentación y validación. Y esto es valioso que lo lleven a sus aulas de secundaria. Porque los problemas con los contenidos, cuando empiezan a hacer la práctica, ellos mismos traen a la clase cuestiones de las dificultades.

De acuerdo a estos comentarios parecería que las tareas de final abierto aportarían a los estudiantes de profesorado una metodología diferente que pueden llevar a las aulas pero, los vínculos entre el contenido matemático que involucra el trabajo con estas tareas y el que los estudiantes habrán de enseñar en sus aulas de enseñanza media quedan invisibilizados.

5.3 Reflexiones acerca de la realización del taller

En esta sección nos proponemos reflexionar acerca de las respuestas de los profesores participantes en el taller desde las perspectivas que presentamos en el marco teórico de este trabajo y en base a las consideraciones metodológicas realizadas.

Recordemos que Shulman (2005) hace “hincapié en la docencia como un acto de comprensión y razonamiento, de transformación y reflexión” (p. 17) y desarrolla un modelo de *acción y razonamiento pedagógico* que comprende las siguientes actividades: *comprensión, transformación, enseñanza o instrucción, evaluación, reflexión y nuevas maneras de comprender.*

Con base en este marco, establecimos que el ciclo de diseño de nuestra intervención didáctica tendría en cuenta estas actividades aún cuando no se tratara de planificar una clase específica pues, como el propio autor afirma:

> Todos estos procesos de transformación redundan en un plan, o un conjunto de estrategias, para presentar una lección, una unidad o un curso. Hasta aquí, por supuesto, todo lo anterior corresponde a un ensayo del acto de impartir enseñanza que aún no ha ocurrido. (Shulman, 2005, p. 23)

Concretamente nuestra intervención comienza con el acercamiento de los formadores a los planteos y concepciones de Zaslavsky (1995) (*comprensión*) y sigue con el diseño de tareas y el análisis en conjunto de su potencialidad para el trabajo en el aula, centrándonos en el significado de la clase como un ámbito para la producción de conocimientos y para establecer vínculos con la matemática que los futuros docentes habrán de enseñar (*transformación*). Culminadas estas dos etapas, es necesario acordar su implementación en el aula en lo que se refiere a los roles y formas de registro de lo que en ella acontezca (*enseñanza o instrucción*) y finalmente realizar un análisis a posteriori de la propuesta en relación a la potencialidad de las actividades y de la metodología de trabajo utilizada, y evaluar la posibilidad de continuar la propuesta y de extenderla a otros contenidos del curso o a otros cursos (*evaluación, reflexión y nuevas maneras de comprender*).

En esta sección, en la que nos proponemos reflexionar sobre el desarrollo del taller, nos focalizaremos en las actividades de *comprensión* y de *transformación* pues, al no haberse llevado a cabo las otras etapas del ciclo de diseño de la intervención, no es posible hacer consideraciones con respecto a las otras actividades del modelo de acción y razonamiento pedagógico: *enseñanza o instrucción, evaluación, reflexión* y *nuevas maneras de comprender.*

Sobre la *comprensión* de los planteos de Zaslavsky (1995) y las *transformaciones* que se requieren para su implementación en la clase, de las respuestas de los profesores realizamos las siguientes observaciones:

- Los profesores lograron modificar las tareas estándar para convertirlas en tareas de final abierto e incluso llegaron a plantear variantes de las tareas modificadas con el fin de mejorarlas, evidenciando entonces un proceso de *preparación.*

- Los profesores mostraron una *comprensión* parcial de lo que son las tareas de final abierto ya que si bien lograron modificar las consignas de tareas estándar, se preocuparon por mantener, en la tarea modificada (de final abierto), los mismos conceptos y estrategias que se ponían en juego en la tarea estándar.
- Los profesores lograron analizar las diferentes estrategias de resolución y soluciones posibles de las tareas modificadas, pensando en diferentes *representaciones* de las ideas presentadas y analizando críticamente las estrategias en términos de si son o no apropiadas y si aportan o no nuevos conocimientos a los estudiantes.
- Si bien los profesores no analizaron la forma en que estas soluciones podrían ser presentadas por los estudiantes, sí señalaron algunos de los preconceptos y dificultades que los estudiantes podrían manifestar, evidenciando así el proceso de *adaptación* de las tareas a las características de sus alumnos.
- En lo que se refiere al proceso de *selección* de metodologías, los profesores manifestaron cierta reticencia a presentar las tareas de final abierto sin antes trabajar en clase con tareas estándar que aporten a los estudiantes las técnicas y procedimientos para poder abordar las de final abierto.

En cuanto a los planteos de Shulman (2005) referidos a la *base de conocimientos para la enseñanza* realizamos las siguientes observaciones:
- Los profesores dejaron ver la importancia que tiene para ellos el *conocimiento del contenido*, esto es el conocimiento matemático asociado a la asignatura que imparten. Esto se refleja especialmente cuando se cuestionaron si el trabajar con las tareas de final abierto, que exigen más tiempo que las tareas estándar, llevaría a dejar sin tratar en clase algunos contenidos de la asignatura.
- Los profesores dieron muestras de la importancia del *conocimiento didáctico general*. Hicieron referencias al manejo y organización de la clase en las que pondrían en práctica las tareas de final abierto, mencionando que promueven el trabajo en grupo, la autonomía de los estudiantes, la discusión, la argumentación, etc.
- En cuanto al *conocimiento didáctico del contenido*, valoraron el potencial de las tareas abiertas como recurso metodológico, reconociendo en la implementación de las tareas de final abierto aportes para el desempeño de la labor docente de los futuros profesores.

En virtud de las observaciones realizadas, en primer lugar podemos señalar que los profesores mostraron interés por el tipo de tarea que se les estaba presentando, no sólo porque explícitamente señalaron, al término del taller, que les parecía una propuesta interesante, sino porque mostraron una actitud positiva y activa en el desarrollo del mismo. En segundo lugar podemos señalar que si bien los profesores manifestaron preocupación por los contenidos, no se mostraron como meros especialistas en un área del saber ya que lograron plantear algunas cuestiones relativas al conocimiento didáctico del contenido: hicieron referencia, por ejemplo, a la importancia del trabajo grupal y la discusión en los equipos de trabajo, valoraron la argumentación y la validación en la clase de matemática, en contraposición con un trabajo mecánico e irreflexivo. Pero estas actividades, propias del quehacer matemático, enseguida fueron contrastadas con el tiempo que estas insumen, mostrando así cierta tensión relativa a que si se diera lugar a este tipo de tareas se estarían resignando algunos contenidos programáticos. En tercer lugar, y siguiendo con el conocimiento matemático, los participantes no establecieron vinculaciones entre el contenido matemático de las actividades abordadas en el taller y el contenido matemático que sus alumnos, futuros profesores, habrán de enseñar. Tampoco establecieron, en forma explícita, vinculaciones con los contenidos de otras asignaturas específicas de primer año. En cuarto lugar, y en relación con lo anterior, los formadores de profesores participantes del taller no plantearon, por ejemplo, la posibilidad de generar un ámbito de reflexión con sus estudiantes donde se pudiera analizar, entre otras cuestiones, qué implicancias metodológicas tiene la implementación de las tareas de final abierto o qué conocimientos matemáticos se ponen en juego y dónde aparecen estos conocimientos en el currículo de enseñanza media o qué transformaciones sufren los mismos al ser llevados a las aulas de ese nivel. Además, podrían haber explicitado cuestionamientos relativos al tipo de tareas que ellos proponen a sus alumnos en las clases o las que aparecen en los textos y otros materiales que emplean o en las evaluaciones que realizan.

De continuar trabajando con estos docentes, entendemos que deberíamos abordar las siguientes dimensiones:

- En lo que se refiere a las tareas de final abierto, habría que seguir profundizando en su concepto, y en su presentación hacer hincapié en la importancia que tiene la manera en que los estudiantes pueden presentar las diferentes respuestas correctas que tienen las tareas propuestas: dan una, varias, o una familia de respuestas correctas, usan diferentes representaciones, usan lenguaje simbólico, etc.
- En lo que se refiere al conocimiento didáctico del contenido, se hace evidente la necesidad de continuar con las siguientes etapas del diseño de la intervención que proponemos, ya que será en ellas donde se planifiquen en forma colaborativa las

actividades que se llevarán al aula y se discuta la implementación de las mismas. Será entonces en esa etapa de planificación donde el docente investigador tendrá que ayudar a hacer surgir las conexiones con la matemática que los estudiantes, futuros profesores de educación media, habrán de enseñar en sus aulas.

Capítulo 6: Reflexiones finales

En este trabajo nos propusimos diseñar un proyecto de intervención didáctica con el objetivo de ofrecer a docentes formadores de profesores (docentes responsables de cursos de asignaturas específicas del profesorado de matemática) una experiencia de desarrollo profesional con la que pretendemos que tomen contacto e integren a sus prácticas resultados de investigación. Esto supone un proceso de trabajo conjunto entre un docente investigador y esos docentes, en una modalidad de trabajo colaborativo. Concretamente nos planteamos revisar y reformular algunas de las tareas que los formadores de profesores proponen en sus cursos con el fin de transformarlas en *tareas de final abierto* en la concepción de Zaslavsky (1995) para luego llevarlas a sus clases. Elegimos este tipo de tareas por la potencialidad que tienen, especialmente en relación a que permiten instalar en la clase un ámbito de producción de ideas matemáticas.

Además, procuramos reflexionar acerca de lo que implica su implementación, atendiendo cuestiones relativas al *conocimiento didáctico del contenido*, constructo propuesto por Shulman (2005). Esto implica conocer aspectos metodológicos recomendados para la formación de profesores y también conocer las vinculaciones entre la matemática de nivel superior que los formadores de profesores enseñan y la matemática que habrán de enseñar en sus aulas aquellos que se están formando.

En relación a la intervención didáctica podemos señalar que concretamos dos aspectos fundamentales: logramos delimitar teóricamente el concepto de intervención didáctica en Matemática Educativa y propusimos un ciclo de diseño para la implementación de la misma que fue la base del método para el diseño de este proyecto de intervención.

El modelo de acción y razonamiento pedagógico de Shulman (2005) resultó una herramienta eficaz tanto para la planificación de las etapas de la intervención como para el análisis del razonamiento pedagógico de los formadores de profesores participantes.

En el proyecto de intervención didáctica, nos habíamos propuesto un doble desafío: que los docentes formadores de profesores tomaran contacto e incorporaran a sus prácticas resultados de investigación y que lograran hacer conexiones explícitas entre la matemática que enseñan y la que sus estudiantes habrán de enseñar. Si bien no implementamos todas las etapas del diseño de la intervención, del taller que realizamos podemos sacar algunas conclusiones en relación a los desafíos planteados:

- Los profesores participantes recibieron con interés las consideraciones teóricas relativas a las *tareas de final abierto* y trabajaron mostrando creatividad en las variadas maneras de reformular las tareas estándar que presentaron. Además, analizaron con profundidad las posibles resoluciones y respuestas a las reformulaciones que propusieron. Pero incorporaron con relativo acierto el concepto de tarea de final abierto ya que se preocuparon por mantener, en la tarea modificada (de final abierto), los mismos conceptos y estrategias que se ponían en juego en la tarea estándar. Esto nos muestra que se hace fundamental el *rol docente del investigador* para facilitar la comprensión de los resultados de investigación como fuente para el diseño de tareas para llevar a las clases de formación docente.
- Los profesores participantes lograron reconocer en las tareas de final abierto potencialidad para instaurar en el aula una metodología de trabajo que emule la actividad del matemático en cuanto a que con ellas se fomenta la exploración, la discusión, la argumentación y la validación. Reconocieron también que con este tipo de tareas se fomenta el trabajo autónomo y en equipo de los estudiantes y que permiten que todos tengan la oportunidad de aportar algo como solución a las mismas. Sin embargo, no lograron establecer vinculaciones explícitas con la matemática que sus alumnos habrán de enseñar cuando sean profesores. Esto nos muestra que, de implementarse la intervención didáctica, habrá que dedicarse en forma especial a la planificación de las actividades que serán llevadas a las clases y su discusión en relación a qué conocimientos matemáticos se ponen en juego y dónde aparecen estos conocimientos en el currículo de enseñanza media o qué transformaciones sufren los mismos al ser llevados a las aulas de ese nivel.

Finalmente, deseamos señalar que el proyecto de intervención didáctica que proponemos podría dar lugar a un trabajo de investigación. Pensamos que al llevar a cabo la intervención didáctica que sugerimos podrían surgir problemáticas relativas a las prácticas docentes. Estas problemáticas podrían ser identificadas tanto por el docente investigador como por los docentes formadores de profesores y serían el objeto de estudio de proyectos de Investigación Acción.

En suma, en este trabajo aportamos una conceptualización teórica de lo que es una intervención didáctica en Matemática Educativa, diseñamos una propuesta de intervención didáctica para un curso de matemática de la formación inicial de profesores, llevamos a cabo una versión parcial de esa intervención que nos permitió establecer algunas conclusiones para cuando se lleve a cabo la intervención en su diseño completo y dejamos abierta la posibilidad de ampliar esa intervención dando lugar a un proyecto de Investigación Acción.

Referencias

Arbaugh, F. y Brown, C. (2005). Analyzing Mathematical Tasks: A catalyst for change? *Journal of Mathematics Teacher Education,* 8, 499-536.

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 8(1), 40-48.

Blanco, L., Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido en Ciencias Experimentales y Matemáticas y la Formación de Profesores. *Revista de Educación,* 307, 427-446.

Carr, W. y Kemmis S. (1986). *Becoming Critical: Education, Knowlwdge and Action Research.* New York: Routledge Falmer. Taylor and Francis Group.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas*. *El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Cohen, L. y Manion, L. (1980). *Research Methods in Education.* Croom Helm, 174-189, Dover, NH.

Cohen, L. y Manion; L. (1984). Action Research. In J. Bell, T. Bush, A. Fox, J. Goodey, y S. Goulding (Eds.), *Conducting Small-Scale Investigations in Educational Management,* 41-57. The Open University: Newcastle upon Tyne.

Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of the Mathematical Association of America. (2004). *Undergraduate programs and courses in the mathematical sciences: CUPM curriculum guide 2004*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Czarnocha, B. y Prabhu, V. (2005). Teaching-Research and Design Experiment – two methodologies of integrating research and classroom practice. HBCSE, TIFR. Recuperado de http://www.hbcse.tifr.res.in/episteme1/themes/OP_Czarnocha_PrabhuModified.pdf

Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olave, M. (2011). Una mirada a las prácticas de los formadores de los futuros profesores de matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza. *Unión*. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 28, 85-96.

Fantova, F. (2008). Repensando la intervención social. *Periódico de Trabajo Social y Ciencias Sociales.* Edición digital Nº 48. Recuperado de http://www.margen.org/suscri/margen48/fantova.html

Fenstermacher, G. (1978). A philosophical consideration of recent research on teacher effectiveness. En L. S. Shulman (ed.), *Review of Research in Education*, V. 6, 157-185, Itasca, IL, Peacock.

Fenstermacher, G. (1986). Philosophy of research on teaching: Three aspects. En M. C. Wittrock (ed.), *Handbook of Research on Teaching. Third edition*, 37-49. NuevaYork: Macmillan.

Fernández, J., Molfino, V. y Ochoviet, C. (2016). Rol Docente del Investigador en Matemática Educativa: un Ejemplo en un Curso de Posgrado para Profesores del Nivel Superior. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, V. 30, 55, 808-829.

García, V. y Blanco, M. (2002). Formadores de profesores de matemática. Una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de educación*, 333, 481-493.

Gudmundsdóttir, S. y Shulman, L. (2005). Conocimiento Didáctico en Ciencias Sociales. *Revista de Curriculum y Formación de Profesorado*, 9, 1-12.

Halsey, A.H. (1972). *Educational Priority. Volume 1: E.P.A. Problems and policies.* London: HMSO.

Intervención artística (s.f). Recuperado de http://www.iesabyla.es/index.php/es/historico-de-entradas4eso/235-intervencion-artistica.

Intervención (arte). (2016, 30 de enero). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Intervenci%C3%B3n_(arte)&oldid=88806563

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lesh, R.A. y Kelly, A. E. (n.d.). *Design Experiments in Mathematics Education.* Recuperado de http://gse.gmu.edu/research/de/Lesh_Design%20Exp%in%20Math%20Ed%206.pdf

Marcelo, C. (1994). *Investigaciones sobre prácticas en los últimos años: qué nos aportan para la mejora cualitativa de las prácticas*. Ponencia presentada al III Symposium Internacional sobre Prácticas Escolares, Poio.

Mellado, V. (1999). La formación didáctica del profesorado universitario de ciencias experimentales. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 34, 231-241.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Principles and Standards for School Mathematics.* Recuperado de http://www.fayar.net/east/teacher.web/math/standards/previous/profstds/index.htm

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito para todos.* Recuperado de https://www.nctm.org/Store/Products/(eBook)-De-los-principios-a-la-acci%C3%B3n--Para-garantizar-el-%C3%A9xito-matem%C3%A1tico-para-todos-(PDF-Downloads)/

Ochoviet, C. (2010). ¿Quiénes serán los futuros formadores? *Actas del II Congreso Nacional e Internacional de Formación Docente*, 41-45. Montevideo: ANEP-CFE.

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2010). Un diseño metodológico para integrar la investigación con la enseñanza. *Publicación de Aniversario. A diez años del Posgrado en Línea en Matemática Educativa en el IPN*, 175-191. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/aniversario/publicaciones.html

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2011). Comprender los resultados de investigación: El rol docente del investigador en la enseñanza de la matemática educativa. En Buendía, G. (coord.), *Reflexión e investigación en matemática educativa*, 53-80. México: Lectorum.

Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de casos*. Tesis doctoral no publicada. CICATA, IPN. México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/olave_2013.pdf

Proyecto de intervención (s.f). Recuperado de http://crecea.uag.mx/opciones/interv.htm

Real Academia Española. (2016). Intervención. En *Diccionario de la lengua española.* (23.ª ed.). Recuperado de http://dle.rae.es/?w=intervenci%C3%B3n

Real Academia Española. (2016). Intervenir. En *Diccionario de la lengua española.* (23.ª ed.). Recuperado de http://dle.rae.es/?id=LxRmruS

Saeli, M. (2009). Planting the seeds of Action Research for the revitalizations and professionalism of Mathematics teachers. *Quaderni di Ricerca in Didattica,* 19, 83-100.

Santaló, L. y colaboradores. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires: Troquel Educación.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-31. Recuperado de https://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf

Smith, M. S. y Stein, M. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School* 3. no. 5, 344-49.

Stein, M., Smith, M. S., Henningsen, M.A. & Silver, E.A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development.* NY: Teachers College Press.

Ticknor, C. (2012). Situated learning in an abstract algebra classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 307-323.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers´ professional development. *For the Learning of Mathematics, 15* (3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the Opportunity to Create Uncertainty in Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 60, 3, 297-321.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En Jaworsky, B. y Wood, T. (eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, 93-114.

Zaslavsky, O. y Sullivan, P. (2011). Setting the stage: a conceptual framework for examining and developing task for mathematics teacher education. En O. Zaslavsky y P. Sullivan (eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics. Task to enhance prospective and practicing teacher learning,* 1-18. New York: Springer.

Anexo 1

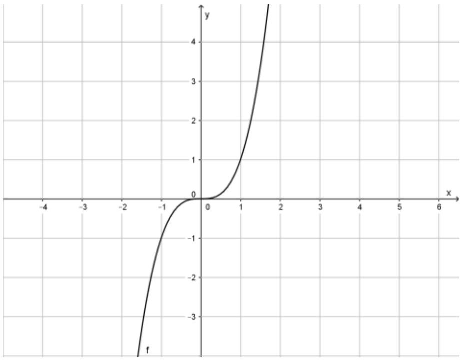
Análisis de una de las modificaciones propuestas a la tarea estándar para que resulte de final abierto

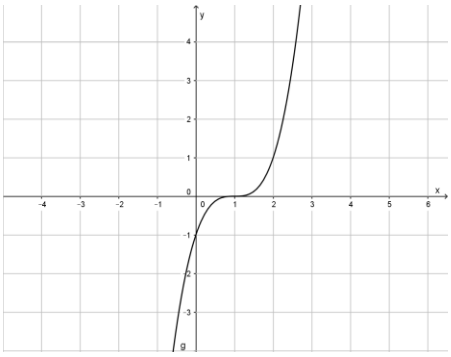
1. Halle una función $f: R \to R$ polinómica de grado 3 de modo que la recta tangente a su gráfico en el punto $(1, f(1))$ sea paralela al eje O*x* (tangente horizontal).
2. Halle una función $f: R \to R$ polinómica de grado 3 de modo que la recta tangente a su gráfico en el punto $(1, f(1))$ sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 1$.

Para la **primera parte** del problema los estudiantes podrían presentar las siguientes estrategias:

Estrategia 1

Conociendo que el gráfico de $f: R \to R / f(x) = x^3$ tiene un punto de inflexión con tangente horizontal en (0,0), trasladan horizontalmente 1 unidad en el sentido positivo de las *x* obteniendo el gráfico de $f: R \to R / f(x) = (x-1)^3$ que tiene un punto de inflexión con tangente horizontal en (1,0). Esta función cumple las condiciones pedidas.





Esta estrategia podría llevar a las siguientes preguntas:

1) ¿Qué sucede si *f*(1) no es 0?

   Si fuera *f*(1) = *k* habría que trasladar verticalmente el gráfico, *k* unidades para obtener el gráfico de $f: R \to R / f(x) = (x-1)^3 + k, \quad k \in R$ que cumple *f*(1)=*k*.

2) ¿Es $f: R \to R / f(x) = (x-1)^3 + k, \quad k \in R$ la única familia de funciones que cumple las condiciones pedidas?

La respuesta es no. La familia (infinita) $f: R \to R / f(x) = a(x-1)^3 + k; \quad a, k \in R, a \neq 0$ cumple las condiciones pedidas.

Estrategia 2

Podrían partir de la función genérica

$f: R \to R / f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a, b, c, d \in R, a \neq 0$.

Entonces, para que el gráfico tenga tangente horizontal en $x = 1$ se debe cumplir la condición: $f'(1) = 0$

Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, la condición $f'(1) = 0$ implica $3a + 2b + c = 0$, considerando 1 como raíz simple de $f'(x)$.

Existen infinitas funciones que cumplen esta condición.

Entonces se puede elegir cualquier *a* y *b* (*a* diferente de 0) y luego *c* queda determinado por dicha elección. Después se toma *d* de acuerdo al valor de *f*(1).

Por ejemplo, si se eligieran $a = 1$ y $b = -2$ entonces *c* debe ser 1 para que $3a + 2b + c = 0$; con esto sería: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + d$, luego si $f(1) = 0$ debe ser $d = 0$ y si fuera $f(1) = k$, sería $d = k$.

Si la condición $f'(1) = 0$ para $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ se considera como que 1 sea raíz doble de $f'(x)$, entonces tendríamos:

	$3a$	$2b$	c
1		$3a$	$3a+2b$
	$3a$	$3a+2b$	$3a+2b+c = 0$
1		$3a$	
	$3a$	$6a+2b= 0$	

Entonces sería $6a = -2b$ o sea $b = -3a$ y $c = 3a$.

Esta estrategia podría llevar a la siguiente pregunta:

Con esta estrategia, ¿es posible obtener una función de la familia de la estrategia 1?

La respuesta es sí.

Podemos observar que para que sea $f: R \to R / f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a, b, c, d \in R, a \neq 0$ igual a

$f: R \to R / f(x) = a(x-1)^3 + k; \quad a,k \in R, a \neq 0$ deberían ser $b = -3a$, $c = 3a$ y $d = -a+k$.

Estrategia 3

Teniendo en cuenta que para que el gráfico de f (función polinómica de grado 3) tenga tangente horizontal en $x = 1$ se debe cumplir la condición $f´(1) = 0$, entonces se puede pensar que $f´(x)$ tiene que ser un polinomio de grado 2 con raíz 1.

Esto deriva en dos abordajes:

1) Si saben integrar, se primitiviza cualquier polinomio de grado 2 que tenga raíz 1 y se obtiene una solución para el problema planteado.

   Por ejemplo: si fuera $f´(x) = -x^2 + x$ (observar que cumple la condición $f´(1) = 0$) entonces sería $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k$. Si además se supiera por ejemplo, que $f(1) = 1$ debería ser $k = \frac{5}{6}$.

2) Si no saben integrar, el problema se puede pensar así:

   Si se pide que el polinomio $f(x)$ sea de grado 3 entonces $f´(x)$ tiene que ser un polinomio de grado 2 y además tiene que tener raíz 1 para que el gráfico de f tenga tangente horizontal en $(1, f(1))$. Entonces $f(x)$ tiene que ser un polinomio que tenga raíz 1 con orden de multiplicidad 2 o 3 (es decir que $f(x)$, en su descomposición factorial, debe tener un factor $(x-1)^2$ o $(x-1)^3$) para que, al derivarlo, $f´(x)$ tenga raíz 1 (es decir que se pueda factorizar con factor común $(x-1)$).

   Entonces se podría considerar cualquier polinomio de grado 3 en cuya descomposición factorial aparezca el factor $(x-1)^2$ o $(x-1)^3$. Podrían ser de la forma: $f(x) = (ax+b)(x-1)^2 + k$ o $f(x) = a(x-1)^3 + k$, así sería $f´(x) = a(x-1)^2 + 2(ax+b)(x-1) = (x-1)(3ax - a + 2b)$ o $f´(x) = 3a(x-1)^2$

   Por ejemplo:

   Si se toma $f(x) = a(x-3)(x-1)^2$ sería $f´(x) = a[(x-1)^2 + 2(x-1)(x-3)] = a(x-1)(3x-7)$ que cumple $f´(1)=0$.

   Luego se halla a para que la tangente pase por el punto $(1, f(1))$.

Esta estrategia podría llevar a la siguiente pregunta:

Con esta estrategia, ¿se obtienen las soluciones de las estrategias anteriores?

En efecto:

La familia de la estrategia 1 era $f : R \to R / f(x) = a(x-1)^3 + k; \quad a,k \in R, a \neq 0$ que es la otra posibilidad considerada para un polinomio de grado 3 cuya derivada se anule en 1; sería, como dijimos, $f'(x) = 3a\,(x-1)^2$.

Estrategia 4

Finalmente el problema se puede pensar así:

Para que el gráfico de f tenga tangente horizontal en $(1, f(1))$ se debe cumplir que $f(x) - f(1)$ tenga raíz 1 con orden de multiplicidad 2 o 3.

Resolvámoslo para el caso de raíz 1 con multiplicidad de orden 2.

Sea $f : R \to R / f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a,b,c,d \in R, a \neq 0$; $f(1) = a+b+c+d$.

En virtud del teorema de Descartes y utilizando el esquema de Ruffini, para que $f(x) - f(1)$ tenga raíz 1 con orden multiplicidad 2 se tiene:

	a	b	c	$-a-b-c$
1		a	$a+b$	$a+b+c$
	a	$a+b$	$a+b+c$	0
1		a	$2a+b$	
	a	$2a+b$	$3a+2b+c$	

Se puede observar que se llega a la misma condición que en la estrategia 2: para que 1 sea raíz doble se debe cumplir: $3a + 2b + c = 0$, por lo que valen todas las consideraciones hechas para esa estrategia.

Para resolver la **segunda parte** del problema hay que considerar que, para que la tangente al gráfico de f sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x+1$ (que tiene pendiente 3), se tiene que cumplir que $f'(1) = 3$.

De las estrategias planteadas en la primera parte, para resolver esta segunda parte se pueden usar las estrategias 2 y 3.

Para la estrategia 2 la condición $f'(1) = 3$ implica $3a + 2b + c = 3$.

Para la estrategia 3 hay que considerar que $f'(x)$ debe ser un polinomio de grado 2 que cumpla $f'(1) = 3$ para luego primitivizarlo.

Anexo 2

Análisis de la actividad propuesta a los profesores participantes en el taller

> Las siguientes son tareas estándar tomadas del material del curso de Fundamentos de la Matemática:
>
> 1. Se considera $P \in R[X]$. Halla a y b y resuelve $\overline{P}(x)=0$ sabiendo que $P = X^3 + aX^2 + 7X + b$ es divisible entre $L = X^2 - 5X + 6$.
> 2. Se considera $f: C \to C,\ f(z) = az + b$ con a y b números complejos. Halla a y b sabiendo que $f(1+i) = i - 5$ y que $-2i - 2$ es un punto unido en *f*.
>
> a. ¿Qué tipo de trabajo demanda de los alumnos cada una de las tareas?
> b. ¿Es posible modificar alguna de ellas para transformarla en una tarea de final abierto en el sentido propuesto por Zaslavsky (1995)?

Parte a.

Para resolver la **primera tarea** los alumnos podrían optar por alguno de estos procedimientos: 1) Efectuar la división de *P* entre *L* usando el algoritmo usual de división entera de polinomios e igualar el resto al polinomio nulo (pues *P* es divisible entre *L*). Luego tendrían que resolver (por algún método) el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se genera al igualar el resto al polinomio nulo.

2) Hallar las raíces de *L* (que son 3 y 2) y usar el esquema de Ruffini para dividir *P* entre $(X - 2)(X - 3)$, igualando los restos a 0. Luego tendrían que resolver (por algún método) el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se genera al igualar los restos a 0. 3) Hallar las raíces de *L* (que son 3 y 2) y luego resolver (por algún método) el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se genera al considerar $P(2) = 0$ y $P(3) = 0$.

Para resolver la **segunda tarea** los alumnos podrían optar por un procedimiento como el siguiente: como *a* y *b* son números complejos podrían plantear $f(z) = (x + yi)z + (x' + y'i)$ y usar esta expresión con la información de que $f(1+i) = i - 5$ y que $-2i - 2$ es un punto unido en *f* (es decir que $f(-2i-2) = -2i - 2$). Esto les va a generar dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cada uno de ellos (considerando por un lado las partes reales y, por otro, las partes imaginarias).

Parte b.

Para la **primera tarea** es posible pensar en diferentes modificaciones que dan lugar a las siguientes tareas de final abierto[11]:

1) Si se cambia el coeficiente 7 por otro parámetro más, la consigna sería:

Se considera $P \in R[X]$ tal que $P = X^3 + aX^2 + bX + c$. Halla un polinomio *P* que sea divisible entre $L = X^2 - 5X + 6$.

2) Si no se da la expresión analítica del polinomio *P*, la consigna sería:

Halla un $P \in R[X]$ de grado 3 que sea divisible entre $L = X^2 - 5X + 6$.

Observar que, a diferencia de la formulación anterior, aquí *P* podría no ser mónico.

3) Si se pide otro polinomio *Q* que tenga algunas similitudes y algunas diferencias con el polinomio *P*, la consigna sería:

Se sabe $P \in R[X]$ de grado 3 es divisible entre $L = X^2 - 5X + 6$. Halla un polinomio *Q* que solo tenga una raíz en común con *P* y no sea divisible entre *L*.

4) Si se cambia el polinomio *L* por otro que no tenga dos raíces reales distintas, la consigna sería:

Halla un $P \in R[X]$ de grado 3 que sea divisible entre $L = X^2 - 6X + 9$.

o

Halla un $P \in R[X]$ de grado 3 que sea divisible entre $L = X^2 - 4X + 5$.

5) Si se da una definición y se pide un elemento que la cumpla, la consigna sería:

[11] En todas las formulaciones, al igual que en la tarea original, habría que pedir que resolvieran $\overline{P}(x) = 0$, pero lo excluimos de la consigna para concentrarnos en el polinomio *P*.

Decimos que un polinomio *P* es divisible entre un polinomio *L* si el resto de dividir *P* entre *L* es el polinomio nulo (*O*).
Halla un $P \in R[X]$ de grado 3 que sea divisible entre $L = X^2 - 5X + 6$.
¿Cuáles son las raíces de *P*?

Para la **segunda tarea** es posible pensar en diferentes modificaciones que dan lugar a las siguientes tareas de final abierto:

1) Si se suprime parte de la información, por ejemplo el dato del punto unido, la consigna sería:

Se considera $f : C \to C, f(z) = az + b$ con *a* y *b* números complejos. Halla *f* sabiendo que $f(1+i) = i - 5$.

2) Si no se pide que la función sea lineal y se suprime el dato del punto unido, la consigna sería:

Halla una función $f : C \to C$ sabiendo que $f(1+i) = i - 5$.

3) Si no se pide que la función sea lineal y no se suprime el dato del punto unido, la consigna sería:

Halla una función $f : C \to C$ sabiendo que $-2i - 2$ es un punto unido en *f*.

o

Halla una función $f : C \to C$ que tenga un punto unido.

4) Si no se pide que la función sea lineal y no se suprime el dato del punto unido, la consigna sería:

Halla una función $f : C \to C$ que cumpla: $f(1+i) = i - 5$ y que $-2i - 2$ es un punto unido en *f*.

5) Si no se pide que la función sea lineal, sino cuadrática y se mantienen los datos, la consigna sería:

Se considera $f : C \to C, f(z) = az^2 + bz + c$ con *a*, *b* y *c* números complejos. Halla *a*, *b* y *c* sabiendo que $f(1+i) = i - 5$ y que $-2i - 2$ es un punto unido en *f*.

Anexo 3

Trascripción del audio del taller realizado el 11/5/16 con los profesores de la asignatura "Fundamentos de la Matemática"

¿Qué tipo de trabajo demanda de los alumnos cada una de las tareas?

DR3: Poner en juego algunas definiciones, conceptos, ¿la tarea es lo que hacen? ¿O son los procedimientos?

DI: La tarea es la consigna, el trabajo que demanda es lo que tienen que hacer los chiquilines para resolverla.

DR1: Concepto de división…la primera estrategia puede ser dividir.

DR2: Pueden dividir, buscarle las raíces al *L*,…

DR1: Y hacer dos Ruffinis enganchados, o valor numérico y ya está con eso hallan *a* y *b*.

¿Es posible modificar alguna de ellas para transformarla en una tarea de final abierto en el sentido propuesto por Zaslavsky (1995)?

DI: Para que resulte de final abierto tiene que tener múltiples respuestas correctas.

DR1: ¿Tengo que modificarla para que no sea sólo hallar *a* y *b*, por ejemplo? Me está costando modificar esto pensando en los mismos conceptos y estrategias que se usaron en la cerrada.

DI: Sí, sí, yo no dije que fuera fácil…

DR1: En uno de los coeficientes pongo una incógnita/parámetro más, *c*., básicamente se pide lo mismo, manteniendo que sea divisible entre *L*.

DI: ¿Y si le sacás todos los datos de los coeficientes?

DR1: Claro, le pido un polinomio de tercer grado, genérico.

DI: ¿Cómo sería la nueva redacción de la consigna?

DR3: Dar un polinomio de grado 3 que sea divisible entre x^2-5x+6

DR1: Y hallar todas sus raíces.

DR2: Claro, entonces van a existir infinitos, esto (señalando el *L*) por ($x-a$) cualquiera

DI: Múltiples respuestas correctas, no quiere decir infinitas (puede ser como en este caso, o no) Con esta, estaríamos re-redactando la consigna, ¿y la otra?

DR2: Antes de seguir con la otra, en esta ¿podríamos cambiar el divisor? Estoy tratando de ver si se logra que quede abierta.

DR3: Lo que tienen que hacer es operar con complejos y resolver un sistema.

DR1: Y saber lo que es un punto unido.

DR3: Por eso yo preguntaba en la anterior si la tarea son los conocimientos que pone en juego.

DI: Los conocimientos van a aparecer reflejados en las estrategias que usen para resolver la tarea. Entonces, ¿cómo la modificarían?

DR2: Bueno, obvio, si sacás un dato, ya te quedan infinitas soluciones.

DI: ¿Qué dato sacarías?

DR2: Cualquiera, tal vez el dato del punto unido. Depende de lo que quieras hacer después.

DR1: Capaz con los mismos datos pero pidiendo una función cuadrática, para no perder el dato de punto unido.

> *Modificaron una tarea para transformarla en otra de final abierto, ¿podrían esbozar brevemente las ideas que podrían surgir por parte de los estudiantes al trabajar con ella?*

DI: O sea, ¿cuáles serían las estrategias son las que los alumnos abordarían las tareas abiertas?

La primera tarea modificada era: Encontrar un polinomio de grado 3 divisible entre $L=x^2-5x+6$ y escribir su descomposición factorial.

DR3: Multiplicar L por $(x-a)$.

DR2: Otra estrategia es dividir un polinomio genérico entre x^2-5x+6.

DR1: Sí, empezarían con ax^3+bx^2+cx+d.

DR3: Difícilmente se les ocurra darle un valor al coeficiente principal para tener menos variables/parámetros.

DI: ¿Y la división la harán con el algoritmo tradicional?

DR1: Sí, sí, me parece que sí. Es un posible camino.

DR2: O por identidad de polinomios: $ax^3+bx^2+cx+d = (x^2-5x+6)(x-\alpha)$

DR1: Si yo tuviera que ordenar las estrategias que aparecerían serían: la primera, tomar el polinomio genérico ax^3+bx^2+cx+d, dividir con el algoritmo usual e igualar el resto a 0; la siguiente sería multiplicar L por un polinomio de primer grado, y después, un estudiante hábil, fijar uno o dos coeficientes y después dividir.

DI: Supónganse que hacen la primera estrategia y lo consideran mónico, ¿a qué van a llegar?

DR1: A un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

DI: ¿Y ahí qué hacen?

DR2: Las escriben dos en función de una.

DR1: Si es que saben cómo hacerlo.

DI: O sea que la estrategia puede morir por no saber cómo resolver un sistema indeterminado…

DR1: A menos de que conozca eso de tener la libertad de elegir una de las incógnitas.

DR3: Puede ser que un alumno que opte por esa estrategia, llega a ese punto y se sienta en la necesidad de resolver el problema entonces fija esos valores, pero a priori, creo que no lo va a saber hacer.

DR1: Claro, porque en las tareas tradicionales, cuando los alumnos tienen que resolver sistemas que son indeterminados, lo que en general se les pide que informen elegantemente las raíces o soluciones de determinada forma, esto es, en función de una incógnita que se toma como grado de libertad. Es decir que den las infinitas soluciones y no, que de todas las que tienen, den alguna.

DR3: Es verdad.

DR1: Se me ocurre que un alumno que tiene tendencia a la aplicación de técnicas, no tienda a elegir una sino a dar el formato de todas las soluciones.

DR2: Y bueno, a ese alumno yo le diría, "¿Y? ¿Ya está? ¿Cuál es el polinomio entonces?"

DI: Para la segunda tarea, la modificación es dejarla lineal pero sacarle el dato del punto unido.

DR3: Se pueden plantear la imagen de 1+*i*, igualarla a *i*-5 y ahí van a tener una ecuación con dos incógnitas…

DR1: Pará, estoy medio perdido, le estamos dando la función lineal ya expresada o le pedimos una función lineal…

Porque es diferente, en el primer caso tienen que hallar dos valores, *a* y *b*. Si le decimos función lineal, capaz que se plantea una lineal genérica o capaz que agarra para otro lado.

DI: ¿Para qué lado?

DR1: O sea, sin escribir en términos de *a* y *b*, piensa en como transformar 1+*i* en *i*-5.

DR3: Lo que decís es que piense en qué transformaciones hacerle a 1+*i* para llegar a *i*-5.

DR1: Sí, claro. Por ejemplo multiplicarlo por 2 y después sumarle algo, es decir ir acomodando para que le dé *i*-5.

O mejor, multiplicar por 1 y me queda $f(z)= z$ + algo, y después piensa en lo que le tiene que sumar a $1+i$ para llegar a i-5, o sea que el algo es -6 y listo.

DI: O sea que en tu solución a y b serían complejos reales, ¿no?

DR2: No, son complejos.

DR1: En mi resolución sí son reales. Porque estoy en la suposición de que se imaginan la función lineal con huecos en la expresión y no con letras a y b (complejos a determinar).

DI: Ahora, con eso estaríamos cambiando lo que demanda la tarea original cerrada, porque para resolverla se necesitaba cambiar a y b por complejos $x + iy$ e $x' + iy'$.

DR1: Lo interesente de la de final abierto es que si me piden números complejos, pueden ser también reales.

DR3: Eso ya tiene algo conceptual, ¿no? Que piensen los reales como complejos…

Igual se parece a la anterior pues si plantean $(1+i)\ (x + iy)+(x' + iy')= i-5$.

Van a hacer cuentas y separa la parte real de la imaginaria y va a llegar a un sistema de dos ecuaciones con 4 incógnitas, o sea con dos grados de libertad. Entonces sucede lo mismo que antes, en el ejercicio de polinomios cuando tenían que determinar los coeficientes.

Esto es novedoso la primera vez que se enfrentan a ello, pero una vez que hagan dos o tres, y sepan que se le puede asignar valores a dos de ellos y después resolver un sistema determinado para encontrar los otros dos, fácilmente se vuelve rutinario.

DI: ¿Qué es lo que se vuelve rutinario? ¿Las tareas de final abierto o la estrategia?

DR1: Creo que lo que dice DR3 es que toda tarea que decante en un sistema lineal con dos grados de libertad, le van a dar valores a dos de las incógnitas y después hallan las otras dos.

DR3: La primera vez que lo ponés es un problema pero después ya no más.

DI: ¿Y un abordaje geométrico de la tarea?

DR3: ¿Qué querés decir? ¿Cómo transformar esto para que haya algo de eso?

DI: No, me refiero a que a un chiquilín se le ocurra abordarlo geométricamente.

DR3: Es medio complicado, es una rotohomotecia compuesta con una traslación…

DI: Pero podría ser uno de los conocimientos previos que tengan o no?

DR3: En realidad no se trabaja mucho la interpretación geométrica de la función lineal de variable compleja.

DR1: Pero sería interesante, ¿no?

DR3: Si pensáramos en una función estrictamente lineal, o sea $f(z)=az$, sería una rotohomotecia, entonces si pasáramos a polar los complejos (preimagen e imagen) sería más fácil determinar el a, en forma polar trabajando con ángulos y otras cosas para determinar el módulo y el argumento. El módulo sería la razón entre los módulos de los complejos dados.

DI: Así trabajarías con b valiendo 0 y hallando *a*, ¿Y con *a* valiendo 1 y hallando *b*?

DR1: Ese sería el razonamiento que hice yo al principio, pensando en la traslación para ir de 1+*i* a 5-*i*. Fijándome sólo en los afijos, y mirando cuánto los tengo que trasladar.

DI: Entonces, ¿qué estrategias encontramos?

DR1: La de pensar en los afijos y transformarlos mediante una traslación, sumando algo y a partir de esa estrategia, que salgan otras funciones al pensar en multiplicar y sumar complejos reales. Por eso a mí me parecería interesante, aún en las tareas abiertas pedir más de una solución, para que no encuentren una y ya está, se quedan ahí.

DI: ¿Eso que te aportaría?

DR1: Que con la estrategia que usaste tal vez sólo encontrás una solución, entonces para encontrar otra, ese ya no me sirve porque con él encuentro una sola y ya tengo que pensar en otra estrategia. Entonces para dar otra solución tengo que poner en juego otro camino.

¿Qué les parece que aporta haberla transformado en una tarea de final abierto?

DR2: Aportar, aporta en pensar mucho más en lo que se está haciendo, en no hacer las cosas en forma automática. Los alumnos se entrenan, miran los datos y dicen, esto se resuelve de esta manera. Acá hay que conceptualizar mucho más, pensar mucho más qué significan las cosas pensar en el enunciado y podés no saber por dónde arrancar, podés no llegar a entender ni siquiera el enunciado.

DR1: Pero para abordar estas tareas se requiere una experiencia previa basada en tareas no abiertas. Para tener una previsión de lo que va a ocurrir, esto es, para poder imaginarme los diferentes caminos o estrategias para resolver una tarea abierta tengo que tener cierto trillo previo.

DI: ¿O sea que no te imaginás llegando mañana a tu curso y poniendo una tarea de estas?

DR1: Eso sí, no estoy diciendo eso, lo que digo es que la riqueza de estas tareas es imaginarme las diferentes formas de resolverla, e importa más por qué lo estoy haciendo que lo que estoy haciendo en sí. Pero que para que un estudiante pueda abordar una tarea de este tipo, para poder entrever una solución, para imaginarse un camino para resolverla, antes tuvo que enchastrarse las manos con otras tareas, tuvo que haber adquirido técnicas. Lo que digo es que para explotar al máximo el potencial de una tarea de final abierto, antes nuestros alumnos tuvieron que tener entrenamiento, al menos en ciertas cuestiones puntuales, en otro tipo de tarea, no abiertas, que les hayan aportado las técnicas y el entrenamiento para poder obtener y comprender los caminos. Porque además estoy pensando en la discusión posterior, ¿no? En la puesta en común, para que los otros estudiantes entiendan qué estrategia usé yo, tienen que saber de lo que estoy hablando. No te voy a poder discutir la solución que presentás porque no estoy entendiendo lo que estás haciendo.

DI: Vos decís que si no pasó por tareas rutinarias no agarró oficio para poder enfrentarse a tareas de final abierto.

DR1: Y un poquito sí, dos o tres, tampoco te digo una exageración, pero sí requieren de un trabajo previo. Para tener idea por dónde entrarle, que puedan decir "por aquí va la cosa".

DR2: No sé, estoy pensando en la tarea que le pedimos que presente un polinomio de 3er. grado divisible entre x^2-5x+6, ¿se necesita mucho trillo previo para esto?

DR1: No te digo que necesiten para resolverlo, lo que digo es que si saben más cosas, en el aula se va a generar una discusión más rica.

DR3: ¿Eso no va a depender de para quién y cómo propone la tarea el profesor? Si la pone para todo el grupo o para discutir en subgrupos. Me quedé pensando en lo que dijo *DR1*, no es que sea necesario, pero cuanto más conocimiento previo tengan, todo se enriquece, la diversidad de caminos es mucho más amplia, no sé si necesitan práctica previa en este tipo de tareas, sí se pueden proponer, porque estimulan la discusión, la investigación, la formulación de conjeturas.

DR2: La autonomía.

DR3: Y para que no haya frustraciones, el trabajo en equipo es fundamental, se supone que, si está bien diseñada la tarea, entre todos, ayudándose unos a otros, por lo menos a un camino podrán encontrar. Se supone además que en este tipo de tareas la intervención del docente tiene que estar minimizada, ¿no?

DI: Y pensando en la actividad matemática, ¿qué le aporta haberla abierto? ¿Qué otro trabajo demanda?

DR3: No sé si te referís a qué conocimiento matemático tiene que poner en juego, porque si es so, sería más o menos el mismo.

DR1: Pero como el camino no está dado, pueden aparecer otros conocimientos en juego. Pero sí creo que en el diseño el profesor se debe preocupar porque haya un camino reconocible por el alumno, yo le garantizaría la posibilidad de éxito, evitaría la frustración.

¿Cómo se imaginan una clase en la que ustedes pongan en práctica esta tarea?

DR2: Estas tareas llevan tiempo, los alumnos pueden empezar por un camino y yo me imagino que se pueden trancar, entonces hay que tirarles un pique, la cuestión es que no se paralicen, que sigan, capaz que el pique se lo da un compañero. O pasa que un problema nos lleva a otro problema o a otra discusión, como por ejemplo en la primera actividad, qué pasa con el grado del producto cuando se multiplican polinomios, qué pasa si en lugar de L les hubiéramos dado uno que no tuviera raíces…Podríamos preguntar cómo cambiaría el problema haciendo variar el divisor.

A través de esta tarea, ¿piensan que se podrían hacer conexiones con la matemática que los estudiantes, futuros docentes, habrán de enseñar en sus aulas de secundaria?

DR2: En concreto no me doy cuenta. Aunque el tema polinomios van a tener que darlo, se van a tener que enfrentar a él.

DR1: Yo le daría más valor a cómo encarar el trabajo matemático que al conocimiento matemático en sí. Lo que menos me preocupa es la matemática como el listado de contenidos y me parece más que bueno que los estudiantes de profesorado estén en contacto con este tipo de cosas, explorar caminos, es valioso el hecho de aceptar diferentes opciones como posibles, la discusión, la argumentación y validación. Y esto es valioso que lo lleven a sus aulas de secundaria. Porque los problemas con los contenidos, cuando empiezan a hacer la práctica, ellos mismos los traen a la clase cuestiones de las dificultades.

DR3: No entendí bien lo que dijiste. No me quedó claro si a vos te interesa más la parte metodológica que los contenidos.

DR1: No, yo lo que digo es que para los estudiantes, en este tipo de tareas, es más importante la metodología que los contenidos.

DR3: O sea que hacés una valoración de lo que es más relevante en cuanto a la enseñanza.

DR1: Y sí, por ejemplo en la tarea que se trabaja con funciones complejas, para los estudiantes es más relevante la metodología que los contenidos, porque no van a trabajar con esos contenidos en secundaria.

DR2: Yo estoy de acuerdo.

DR3: Yo quiero saber si estamos pensando en lo mismo, para saber si comparto o discrepo. La observación es que si este tipo de tarea favorece la emulación de cierta actividad del matemático por encima de los contenidos, en ese punto estoy de acuerdo. No sé si estoy de acuerdo en que se priorice siempre ese tipo de actividad sobre los contenidos.

DR1: Yo no estoy de acuerdo. Yo no dije siempre. Yo estoy hablando en concreto de esta tarea. Y en esta tarea lo más valioso es cómo se trabaja.

DR3: Quiero hacer una precisión: No es que no me parezca interesante que se hagan este tipo de tareas, lo que creo es que con este tipo de tareas se descuidan los contenidos, no, no es eso, no está bien que se descuidan los contenidos. Esta forma de trabajo exige cierta cantidad de tiempo, que hace que vos debas desplazar un poco los contenidos del curso para poder hacer en la clase este tipo de tareas. Es decir, si bien está bueno, que se implemente una forma de trabajo así, no creo que todo tenga que ser trabajado así.

DR1: De acuerdo.

DR2: Yo pienso que no hay que dar en secundaria funciones de los complejos en los complejos. Y acá en Fundamentos no sé. Sí funciones polinómicas porque lo van a dar después en secundaria. Lo necesitan sí o sí.

DR1: Sin embargo la relación de los complejos con la geometría es lo más interesante. Está relacionado con los fractales.

DR2: La verdad que al riqueza de los fractales no la conozco. Igual entiendo perfecto lo que dice DR1 y comparto lo de la metodología.