

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

ANEP-UdelaR

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay? Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros

Tesina para obtener el título
Diploma en Matemática mención Enseñanza

Presenta

Leticia Medina Uval

Directora de tesina

Cristina Ochoviet

Julio de 2016

Montevideo, Uruguay.

Resumen

Este estudio exploró los significados que atribuyen al signo de igual un grupo de estudiantes que cursan cuarto año de magisterio. Indagó si estos estudiantes reconocen, en tareas concretas que involucran al signo de igual, que los escolares podrían atribuir a este signo múltiples significados para dar solución a estas tareas. Analizó también si los futuros maestros identifican, a través del análisis de las producciones escritas de algunos escolares, los significados del signo de igual que dan sentido a las mismas.

La investigación se desarrolló con una metodología cualitativa y consistió en un estudio de casos. Se utilizó un cuestionario para recoger los datos de los treinta y dos estudiantes participantes del estudio y se realizaron entrevistas que fueron audio grabadas a tres estudiantes. La información obtenida se interpretó bajo el marco teórico propuesto por Molina (2006) y ampliado por Burgell (2012). En este documento presentamos las primeras impresiones sobre las respuestas dadas al cuestionario y el análisis de uno de los casos.

Este estudio brinda evidencias de la coexistencia de múltiples visiones asociadas al signo de igual, en la mayoría de estos estudiantes magisteriales en su etapa final de formación. Informa que aunque todos ellos advierten a este signo en ciertas situaciones, como un indicador de que las expresiones colocadas a ambos lados de él, se refieren al mismo objeto matemático o que son iguales en valor, la mayor parte de ellos al enfrentar ciertas tareas, aprecian a este símbolo como una invitación a dar una respuesta, correspondiente a la operación presentada inmediatamente antes de él. Esta visión, lleva al 80 % de los futuros maestros participantes en este estudio, a dar respuestas incorrectas a tareas sencillas que lo involucran. Por otra parte, esta investigación evidencia que muchos estudiantes admiten otros usos del signo de igual, asociados a los significados de *aproximación* e *indicador de cierta conexión o correspondencia*, que no respetan las propiedades matemáticas que lo caracterizan, y que no quedan abarcados por la categorización de *operacionales*. Este estudio brinda en este sentido una pequeña contribución a los usos asociados al significado de *indicador de cierta conexión o correspondencia*. En el estudio de caso analizado, observamos que aunque la estudiante dio evidencias de haber construido siete significados diferentes del signo de igual, al enfrentar la resolución de tareas sencillas del ámbito escolar en las que se involucra este signo, y en base a apreciarlo como un símbolo *operador*, dio solución incorrecta a algunas de las tareas propuestas. Asimismo, al enfrentar la corrección de estas tareas realizadas por escolares, puso en duda sus pensamientos *relacionales* del signo de igual, presentó ineficacia para anticipar que los escolares podrían dar más de una respuesta posible a estas tareas y no logró explicar los significados del signo de igual puestos en juego por los escolares a través del análisis de sus producciones escritas.

PALABRAS CLAVES: Signo de igual; Significados del signo de igual; Formación de maestros.

Abstract

This study explored the meanings of the equal sign attributed by a group of students, attending their fourth year (last one) of their degree to become primary school teachers. It inquired if these students can recognize, in specific tasks involving the equal sign, the multiple meanings children could attribute to this sign when solving these tasks. It also studied whether pre- service teachers can identify, through analysis of written productions of some students, the meaning of the equal sign that kids give to them.

This research made use of a qualitative methodology, based on a case study. It used a questionnaire to collect data from the thirty-two students who participated in the study, and there were three audio-recorded interviews to chosen students. In this paper we present the first impressions of the answers given by students and the analysis of one case. The information obtained, was interpreted by the theoretical framework proposed by Molina (2006) and extended by Burgell (2012).

This study provided evidence of the coexistence of multiple views associated with the equal sign, in most students in the final stage of their teaching degree. It shows that although all these students notice this sign, in certain situations as an indicator that the terms placed on both sides of it, refer to the same mathematical object or that are equal in value, facing certain tasks, most of them appreciate this symbol as an invitation to give an answer corresponding to the operation immediately brought before him. This vision leads to 80% of the pre-service teachers who participated in our study, to give incorrect responses to simple equal sign tasks. Moreover, this research indicates that many students admit other uses of the equal sign, associated with the meanings of approximation and indicator of some connection or correspondence, which do not respect the mathematical properties that characterize equal sign, and that are not included by the operational category. This study provides a small contribution to the use of the equal sign associated to the indicator of some connection or correspondence meaning. In the case study, we observed that although the student gave evidence of having built seven different meanings of the equal sign, faced with solving simple tasks in the school environment where this sign is involved, and based on appreciating it as an operator symbol; she gave incorrect solutions to some of the proposed tasks. Besides, when correcting the tasks performed at school, she questioned the relational thoughts of the equal sign, was inefficient to anticipate that kids could give more than one answer to the tasks and failed to explain the meanings of the sign used by learners at school through the analysis of their written productions.

KEYWORDS: Equal sign; Meanings of the equal sign; Teacher training.

Índice

Capítulo I: Introducción, contexto y justificación.....	5
I.1 Introducción general.....	5
I.2 Contexto.....	6
I.3 Fundamentación de la relevancia del tema de investigación.	7
Capítulo II: Estado de arte y formulación de objetivos.....	9
II.1 Dificultades asociadas a la construcción de significados del signo de igual.....	9
II.2 La enseñanza del signo de igual.....	12
II.3 Reportes de la investigación en formación docente.....	13
II.4 Síntesis y ubicación de este trabajo.....	14
II.5 Formulación de objetivos.....	16
Capítulo III: Marco Teórico.....	17
III.1 Precisando términos.....	17
III.2 Consideraciones teóricas en relación a los usos y significados del signo de igual	17
Capítulo IV: Método.....	21
IV.1 Descripción general del método.....	21
IV.2 Diseño del cuestionario y análisis a priori.....	21
IV.3 Sobre la aplicación del cuestionario.....	29
IV. 4 Sobre la elección del caso de estudio.	30
IV.5 Recopilación de material para trabajar en la entrevista.....	31
IV.6 Diseño preliminar de la entrevista	30
Capítulo V: Resultados y análisis.....	33
V.1 Primeras impresiones sobre las respuestas al cuestionario.....	33
V.2 Análisis de un caso	42
Capítulo VI: Reflexiones finales	59
Referencias bibliográficas.....	63
Anexo 1: El cuestionario.....	66
Anexo 2: Respuesta al cuestionario de la estudiante A10.....	68
Anexo 3: Cuestionario aplicado a escolares	71
Anexo 4: Respuestas seleccionadas de los escolares.....	72
Anexo 5: Transcripción de la entrevista de la estudiante A10.....	75

Capítulo I: Introducción, contexto y justificación

I.1 Introducción General

Una de las grandes dificultades en la construcción del pensamiento algebraico, se asocia a interpretaciones incorrectas o incompletas del signo de igual (Herscovics y Kieran, 1980; Kieran, 1992; Knuth, Stephens, McNeil y Alibali, 2006). Distintos trabajos de investigación (Kieran, 1981, entre otros), han reunido bajo la denominación de visiones *operacionales*, a aquellas interpretaciones del signo de igual que le asocian a éste el carácter de operador. Estas interpretaciones aprecian a este signo como aquello que separa un problema de su respuesta, como una invitación a realizar una operación y a colocar el resultado a continuación de este signo, es decir, es visto como una “señal” de hacer algo. Por el contrario, cuando se habla de una visión *relacional* del signo de igual, se hace referencia a considerarlo como indicador de una relación de equivalencia entre dos expresiones.

Por otra parte, existen evidencias de cierta resistencia a abandonar las interpretaciones *operacionales* del signo de igual, reportándose en la investigación (Weinberg, 2010) que incluso estudiantes de nivel terciario denotan visiones *operacionales* del signo de igual en algunos contextos, en coexistencia con visiones *relacionales*. Múltiples investigaciones (Behr, Erlwanger y Nichols, 1976; Kieran, 1992; Carpenter, Franke y Levi, 2003, entre otras) ponen de manifiesto que es necesario el trabajo planificado del docente, con igualdades planteadas de diversas formas, para ir construyendo una comprensión relacional del mismo. Consideramos pues relevante cuestionarse si el trayecto de enseñanza en Matemática, propuesto a un grupo de estudiantes en su formación inicial para maestros de educación primaria, ha brindado las oportunidades necesarias para completar el entendimiento del signo de igual desarrollado en su trayecto de escolarización previa.

Asimismo, teniendo en cuenta que en las aulas y en los libros de texto se trabaja mayormente con el signo de igual sin hacer referencias explícitas a su significado (Parslow-Williams y Cockburn, 2008; Burgell, 2012), y que se han reportado dificultades en advertir la problemática asociada al signo de igual por parte de maestros en formación (Stephens, 2006), cabe cuestionarse si los futuros maestros aprecian al signo de igual como objeto de enseñanza en sí mismo, si advierten la existencia de múltiples acepciones para éste, y si anticipan que los

escolares podrían atribuir al signo de igual más de un significado en relación a una misma tarea que lo involucra. Finalmente, dado que los sujetos de nuestro estudio en breve tendrán a su cargo la formación matemática de escolares, y considerando que Stephens (2006) advierte que un grupo de futuros docentes no consideran respuestas alternativas a su propia visión del signo de igual, resulta relevante cuestionarse si estos estudiantes han construido las herramientas necesarias para interpretar las visiones del signo de igual que subyacen bajo la producciones de los niños.

Para abordar la problemática presentada anteriormente, se realiza una investigación de corte cualitativo, con treinta y dos estudiantes que cursan su último año de formación magisterial. Mediante un estudio de casos, y desde el marco teórico aportado por Molina (2006), ampliado por Burgell (2012), se exploran los significados atribuidos al signo de igual por estos estudiantes en contextos aritméticos. Asimismo se indaga si los futuros maestros anticipan que los escolares podrían ofrecer múltiples respuestas a una misma tarea que involucra al signo de igual basados en múltiples significados de este símbolo, y se explora si los estudiantes magisteriales reconocen, a través de producciones escritas de algunos escolares dando solución a tareas que involucran al signo de igual, los significados del mismo que dan sentido a estas producciones. Por último, este estudio amplía el conocimiento de las tareas que ponen en evidencia significados *operacionales* en este nivel educativo, e identifica algunos usos que los estudiantes magisteriales hacen del signo de igual, promotores de significados incompatibles con su significado matemático.

I.2 Contexto

Este estudio se llevó a cabo con treinta y dos alumnos que están cursando el cuarto año de Formación Magisterial y que concurren al Instituto de Formación Docente de la ciudad de Maldonado, ubicado en el centro de esta ciudad de Uruguay. Esta institución, única en la zona dedicada a la formación de maestros, habilita a sus egresados a desempeñarse como maestros de Educación Inicial y Primaria en todo el territorio Nacional y depende del Consejo de Formación en Educación, en la órbita de ANEP. El plan de estudios vigente (Plan 2008), propone una formación de cuatro años que incluye, en relación a la asignatura Matemática, dos cursos anuales (Matemática I y II, ubicados en primer y segundo año), y un seminario de Profundización en Matemática y apoyo a la práctica (ubicado en tercer año, de 30 horas de

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

duración). Asimismo prevé un curso de Didáctica General y tres cursos anuales que abarcan las Didácticas Específicas de varias asignaturas, entre ellas la Didáctica de la Matemática; el plan prevé la dedicación de un semestre a esta última.

I.3 Fundamentación de la relevancia del tema de investigación

En los últimos años se ha observado una tendencia a adelantar la introducción del Álgebra y a promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de la Educación Obligatoria. Estas propuestas, promovidas por ejemplo por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989 y 2000), pretenden superar algunas de las reconocidas dificultades en el aprendizaje del álgebra. Buscan sustituir las prácticas tradicionales de instrucción de la Aritmética, que asumen el aprendizaje de las propiedades de los números y de las operaciones por el solo hecho de enfrentar una práctica masiva resolviendo operaciones aritméticas, por el establecimiento de relaciones entre las cantidades y las operaciones involucradas. Este nuevo enfoque, denominado “*Early Algebra*” (Carpenter y Levi, 2000), demanda la preparación de los futuros maestros, brindándoles las herramientas necesarias para afrontar los desafíos que impone el nuevo currículum escolar.

Por otro lado, múltiples investigaciones (McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur y Krill, 2006; Carpenter, Franke y Levi, 2003; entre otras) identifican la construcción de significados *relacionales* del signo de igual como cruciales para el desarrollo del razonamiento algebraico. Carpenter, Franke y Levi (2003, p.22) indican que “una concepción limitada de lo que significa el signo de igual es uno de los principales obstáculos en el aprendizaje del álgebra”. Agregan que comprender las transformaciones que se realizan a una ecuación para obtener otra equivalente demanda la comprensión del signo de igual.

Puesto que se han reportado dificultades en la construcción de significados del signo de igual, que abarcan desde el preescolar (Falkner, Levi, y Carpenter, 1999) hasta el nivel universitario (Weinberg, 2010), y que Stephens (2006) da evidencias de visiones incompletas del signo de igual en docentes en formación, consideramos fundamental conocer qué significados del signo de igual ponen en juego los estudiantes que han culminado su trayecto de instrucción matemática, prevista por el actual plan de formación inicial de maestros.

Asimismo, Hartzler (2013) reporta una fuerte correlación entre el entendimiento del signo de igual de los futuros docentes y su nivel de confianza al enseñar matemática, y señala la necesidad de que aquellos involucrados en la formación de maestros, realicen esfuerzos para crear oportunidades que permitan que todos los docentes en formación puedan desarrollar una sólida comprensión del signo igual. Dado que en nuestro país no se han realizado estudios en relación a esta problemática en el nivel terciario, y menos aún en la formación de maestros, consideramos que esta investigación nos permitirá conocer cuál es la situación actual de la problemática que nos ocupa, conocimiento que se aprecia como punto de partida para planificar intervenciones que ayuden a mejorar la situación en este nivel de enseñanza.

Por otra parte, Stephens (2006) señala que la mayor parte de un grupo de futuros docentes no toman en cuenta las características especiales del signo de igual ni las dificultades asociadas a la construcción de sus significados, ignorando el hecho de que seguramente muchos de sus estudiantes tendrán ideas erróneas sobre su significado. Recientemente Burgell (2012) constató que la interpretación del signo de igual aparece como “invisible” a los ojos de los dos docentes de Educación Secundaria que participaron en su trabajo, quienes no advierten la construcción de los significados del signo de igual como un problema a atender.

Finalmente, cabe mencionar que en el currículum de matemática de la formación magisterial, no se hacen referencias al estudio del signo de igual ni al desarrollo del pensamiento algebraico, en ninguno de los dos cursos de Matemática, ni en los cursos de Análisis Pedagógico-Didáctica Específica.

Considerando que la formación inicial de maestros es un ámbito privilegiado para iniciar una mejora de la educación matemática, y que estos estudiantes posiblemente el próximo año tengan un grupo de escolares a su cargo, resulta de interés además, explorar en relación a este tema, algunos aspectos del conocimiento especializado del contenido y del conocimiento del contenido y de los estudiantes, requerido para enseñar matemática (Ball, Thames y Phelps, 2008). En este sentido, consideramos que este estudio cobra relevancia ante la necesidad de reformular el currículum y las prácticas de enseñanza en la formación inicial de maestros en relación al signo de igual, adecuando los trayectos curriculares de manera de ofrecer al futuro maestro una preparación que le permita desempeñarse de manera solvente, como lo exigen los actuales programas de enseñanza primaria.

Capítulo II: Estado de arte y formulación de objetivos

Se presenta a continuación una reseña de algunos artículos que aportan de forma significativa al tema de nuestra investigación. Se distinguen en los ensayos e investigaciones las siguientes líneas temáticas, que son utilizadas como organizadores de nuestra presentación: (1) Dificultades asociadas a la construcción de significados del signo de igual, (2) La enseñanza del signo de igual, (3) Reportes de la investigación en formación docente, (4) Síntesis y ubicación de este trabajo. Finalmente se formulan los objetivos de esta investigación (5)

II.1 Dificultades asociadas a la construcción de significados del signo de igual

Kieran (1981) señala que los significados atribuidos al signo de igual por los escolares no son necesariamente los mismos que los atribuidos por sus docentes. Kieran, (1981, citando a Behr, Erlwanger y Nichols, 1976) advierte que escolares de todos los niveles de enseñanza primaria, generan visiones incorrectas o al menos incompletas del signo de igual, y presenta las siguientes situaciones como evidencia de sus dificultades en la construcción de significados de este signo:

- Muchos estudiantes no atribuyen sentido a expresiones de la forma $3 = 3$, y proponen sustituirlas por otras, con una operación planteada en el lado izquierdo de la igualdad y su respuesta del lado derecho, como lo sería $7 - 4 = 3$. El mismo desconcierto se observa en estos estudiantes al enfrentar tareas de completar el espacio, en sentencias de la forma $___ = 3 + 4$ para lograr una igualdad.
- Algunos escolares aprecian expresiones del tipo $4 + 5 = 3 + 6$ como falsas; argumentan que $4+5$ no es igual a 3 (ignorando el 6) o la señalan como mal expresada, pues consideran que luego del signo de $=$ debía seguir la respuesta (un número) y no otra operación, sugiriendo la separación de esa expresión en otras dos: $4 + 5 = 9$ y $3 + 6 = 9$.

En todos los casos relatados anteriormente, los estudiantes tienen la idea de que el signo de igual es un símbolo *operador*, es decir, es apreciado como un símbolo que indica que se debe efectuar una acción, un separador entre una cadena de números y operaciones y su resultado, haciendo un uso asimétrico del mismo. Estas concepciones son nombradas por los investigadores (Behr, Erlwanger y Nicols, 1976; Knuth et al. 2006, entre otros) como visiones

operacionales del signo de igual. Por otra parte, Kieran (1981) indica que una comparación entre los números o expresiones representados a ambos lados del signo de igual, sugiere que el símbolo de igual está siendo visto de una forma relacional.

Por otra parte, Burgell (2012) realiza un estudio exploratorio sobre los significados que atribuyen al signo de igual, treinta y seis estudiantes de primer año de enseñanza secundaria, en un liceo público de Uruguay, con edades que oscilan entre los doce y dieciséis años. Reporta que la tercera parte de estos liceales, evidencian visiones exclusivamente *operacionales* del signo de igual, asociando este signo con el anuncio del “resultado de una operación”, con “una señal de hacer algo” o con “acciones a realizar”. Destaca que la mitad de estos estudiantes no logran identificar la sentencia $8 = 16$ como falsa, y que muchos de ellos no dan sentido a sentencias numéricas donde no hay operaciones, o hay operaciones a ambos lados del signo de igual. A partir de un estudio de los libros de texto usados en este nivel, pone en evidencia la ausencia en ellos de referencias explícitas a los significados del signo de igual. Según Burgell son mínimas las situaciones incluidas en estos libros que favorezcan efectivamente el desarrollo de visiones *relacionales* de este signo, y atribuye estos hechos al desconocimiento por parte de muchos educadores, de la problemática que rodea al signo de igual, y a una baja valoración de su relevancia a nivel del colectivo docente. Burgell advierte que esta situación deja a los docentes sin elementos didácticos que permitan revertir esta realidad.

Weinberg (2010) realiza una investigación con doscientos diez estudiantes universitarios, con al menos un curso aprobado de álgebra avanzado, buscando conocer sus interpretaciones del signo de igual y explorar cómo usan estos estudiantes este símbolo para representar situaciones que involucran comparación. Reporta que ciertas sentencias denominadas “cadenas de ejecución”, también conocidas como cadena de igualdades, son percibidas como correctas por muchos estudiantes, aún cuando son diferentes las cantidades representadas a un lado y otro del signo de igual. Agrega que estos estudiantes de nivel terciario visualizan al signo de igual jugando diferentes roles en los diferentes problemas, y que atribuyen a este signo distintos significados de acuerdo al contexto en el que se presenta, a la actividad matemática en la que participan y a las ideas que procuran representar. Advierte que los estudiantes podrían usar el signo de igual en maneras que pudieran funcionar efectivamente en algún contexto de la resolución de problemas, y que los docentes podrían confundir esto con la construcción del significado matemático del signo de igual.

Al tomar en cuenta las investigaciones antes mencionadas, resulta evidente que el problema de la construcción de significados del signo de igual no es ajeno a ningún nivel educativo. Los estudios que se incluyen a continuación nos orientan sobre las prácticas de enseñanza que la investigación señala como promotoras de algunas de estas dificultades.

II.2 La enseñanza del signo de igual

Kieran (1981, citando a Gelman y Gallistel, 1978 y a Siegel, 1978) informa que el signo de igual se introduce inicialmente de forma intuitiva en los niños en su etapa preescolar, para establecer una relación entre dos conjuntos con igual cantidad de elementos, no necesariamente homogéneos y luego se amplía su uso para vincular la cantidad de elementos de dos conjuntos, con la cantidad de elementos de su conjunto unión. Kieran destaca esta instancia como aquella que introduce en la escuela la noción del signo de igual como *operador*.

McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur y Krill (2006) realizan una investigación a nivel de sexto, séptimo y octavo grado, tendiente a analizar la importancia del formato de las tareas que involucran al signo de igual para el desarrollo de visiones *relacionales* del mismo. Este estudio incluye un análisis de las tareas presentadas en los libros de texto utilizados en estos niveles educativos, y advierte que el formato predominante en las tareas que involucran al signo de igual corresponde al formato denominado “estándar”, donde se plantea una operación al lado izquierdo del signo de igual y la respuesta a continuación del mismo. Este formato, también denominado “operación igual respuesta”, dirige a los estudiantes a realizar el cálculo y expresarlo después del signo de igual, y promueve interpretaciones inadecuadas de este símbolo. Informan que los libros analizados rara vez ofrecen tareas con operaciones a ambos lados del signo de igual, y que éstas tareas resultan ser las más efectivas para promover entendimientos *relacionales* de este signo, más aún que aquellas que contienen operaciones solo al lado derecho del signo de igual. Finalmente sugieren a los docentes complementar el trabajo en base a los libros de texto, con actividades que presenten el signo de igual en contextos no estándares, que permitan construir entendimientos *relacionales* del signo de igual.

II.3 Reportes de la investigación en formación docente

En las últimas tres décadas ha cobrado relevancia la estrecha relación entre el conocimiento del docente y el aprendizaje de los estudiantes, y con el surgimiento de constructos teóricos como el “Conocimiento matemático para la enseñanza” (Ball, Thames y Phelps, 2008), aumenta el interés por conocer y mejorar lo que saben y deben saber los maestros y futuros maestros, en relación a cada uno de los tópicos particulares de la matemática escolar. En este sentido este trabajo se interesa por conocer parte de este conocimiento propio del docente, en relación al tema específico que nos ocupa. A continuación resumimos los aportes de la investigación que en este sentido consideramos relevantes con respecto al signo de igual.

Hartzler (2013) realiza un estudio longitudinal sobre el entendimiento del signo de igual con 268 futuros maestros, en tres etapas de su formación inicial en Estados Unidos, procurando conocer el impacto en estos de los cursos de matemática recibidos en su período de formación como maestros. Reporta que si bien más de la mitad de estos estudiantes recibieron formación en cálculo o precálculo, la cuarta parte de ellos ponen en juego visiones *operacionales* del signo de igual al solicitarles que lo definan de forma aislada. Hartzler destaca la presencia de una mezcla de entendimientos *relacionales* y *operacionales* del signo de igual, no solo a nivel colectivo sino incluso a nivel individual, admitiendo que esta situación excede ampliamente lo esperado por ella para este nivel educativo. Al realizar estudios más profundos con una muestra de su población, señala que: solo un 10% de estos estudiantes dan evidencias de una *visión relacional*, que les permite resolver las tareas indicadas en base a las propiedades de la igualdad sin necesidad de calcular los resultados de las operaciones en cada miembro; el 50% de los estudiantes, evidencian una mezcla de entendimientos *relacionales* del signo de igual, llamados por la autora como *relacional* y *relacional con cómputo*, que les permite resolver correctamente por medio de cálculos una serie de tareas que lo involucran, sin poner en juego necesariamente propiedades de la equivalencia características de las visiones netamente *relacionales*; el 20% de los estudiantes evidencia una mezcla de *visiones operacionales* y *relacionales* basadas en el cálculo de las operaciones del signo de igual; finalmente el 20% restante, evidencia una mezcla de los tres tipos de entendimiento anteriormente mencionados (*operacionales*, *relacionales con cómputo* y *relacionales*).

Asimismo Hartzler (2013) indica que Mc Neil y Alibali (2005) reportan que ciertas tareas parecen activar la visión operacional del signo de igual, y agrega que los estudiantes no abandonan sus interpretaciones *operacionales* porque no les resulten útiles en algunos

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

contextos, sino que aprecian estos contextos como casos particulares, y cambian los significados puestos en juego sólo para los casos específicos en los que el otro significado se aprecia inútil, coexistiendo así varias visiones del signo de igual en un mismo individuo. Por otra parte, Hartzler coincide con Weinberg (2010) al señalar que estos estudiantes luchan con las cadenas de igualdades. Asimismo reporta que los futuros maestros podrían poner en juego un significado operacional del signo de igual al evaluar el trabajo de otra persona pero que podrían poner en juego alguna forma de entendimiento relacional del mismo cuando la tarea se presenta en un formato de completar o resolver la misma.

Stephens (2006) realiza un estudio con treinta maestros en formación, observando la conciencia de los futuros docentes sobre la equivalencia y el pensamiento relacional. La investigadora reporta que estos estudiantes dan evidencias de tener conciencia sobre el pensamiento relacional, pero que rara vez advierten el hecho de que, seguramente muchos de sus estudiantes tendrán ideas erróneas sobre el signo de igual, y difícilmente logran anticipar las dificultades asociadas a tareas que involucran a este signo. Informa que más de la mitad de estos estudiantes, presentaron dificultades al tratar de explicar los pensamientos subyacentes en las producciones incorrectas de los escolares, al resolver tareas que involucran al signo de igual, atribuyendo los errores a “olvidos” o distracciones por no apreciar algún símbolo o número, y que menos de la cuarta parte de estos futuros maestros propone que un concepto erróneo o incompleto del signo de igual, podría ser la causa de los errores observados en las tareas. Agrega que solo el 30% de los estudiantes entrevistados, es capaz de anticipar respuestas de alumnos basadas en ambas visiones (*operacionales* y *relacionales*) del signo de igual, y que la mayor parte de los futuros docentes, no son capaces de considerar respuestas alternativas a su propia visión de este signo. Por otra parte, indica que las respuestas basadas en estrategias que involucran manipulación algebraica o cálculo aritmético, son más frecuentes que aquellas que involucran pensamientos relacionales sobre el signo de igual. Asimismo, Stephens advierte de una predisposición entre estos estudiantes a creer que si los escolares son “bien enseñados” no tendrán ideas falsas, observa que los futuros docentes le quitan relevancia al trabajo con estas estrategias en la clase, sugiere una poca valorización del trabajo con la equivalencia en los primeros grados de primaria, y advierte una falta de comprensión de la equivalencia como concepto fundamental del álgebra. Finalmente atribuye estas conductas a la falta de énfasis en la equivalencia y en el pensamiento relacional, otorgado en la formación inicial de maestros.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Por otra parte, Parslow-Williams y Cockburn (2008) en su informe, reportan que maestros en ejercicio “no habían percibido el aparentemente inocente signo ‘=’ como un problema” (p. 29), poniendo en evidencia una vez más, la falta de conciencia de la problemática que rodea a la construcción de los significados de este signo, en este caso por parte de maestros de la escuela primaria. Agregan que algunos maestros reconocen el mal uso del signo de igual por parte de ellos mismos en el aula, por ejemplo al mostrar a sus alumnos, estrategias de partición para efectuar cálculos como el siguiente: $45 + 22 = 40 + 20 = 60 + 5 = 65 + 2 = 67$. Esto pone de manifiesto que la visión operacional del signo de igual, asociada al uso de cadena de igualdades, podría convivir incluso con muchos de los maestros de escuela primaria.

II.4 Síntesis y ubicación de este trabajo

De la introducción realizada y de la revisión bibliográfica, queda en evidencia que la presencia de visiones *operacionales* no escapa a los niveles educativos más altos (Weinberg, 2010; Hartzler, 2013). Los significados asociados al signo de igual “viven” en los usos que los estudiantes dan a este signo, siendo común la coexistencia de visiones *operacionales* y *relacionales*, en un mismo individuo que se ponen en evidencia en contextos específicos.

Por otra parte, también queda en evidencia la importancia de que los futuros maestros, responsables de la introducción de este concepto fundamental del álgebra, desarrollen un conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008) en relación al signo de igual, que incluya: el reconocerlo como objeto de aprendizaje y enseñanza, el anticipar las posibles visiones que podría poner en juego un escolar al enfrentar tareas que lo involucran (más allá de la visión propia del futuro maestro) y el reconocer los significados atribuidos al signo de igual por los escolares a partir de sus producciones escritas.

Dado que Hartzler (2013) aporta sobre los significados atribuidos al signo de igual por estudiantes magisteriales, clasificando estos en términos de: *operacionales*, *relacionales con cómputo* y *relacionales*, y observando que deja afuera de su estudio, la exploración de otros usos del signo de igual cuyos significados no entran dentro de esta clasificación, consideramos apropiado complementar este estudio eligiendo para nuestra investigación un marco teórico más amplio, que nos permita recoger otros usos y significados del signo de igual. Nos interesa particularmente detectar usos asociados a significados que no caen dentro

de la denominación *operacionales*, como lo son el significado de *correspondencia* o el de *aproximación*, presentados por Molina (2006), considerando para el primer significado la ampliación propuesta por Burgell (2012). Teniendo en cuenta que seguramente estos significados llevarán a aceptar o completar igualdades haciendo un uso incorrecto del signo de igual, consideramos importante en particular conocer los usos asociados a estos significados del signo de igual y los contextos en que esto se evidencia. Sostenemos que algunos de estos usos, atribuidos por estudiantes y docentes de todos los niveles, han escapado al cuestionamiento personal sobre los significados que se le asocian, dado que algunos son de uso corriente en el aula y la bibliografía, como la notación $a = \dot{b}$. Dado que este aspecto no ha sido abordado por otras investigaciones en este nivel educativo, consideramos relevante incluirlo en nuestra investigación, en el entendido que el mismo brindará el conocimiento necesario para abordar la problemática en el ámbito escolar.

Por otra parte cabe destacar que Burgell (2012) abordó con este mismo marco teórico el problema de la construcción de significados del signo de igual en los primeros años de ciclo básico, pero no se encontraron otros estudios que informen qué interpretaciones hacen del signo de igual los estudiantes uruguayos que cursan bachillerato, universidad, o formación docente, o una exploración más amplia que la aportada por Hartzler (2013).

Compartimos con Stephens (2006) el interés por abordar la problemática del conocimiento didáctico en relación a este tema, pero observamos la necesidad de abordar de forma conjunta los significados que los futuros maestros han construido, con su capacidad para enseñar este tema, dado que a priori pensamos que estarán íntimamente relacionadas. Es en este sentido que nuestro trabajo pretende contribuir a completar este vacío.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

II.5 Formulación de objetivos

Objetivo general de la investigación

- Dar cuenta del conocimiento del signo de igual que han construido los estudiantes de cuarto año de magisterio en un instituto de formación docente del Uruguay.

Objetivos específicos de la investigación

- Explorar los significados atribuidos al signo de igual, por parte de los futuros maestros en su cuarto y último año de formación inicial.
- Indagar si los futuros maestros anticipan posibles respuestas de los escolares, en relación a tareas que involucran al signo de igual, más allá de la que ellos podrían dar.
- Investigar si los futuros maestros reconocen los significados del signo de igual puestos en juego por los escolares, a través del análisis de sus producciones escritas, al resolver tareas que involucran este símbolo matemático.

Capítulo III: Marco teórico

En primer lugar precisaremos dos términos utilizados a lo largo de este trabajo, y a continuación especificamos el marco teórico que sustenta esta investigación.

III.1 Precisando términos

En la literatura se distinguen dos interpretaciones del signo de igual (Kieran, 1981, entre otros): una *interpretación operacional* que concibe al signo igual como una “señal de hacer algo”, es decir, como un símbolo operador que indica que se debe realizar una operación y escribir a continuación de él un número como respuesta a la misma, y una *interpretación relacional*, en la que este signo es visto como el indicador de una relación de equivalencia entre dos expresiones.

III. 2 Consideraciones teóricas en relación a los usos y significados del signo de igual

Considerando que nuestra población de estudio son maestros en formación, que se pretende conocer los usos y significados del signo de igual contruidos por estos estudiantes, y que nos interesa además investigar qué significados son capaces de anticipar que podrían ser puestos en juego por escolares en tareas concretas que involucran al signo de igual, se considera fundamental contar con un marco teórico amplio como el presentado por Molina (2006). Molina (2006) propone una categorización de los significados asociados al signo de igual en contextos aritméticos y algebraicos, recopilados a partir de la observación de trabajos de estudiantes, apuntes de clase y libros de texto. Esta categorización incluye once categorías, una de ellas particularizada en cuatro acepciones diferentes.

Por otra parte, Burgell (2012) propone una contribución tendiente a mejorar la categorización planteada por Molina (2006), que amplía la novena categoría (*indicador de cierta conexión o correspondencia*) para que la misma contemple también la conexión o correspondencia entre dos expresiones u objetos matemáticos. Agrega que un uso matemáticamente incorrecto que dejaría en evidencia esta visión, admitiría que $16 = 8$ pues existe una relación entre estos dos

números, basado por ejemplo en observar que el primero es el doble del segundo. Consideramos este aporte relevante para nuestra investigación, puesto que basados en nuestra experiencia docente, pensamos que podría surgir en nuestra población de estudio el uso del signo de igual para relacionar un número con el conjunto numérico al cual pertenece, y solo considerando la ampliación propuesta por Burgell a la categorización realizada por Molina sería posible clasificar éste y otros usos similares del signo de igual, que eventualmente podrían aparecer.

Por lo expuesto, tomaremos la siguiente clasificación de los significados del signo de igual, basada en Molina (2006, pp.148–152), a la cual se le incluye la ampliación propuesta por Burgell (2012, p.255):

- 1) *Propuesta de actividad.* Este significado se refiere al uso del signo igual en expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos encadenados con símbolos *operacionales*, seguida del signo igual (Ej. $16 \div 3 =$; $x(x + 1) - 3x(x + 5) =$). Este tipo de expresiones se utilizan en actividades de cálculo de operaciones o simplificación de expresiones para proponer al alumno una actividad a realizar, o más concretamente un cálculo o la reducción de una expresión, que no necesariamente ha de abordarse en el formato de una igualdad.
- 2) *Operador.* Este significado hace referencia al uso del signo igual como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda del signo igual, y su resultado, que se dispone a la derecha inmediato al signo de igual (Ej. $12 + 12 = 24$; $x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$). Con este significado, en ocasiones este símbolo es usado de formas que violan las propiedades transitiva y simétrica de la igualdad, encadenándose operaciones de izquierda a derecha, dando lugar a expresiones matemáticamente incorrectas. En este uso del signo de igual, la sentencia no está siendo considerada como una totalidad sino como una secuencia unidireccional de izquierda a derecha (Ej. $12+3=15+21=36$).
- 3) *Separador.* Significado atribuido por los estudiantes en contextos algebraicos para separar los pasos realizados en la resolución de una actividad. El signo de igual relaciona expresiones algebraicas que en el contexto considerado pueden o no tener relación alguna, siendo pasos sucesivos en la resolución de la actividad en cuestión (Ej. $f(x) = x^2 = f^2(x) = x^4$).
- 4) *Expresión de una acción.* El signo de igual es usado como símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones y su resultado, pudiéndose disponer ambos tanto a izquierda

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

como a derecha del signo igual (Ej. $24 = 12 + 12$). Extiende el significado de *operador*, al reconocer la propiedad simétrica de la igualdad.

5) *Expresión de una equivalencia condicional (ecuación)*. Este significado lo encontramos en el contexto del álgebra, en situaciones en las que el signo igual expresa una equivalencia sólo cierta para algún o algunos valores de la/s variable/s, pudiendo no existir ninguno (Ej. $x^2 + 3x = x + 1$; $\text{sen}(3x) = 0$).

6) *Expresión de una equivalencia*. Cuando el signo igual indica que las expresiones que se disponen a ambos lados se refieren al mismo objeto matemático. Este significado se particulariza en cuatro acepciones diferentes según el tipo de expresiones que compongan ambos miembros:

a) *Equivalencia numérica*. Cuando las expresiones en ambos miembros tienen un mismo valor numérico, es decir, representan a un mismo número (Ej. $4 + 5 = 3 + 6$; $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$; $\text{sen}(\pi/2) = 1$).

b) *Equivalencia simbólica*. Cuando las expresiones algebraicas de ambos miembros tienen el mismo valor numérico para cualquier valor que tomen la/s variable/s. Un caso particular tiene lugar cuando la igualdad expresa una propiedad matemática (Ej. $a + b = b + a$).

c) *Identidad estricta*. Significado restringido a expresiones donde los dos miembros representan el mismo objeto matemático usando el mismo representante (Ej. $3 = 3$; $a + b = a + b$). Este caso está incluido dentro de las acepciones anteriores.

d) *Equivalencia por definición o por notación*. Este uso indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por equivalencia del significado de la notación utilizada (Ej. Si se considera la fracción como

cociente entendemos que $\frac{7}{5} = 7/5$).

7) *Definición de un objeto matemático*. En este caso el signo igual se utiliza para definir o asignar un nombre a un objeto matemático (Ej. $f(x) = 3x + 2$; $\text{sen}(\alpha) = \text{cateto opuesto a } \alpha / \text{hipotenusa}$).

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

- 8) *Expresión de una relación funcional o de dependencia.* Este significado del signo igual se refiere al uso de este símbolo para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros. Por ejemplo en fórmulas del área de figuras geométricas (Ej. $A = \pi r^2$).
- 9) *Indicador de cierta conexión o correspondencia.* Este significado impreciso del signo igual hace referencia a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas (Ej. Pedro = 12 años; ♥♥♥=3; precio bici= $3x+5$ siendo x el precio de una pelota). Incluiremos también en este significado, aquellos usos imprecisos del signo de igual que vinculan dos expresiones u objetos matemáticos en base a la apreciación de cierta relación o correspondencia entre ellos Burgell (2012).
- 10) *Aproximación.* Este significado se refiere al uso del signo igual para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico (Ej. $1/3 = 0,33$). En estos casos el signo igual puede ser reemplazado por el símbolo \sim .
- 11) *Asignación de un valor numérico.* El signo de igual es usado para asignar un valor numérico a un símbolo (Ej.: si $x = 4$, ¿cuál es el valor de $x^2 - 5$?).

Cabe agregar que consideramos que los significados *operador* y *propuesta de actividad* cumplen las características propias de la visión *operacional*, dado que atribuyen al signo de igual un sentido unidireccional de izquierda a derecha, admitiendo solo que del lado izquierdo del signo de igual pueda presentarse una operación y del lado derecho de este signo se ubique o quede reservado para colocar el resultado de dicha operación.

Por otra parte, apreciamos que los significados *expresión de una equivalencia* (en sus cuatro acepciones) y *expresión de una equivalencia condicional o ecuación*, se corresponden con la denominada visión *relacional* del signo de igual, dado que en estos casos se está considerando la relación existente entre las cantidades ubicadas a un lado y otro del signo de igual.

Capítulo IV: Método

En esta sección presentamos el método seguido en esta investigación y los instrumentos utilizados. Primeramente describimos de forma general los pasos dados para la realización del trabajo y sus instrumentos. Luego exponemos el diseño del cuestionario presentado a los futuros maestros y su análisis a priori. Posteriormente nos referimos a las condiciones de aplicación de este cuestionario, seguido de una descripción de la elección del caso que elegimos presentar en este trabajo, y luego exponemos detalles sobre la recopilación de material para trabajar en la entrevista. Finalmente incluimos algunas consideraciones sobre el diseño preliminar de la entrevista.

IV. 1 Descripción general del método

La investigación realizada es de corte cualitativo y consiste en un estudio de casos. Se aplicó un cuestionario a treinta y dos estudiantes de cuarto año de la carrera magisterial (todos los estudiantes de ese grado de la carrera de un instituto de formación docente que se asistieron a clase el día establecido para la aplicación del cuestionario) y luego se realizaron entrevistas a tres estudiantes para profundizar en las respuestas dadas al cuestionario y para observar sus reacciones frente a producciones de alumnos de enseñanza primaria. Dado el alcance de este trabajo, se eligió uno de los estudiantes entrevistados de formación magisterial para presentarlo como estudio de caso.

IV. 2 Diseño del cuestionario y análisis a priori

IV.2.1 Elaboración del cuestionario

Para el diseño del cuestionario se tuvieron en cuenta los objetivos de nuestra investigación, y los antecedentes reportados. La selección de las tareas que conforman el cuestionario contempló en primer lugar, la necesidad de incluir una variedad de situaciones que permitan la emergencia de múltiples visiones del signo de igual en contextos aritméticos. Se consideró que el cuestionario debía presentar diversidad en el tipo de tarea propuesta, y debía contemplar diversos formatos de presentación de las igualdades. Se decidió entonces incluir

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

una tarea de completar espacios en blanco, una tarea de clasificar como verdadero o falso, y una pregunta abierta sobre el significado del signo de igual, sus usos y el lenguaje asociado a estos. Por otra parte, las tareas se organizaron de forma tal de permitir que en primer lugar el estudiante brinde de forma espontánea su respuesta a cierta tarea, luego que analice la veracidad o falsedad de algunas proposiciones, y por último que haga explícitos los significados que atribuye al signo de igual y los usos que da al mismo, para evitar que el estudiante advierta que el cuestionario se refiere al signo de igual, antes de dar solución a las otras tareas.

Dentro de las dos primeras actividades se incluyen sentencias en formato estándar y no estándar con operaciones del lado derecho del signo de igual y a ambos lados del mismo. Se procuró evitar incluir actividades que pudieran generar un conflicto para aquellos estudiantes que vean al signo de igual como *operador*, excluyendo de la actividad 1, situaciones en las que luego del signo de igual esté presente un número que no corresponda al resultado de la operación planteada a la izquierda del mismo. Asimismo, se procura que la resolución de las tareas no implique cálculos complejos ni conocimientos más profundos que los alcanzados en ciclo básico, para evitar contaminar los resultados con otras problemáticas. Para atender al logro de nuestros objetivos, se incluyeron dentro de la actividad 2 específicamente tres tareas, que buscaron detectar los significados del signo de igual como *aproximación* y como *correspondencia*.

A continuación se indican algunas consideraciones de orden general de cada actividad. El cuestionario se presenta en el anexo. Las actividades que fueron extraídas de otras investigaciones citan a la misma, las restantes son de elaboración propia.

Consideraciones sobre el diseño de la Actividad 1

Esta tarea de completar espacios en blanco, invita al estudiante a dar su propia respuesta sobre el número que completa la sentencia para que ésta sea verdadera. Se eligió evitar la palabra “igualdad” para no focalizar la atención de los estudiantes hacia el signo de igual, y que den una respuesta espontánea a la situación planteada. Se dejó abierta la posibilidad de completar de más de una forma los espacios en blanco, con el objetivo de evidenciar múltiples significados del signo de igual. Finalmente, se utilizan en su mayor parte tareas no estándar de operaciones en el lado derecho o de ambos lados del signo de igual, dado que las tareas

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

estándar se aprecian con menor potencial para poner en evidencia las distintas visiones que seguramente conviven en cada alumno.

Consideraciones sobre el diseño de la Actividad 2

Este formato de tarea “Verdadero o Falso” se aprecia óptimo para estudiar qué usos del signo de igual admiten los futuros maestros. Por esta razón el diseño contempló sentencias que a priori se consideraban factibles de ser admitidas por estos estudiantes, tomando como referencia usos inadecuados del signo de igual observados a lo largo de la experiencia docente. Se solicitó que cada respuesta se acompañe de una explicación para contar con mayores elementos a la hora de analizar las respuestas a la luz del marco teórico.

Consideraciones sobre el diseño de la Actividad 3

Esta actividad tomada de Burgell (2012), se apreció particularmente rica para poner en evidencia otros usos del signo de igual no contemplados por las otras dos actividades. Eventualmente podrían surgir en esta actividad significados no contemplados en la clasificación dada por Molina (2006). Estaremos atentos a esta situación ya que esto representaría una ampliación a esta categorización.

A continuación se describe para cada tarea, de forma sintética y si se considera relevante, el objetivo particular perseguido al incluir la misma, las respuestas posibles y los significados del marco teórico que serán evidenciados con cada respuesta, acompañado la clasificación con un breve fundamento si se considera pertinente.

IV.2.2 Análisis a priori de las tareas del cuestionario

Consideraciones generales

Cabe agregar que aunque las categorías propuestas por Molina (2006) no son disjuntas en el sentido de que la puesta en juego de un significado podrá implicar la aceptación de otro significado, cada respuesta será interpretada según el análisis a priori. En caso que aparezcan en un mismo estudiante varios usos del signo de igual, asociados a múltiples significados, todos estos serán tomados en consideración. En aquellos casos en los que los usos correspondan a un mismo significado, éste será tomado como único. Aquellas respuestas no

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

previstas por este análisis, serán categorizadas según el marco teórico y se considerarán todos los significados puestos en juego.

Actividad 1.a) $90 \div 3 = \underline{\quad} + 3 = \underline{\quad}$ (Burgell, 2012)

Esta cadena de igualdades numéricas busca evidenciar si los estudiantes ponen en juego visiones *operacionales* del signo de igual o si por el contrario, reconocen la equivalencia entre los miembros de cada una de las igualdades planteadas. Se considera que esta tarea invitará a aquellos estudiantes que vean el signo de igual como *operador*, a poner en juego esta visión, pues al tener una segunda igualdad, se podrá atribuir sentido el término $+ 3$, sin advertir la no equivalencia entre las cantidades representadas a un lado y otro del signo de igual. Una respuesta $90 \div 3 = \underline{30} + 3 = \underline{33}$, será considerada evidencia de poner en juego a este signo como *operador*, mientras que responder $90 \div 3 = \underline{27} + 3 = \underline{30}$ dará evidencias de considerarlo como *equivalencia numérica*.

Actividad 1.b) $\underline{\quad} = 16 - 4$ (Burgell, 2012)

Esta tarea, con formato no estándar con operaciones en el lado derecho del signo de igual, pretende explorar si estos estudiantes admiten la propiedad simétrica de la igualdad.

Una respuesta de 12 será tomada como evidencia de poner en juego el significado *expresión de una acción*. Completar con una operación que resulte 12, será tomada como evidencia de poner en juego el significado de *equivalencia numérica*. Completar con 16 o con una operación que resulte 16 será tomada como evidencia de poner en juego el significado *operador*. Los estudiantes que dejen esta tarea sin responder darán evidencias de no atribuir al signo de igual la propiedad simétrica, lo cual será también considerado como evidencia de poner en juego al signo de igual como *operador*, dado que será indicador de que no reconocen el formato no estándar y esperan una expresión de la forma “operación igual respuesta”.

Actividad 1.c) $57 + 86 = \underline{\quad} + 84$ (Carpenter, 2003)

Su objetivo es poner en evidencia visiones *operacionales* del signo de igual, en contextos de igualdades numéricas con operaciones en ambos lados de este símbolo. En particular esta tarea se presta para que se utilice el pensamiento relacional como estrategia para facilitar la resolución de la tarea, dado que se involucran números más grandes y que un breve análisis de la situación permite apreciar una relación entre dos términos presentados respectivamente

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

en el primer y el segundo miembro. Una respuesta de 59 será tomado como evidencia de poner en juego el significado de *equivalencia numérica*. Una respuesta de 143, será considerado una evidencia de atribuir al signo de igual el significado de *operador*. En este caso interesa también observar si los alumnos agregan otra igualdad a la igualdad dada, para atribuir sentido al “+84”.

Actividad 1.d) $\underline{\hspace{2cm}} + 3 = 11 + 5$ (Burgell, 2012)

Esta actividad persigue los mismos objetivos que la anterior, buscando conocer la incidencia de la posición del espacio a completar en el significado del signo de igual que es evocado. Asimismo esta actividad presenta menor dificultad para los cálculos sean realizados mentalmente. Una respuesta de 8 al completar el espacio, será evidencia de una visión del signo de igual como *operador*, mientras que completar con 13 este espacio, será considerado evidencia de atribuir al signo de igual el significado de *equivalencia numérica*.

Actividad 1.e) $5 = \underline{\hspace{2cm}}$

Con esta actividad se busca explorar qué significados ponen en juego los futuros maestros en un contexto de igualdad entre dos expresiones. Se considera que esta tarea podría descolocar a aquellos alumnos que solo perciben al signo de igual como *operador*, ya que no existe una operación planteada en el lado izquierdo del signo de igual. Resulta interesante conocer si estos estudiantes eligen colocar en el espacio la misma representación de este número, otra representación de él (como por ejemplo $\frac{10}{2}$, $\sqrt{25}$, 500%), o si por el contrario eligen anotar una operación que lo tenga como resultado (por ejemplo $10 \div 2$, $2 + 3$, $7 - 2$). En los dos primeros casos descritos, el alumno estaría dando evidencias de considerar el signo de igual como *expresión de una equivalencia*, siendo específicamente el primer caso una *identidad estricta* y en el segundo una *equivalencia numérica*. Por otra parte, en el último caso se estaría evidenciando que acepta la propiedad simétrica de la igualdad dando a este signo el significado de *expresión de una acción*, pero que posiblemente dude en aceptar la propiedad idéntica. Sería en este caso interesante relacionar la respuesta de este alumno con su respuesta a la tarea 2i.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Actividad 2a) $6 \times 8 = 48 + 7 = 55$

Esta tarea busca poner en evidencia la permanencia de la visión operacional del signo de igual al juzgar sentencias en formato de cadena de igualdades. Una respuesta de verdadero, dará evidencias de poner en juego una visión del signo de igual como *operador*, mientras que una respuesta de falso, será considerada como evidencia de poner en juego el signo de igual en su acepción de *equivalencia numérica*.

Actividad 2b) $16 = 7 + 9$ (Burgell, 2012)

Una respuesta de “Falso” será considerada una evidencia de no admitir el significado del signo de igual como *expresión de una acción*. Estos estudiantes podrían estar sujetos a una visión del signo de igual como *operador*, y esto no les permitiría atribuir sentido a esta sentencia al considerar que no se encuentra en el formato “operación igual respuesta”. Una respuesta de “verdadero” será indicio de poner en juego en esta tarea el significado de *expresión de una acción*.

Actividad 2c) $5 + 9 = 14 \div 2$ (Burgell, 2012)

Una respuesta de verdadero, dará evidencia de la puesta en juego del signo de igual como *operador*, mientras que una respuesta de falso, dará evidencia de poner en juego una visión del signo de igual como *equivalencia numérica*. Si bien podría pensarse que esta tarea brinda la misma información que la tarea 2a), consideramos que ambas actividades se complementan y nos permiten conocer más sobre los usos que ponen en juego significados *operacionales* del signo de igual. Concretamente ambas tareas nos permitirán observar la incidencia del formato de la tarea en la puesta en juego del significado *operador*.

Actividad 2d) $4 + 7 = 9 + 2$ (Burgell, 2012)

Una respuesta de verdadero, será considerada evidencia de poner en juego el significado del signo de igual *equivalencia numérica*; por otra parte quienes la respondan como falsa, podrían observar que 9 no es el resultado de sumar 4+7, por lo que se considerará evidencia de poner en juego el signo de igual en su acepción de *operador*.

Actividad 2e) $40 \div 7 = 5$

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

En esta tarea se pretende explorar si los futuros maestros admiten el uso del signo de igual para relacionar una división con el cociente de una división entera con resto no nulo. Este uso no ha sido explorado aún en la bibliografía consultada, pero a partir de la observación de este error a través de nuestra experiencia docente, se decide agregar este ítem. Consideramos que quienes indiquen la sentencia propuesta como “verdadera”, estarán atribuyendo al signo de igual el significado de *operador*, procurando dar una respuesta a continuación del signo de igual, considerando al cociente de la división entera como “el resultado” de la operación planteada.

Cabe agregar que una respuesta de “falsa” no será concluyente en relación al significado atribuido al signo de igual. Un estudiante que ponga en juego el signo de igual en su acepción de *operador*, posiblemente busque verificar si después del signo de igual se encuentra efectivamente el resultado de la operación planteada antes de él y si opta por efectuar la división decimal, concluiría que la sentencia es falsa. Por otra parte, aquel estudiante que atribuya al signo de igual el significado *equivalencia numérica*, podría observar por ejemplo que la fracción $40/7$ no es otro representante del número 5 (como lo sería por ejemplo $35/7$), observando que $40/7$ y 5 no son iguales en valor, arribando también a la conclusión de que la sentencia presentada es falsa. Por este motivo solo nos interesa observar si los estudiantes magisteriales aceptan esta sentencia como verdadera.

Actividad 2f) $\pi = 3,14159$

La tarea pretende explorar si los estudiantes aceptan el uso del signo de igual para relacionar un número con una aproximación del mismo. Se utiliza una aproximación poco usual de π para incentivar que se recuerde que las cifras en la cola decimal de π son infinitas, y que el estudiante centre su atención en aceptar o no el uso del signo de igual para establecer la relación entre el número y su aproximación. Una respuesta de “verdadera”, estará admitiendo como iguales a un número y una aproximación de él, evidenciando un uso del signo de igual bajo el significado de *aproximación*. Por el contrario, quienes la indiquen como falso, indicando que es una aproximación, estarán evidenciando una interpretación del signo de igual como *equivalencia numérica*. Cabe agregar que el fundamento dado por el estudiante para esta tarea es muy relevante, y aquellas tareas que sean clasificadas como verdadero o falso, pero que no se acompañen de una explicación que permita categorizar con seguridad el significado del signo de igual puesto en juego, no serán incluidas para la clasificación de las respuestas. De la misma forma se actuará frente a las producciones que incluyan una

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

explicación, pero que no den respuesta clara sobre la aceptación o no de la sentencia como verdadera.

Actividad 2g) $8 = \dot{2}$

Esta tarea pretende explorar si los estudiantes magisteriales aceptan el uso del signo de igual para vincular un número y un múltiplo de él. Una respuesta de “verdadero”, estará evidenciando aceptar el significado de *indicador de cierta conexión o correspondencia* para el signo de igual, en este caso entre dos objetos matemáticos de distinta naturaleza. Los estudiantes que señalen la afirmación como falsa, presentando argumentos relacionados a que se compara un número con un conjunto de números, o que ocho pertenece al conjunto de los múltiplos de dos pero que no es igual a ese conjunto, darán evidencias de poner en juego el significado de *equivalencia numérica*. Respuestas de “falso” sin estar acompañadas de argumentos o con argumentos diferentes a los mencionados, no serán consideradas como evidencias de atribuir al signo de igual el significado de equivalencia numérica, dado que podrían estar indicando que el estudiante no recuerda o confunde el concepto de múltiplo, y no necesariamente que el estudiante no acepte el uso del signo de igual planteado en esta sentencia.

Actividad 2h) $\frac{1}{3} = \mathbb{Q}$, siendo \mathbb{Q} el conjunto de los números racionales.

Este uso fue detectado en mi práctica como docente por parte de algunos estudiantes como modo de indicar que $1/3$ pertenece al conjunto de los números racionales. Decidimos analizarlo en profundidad incluyéndolo como pregunta del cuestionario. El estudiante que indique esta sentencia como verdadera estará considerando el signo de igual como *indicador de cierta conexión o correspondencia*, al vincular mediante este signo dos objetos matemáticos de distinta naturaleza. Aquellos estudiantes que identifiquen esta expresión como falsa, haciendo referencia a que $1/3$ pertenece al conjunto de los números racionales pero que no coincide con él, se considerará que está poniendo en juego el significado de *equivalencia numérica*. En esta tarea valen las consideraciones realizadas para la actividad 2f en relación a las respuestas sin justificar, dado que las respuestas podrían estar basadas en el desconocimiento de los conjuntos numéricos y no en la consideración del significado del signo de igual.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Actividad 2i) $17 = 17$. (Burgell, 2012)

El estudiante que señale esta sentencia como verdadera, estará aceptando el signo de igual como *expresión de una equivalencia* en su acepción de *identidad estricta*. Una respuesta de falso será considerada evidencia de apreciar al signo de igual como *operador*, dado que el estudiante con esta visión esperaría observar a la izquierda del signo de igual una operación y a su derecha el resultado y no podría atribuir significado a esta sentencia.

Actividad 3

Las siguientes preguntas se refieren al siguiente símbolo: =

- a) ¿Qué significa para ti este símbolo?
- b) Indica la mayor variedad posible de situaciones donde usarías este símbolo.
- c) ¿Cómo lees este símbolo en cada una de las situaciones que planteas?

Esta actividad propuesta por Knuth et al. (2008) y Burgell (2012), pretende explorar de forma abierta otros usos y significados del signo de igual y establecer vinculaciones entre los usos y el lenguaje verbal. Consideramos que esta pregunta posibilitará conocer significados y usos que no han sido contemplados por las dos primeras actividades propuestas en el cuestionario. Los resultados obtenidos serán analizados a la luz del marco teórico propuesto por Molina (2006). Puesto que la consigna invita a cada estudiante a dar múltiples usos y significados del signo de igual, cabe aclarar que para cada estudiante, se recogerán a través de los ejemplos brindados, todos los usos y sus correspondientes significados, considerados a la luz de nuestro marco teórico.

IV. 3 Sobre la aplicación del cuestionario

El cuestionario fue aplicado por quien elabora este trabajo, el día veinticinco de mayo, a los treinta y dos estudiantes de 4to año de magisterio que se encontraban presentes en cada uno de los dos momentos coordinados para su aplicación. Esta se llevó a cabo en dos instancias separadas por cuatro horas, una en el turno matutino con 16 estudiantes del grupo 4to A, y la otra en el turno vespertino con 16 estudiantes del grupo 4to B. Cabe agregar que estos estudiantes no fueron advertidos con anticipación que habrían de realizar una actividad fuera de su rutina; tampoco fueron comunicados los objetivos ni la problemática concreta abordada por este estudio. Las tres actividades del cuestionario fueron asignadas de forma separada y

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

secuenciada, para ser realizadas de forma individual, entregando inicialmente a todos los estudiantes la tarea 1, cuando un estudiante entregaba esta tarea, se le entregaba la tarea 2, y con el mismo criterio, la actividad 3, siendo completado este proceso en aproximadamente 45 minutos. Se adoptó esta forma de administrar el cuestionario para evitar modificaciones en las respuestas y poder captar respuestas espontáneas ante un eventual aprendizaje promovido a partir de la realización de las actividades.

IV. 4 Sobre la elección del caso de estudio

La selección del caso que presentamos en este trabajo, surgió después de estudiar las 32 respuestas al cuestionario, a la luz del marco teórico en el que se sustenta esta investigación. Los aspectos considerados para seleccionar el caso fueron dos. Por un lado, que el caso reflejara la diversidad de visiones respecto al signo de igual que caracterizó a este grupo de estudiantes; por otra parte se buscó que además presentara algún aspecto que resultara de nuestro interés para analizar con mayor profundidad. En este sentido observamos que la estudiante que denominamos como “A10” presenta a lo largo de su trabajo en el cuestionario y de forma alternada, visiones *operacionales* y *relacionales* del signo de igual. Asimismo, nos interesó conocer más sobre este caso, dado que es el único en completar la igualdad $_ = 16 - 4$ con 4×4 , aún habiendo aceptado la sentencia $16 = 7 + 9$ como verdadera. Esta estudiante, de 24 años, tiene aprobadas todas las asignaturas relacionadas a matemática, y asiste al grupo 4to A.

IV.5 Recopilación de material para trabajar en la entrevista

Con el objetivo de evidenciar las múltiples respuestas que los escolares podrían dar a una misma tarea que involucra al signo de igual y de trabajar en base a estas producciones durante la entrevista, se diseñó y aplicó un cuestionario a escolares de 4to y 5to año. En este se incluyeron actividades que permitieran la puesta en juego por parte de los escolares de al menos un par de significados diferentes del signo de igual y que en su conjunto, permitieran la emergencia de los siguientes significados del signo de igual: *operador*, *equivalencia numérica*, *expresión de una acción*, *identidad estricta* e *indicador de cierta conexión o correspondencia*. Una vez generado este material, la selección de las producciones de los

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

escolares que serían utilizadas en la entrevista se realizó con la premisa de presentar a la estudiante magisterial, para cada tarea, al menos una pareja de trabajos cuyas respuestas evidenciaran visiones contrapuestas del signo de igual. Los casos seleccionados fueron: Delfina (Actividad 1, 4to año, 9 años); Julieta (Actividad 1, 5to año, 10 años); Alejandra (Actividad 2, 4to año); Valentina (Actividad 2, 4to año, 9 años); Agustina (Actividad 2, 4to año, 9 años). Sus producciones se adjuntan en los anexos.

IV.6 Diseño preliminar de la entrevista

En base a las respuestas al cuestionario dadas por la estudiante que constituye nuestro caso de estudio, se diseñó una serie de situaciones que pautaran la entrevista. Se distinguen en estas dos etapas.

La primera atiende al objetivo de explorar algunos aspectos del conocimiento específico para la enseñanza en relación al signo de igual (Ball et al., 2008), y utiliza como instrumentos para promover la discusión, una propuesta “en blanco” del cuestionario que realizaron los escolares (que llamaremos cuestionario B) y luego las producciones de los escolares seleccionadas.

La segunda etapa busca profundizar el conocimiento de los significados del signo de igual construidos por esta estudiante y las razones que la llevan a dar una u otra respuesta; utiliza como instrumento el cuestionario resuelto por esta misma alumna magisterial.

En la primera etapa se busca inicialmente indagar si esta estudiante anticipa posibles respuestas de los escolares en relación a tareas que involucran al signo de igual, más allá de la suya propia. Para lograr lo anterior, en primer término se le pedirá su propia respuesta a las tareas incluidas en el cuestionario “B” adjunto en el anexo y luego se le solicitará que indique posibles respuestas de los escolares a dichas actividades. En segundo lugar se busca investigar si los futuros maestros reconocen los significados del signo de igual puestos en juego por los escolares a través del análisis de sus producciones escritas, al resolver tareas que involucran a este símbolo matemático. Esto será llevado a cabo mostrándole, una a una, las producciones de los escolares seleccionadas a tal efecto, solicitándole que explique qué podría estar pensando un escolar para dar tal respuesta. En este sentido se considera oportuno que primeramente se muestre la producción que se corresponda con la visión del signo de igual

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

que ella misma pone en juego en la primera etapa de la entrevista, para luego presentar otra tarea cuya respuesta esté marcada por una visión del signo de igual diferente a ésta. Cabe acotar que se estará particularmente atento a observar si la estudiante es capaz de admitir como válidas otras respuestas a las actividades, realizadas a partir de visiones del signo de igual diferentes a las que ella misma puso en juego para cada tarea concreta.

En la segunda etapa se busca profundizar la exploración de los significados del signo de igual, realizando preguntas que atiendan a complementar sus respuestas al cuestionario, en especial en los casos en los que no se explicitaron los procesos seguidos para dar una respuesta. Esto nos permitirá por ejemplo verificar que las justificaciones que validan la tarea de verdadero/falso se corresponden con nuestras consideraciones iniciales y completar las tareas y justificaciones omitidas por la estudiante.

Capítulo V: Resultados y análisis

En este capítulo se presentará en primer lugar las primeras impresiones extraídas a partir del análisis de las respuestas al cuestionario y posteriormente se presentará el análisis del caso elegido para nuestro estudio.

V.1 Primeras impresiones sobre las respuestas al cuestionario

A continuación se presentan los resultados y un análisis inicial de las respuestas. Posteriormente se adjuntan apreciaciones generales, que abordan tres dimensiones: usos y significados predominantes en nuestra población; usos que promueven significados no matemáticos del signo de igual; el potencial de las tareas.

Los trabajos de los estudiantes magisteriales fueron clasificados en A o B según el grupo de cuarto año al cual asisten y se le asignó a cada uno de ellos, de forma aleatoria un número del 1 al 16. Así cada estudiante quedó identificado con un código formado por una letra (A o B) seguido de un número del 1 al 16.

V.1.1 Resultados y análisis inicial de las respuestas dadas por los estudiantes magisteriales al cuestionario

Tabla 1: Resultados de la Actividad 1, indicando frecuencias absolutas de aparición de cada significado, y ejemplos de las respuestas obtenidas.

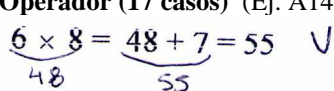
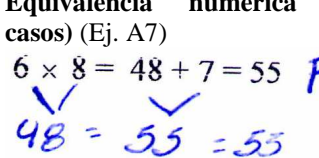
Actividad 1	Significados del signo de igual puestos en juego		
1a) $90 \div 3 = _ + 3 = _$	Operador (27 casos) (Ej. A11) “realizo la operación como operación combinada”		Equivalencia numérica (5 casos) (Ej. B6) “primero calculé $90 \div 3$ para saber el resultado final de la suma y luego le resté 3”
1b) $_ = 16 - 4$	Operador (1 caso) (Ej. A10) “Busqué dos números que multiplicados me dieran como resultado 16”	Expresión de una acción (20 casos) “pienso el resultado y lo pongo al revés” (Ej. A11) “En este caso teníamos la cuenta en el lugar que comúnmente tenemos al resultado y realicé la cuenta correspondiente mentalmente” (Ej. B16) Equivalencia numérica (5 casos) (Ej. A8) “Puse 6×2 ya que el resultado de esta operación es 12” Expresión de una acción y equivalencia numérica (6 casos) (Ej. A7) Ej. $12 = 16 - 4$ o $6 + 6 = 16 - 4$	
1c) $57 + 86 = _ + 84$	Operador (6 casos) (Ej. A8) “Hice una suma $57 + 86 = 143$ ”	Operador y Equivalencia numérica (1 caso) (Ej. B5) “Se suma $57 + 86$ y eso da 143. Pero dudo porque podría ser	Equivalencia numérica (25 casos) (Ej. B2) “Agregué dos al primer término (57) porque le

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

		57+86=59+84. Ambas operaciones son iguales”	faltaban al último término (84)” (Ej. B9) “sumé 57+86 que me da 143 y a este resultado le resté 84 para saber el número que faltaba”
1d) $_ + 3 = 11 + 5$	Operador (1 caso) (Ej. B12) “ambos signos iguales se suman”	Operador y Equivalencia numérica (1 caso) (Ej. B16) “Teniendo...11 como referente del resultado puse un 8 para completar la suma y me diera 11.” Escribiendo $8 + 3 = 11 + 5$ Plantea luego: $13+3=16$...Pero si tomamos el resultado todo en sí y lo calculamos tendremos 16 siendo el número que me falta. No sea el 8 como en la primera resolución sino que esta vez el número que me faltará va a ser un 13”	Equivalencia numérica (30 casos) (Ej. A3) “busqué un número que sumado a 3 me diera 16”
1e) $5 = _$	Correspondencia, Identidad, expresión de una acción y equivalencia numérica (1 caso) (Ej. B13) “...considerando a un número cualquiera una totalidad puedo decir entonces que (5) es el 100% en este caso...” completa de las siguientes formas: 5=100%; 5=5; 5=2+3; 5=5,0.	Identidad estricta (5 casos) (Ej. B12) “Al no existir números para sumar o restar, si se encuentra solo un número el resultado será el mismo” Equivalencia numérica (3 casos) (Ej. B7) “Pensé en un número romano ya que hay que colocar un número” respondiendo $5=V$ Expresión de una acción (15 casos) (Ej. B1) “Busqué una suma que me diera 5” $5=3+2$ Identidad estricta y expresión de una acción (8 casos) (Ej. B4) “ $5=5; 5=25-20$; Dichas operaciones dan resultado 5”	

Tabla 2: Resultados de la Actividad 2, indicando frecuencias absolutas de aparición de cada significado, y ejemplos de las respuestas obtenidas.

Actividad 2	Significados	
2a) $6 \times 8 = 48 + 7 = 55$	Operador (17 casos) (Ej. A14)  En realidad estoy confundida. Puedo separar en términos $6 \times 8 = 48$ y $48 + 7 = 55$ y luego al resultado. Sin embargo al estar $48 + 7$ no sé si el resultado que debe haber tiene que sumar 48 55. Ahí está mi duda.	Equivalencia numérica (15 casos) (Ej. A7)  “ $6 \times 8 = 48 \neq 55$. En este caso lo que está mal es 6×8 ”
2b) $16 = 7 + 9$	Expresión de una acción (32 casos) “V: $16 = 16$ ” (Ej. B10) “V: el resultado está bien” (Ej. A5)	
2c) $5 + 9 = 14 \div 2$	Operador (1 caso) “V: El resultado de la suma es 14, luego cuando dividimos entre 2, el resultado es 7” (Ej. A8)	Equivalencia numérica (31 casos) “F: No es correcta la igualdad, no da lo mismo a ambos lados” (Ej. A11) “F: El resultado de la primer operación coincide con el primer número de la siguiente pero por orden jerárquico debe hacerse primero la división lo cual no da el resultado” (Ej. A2)

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

		Equivalencia numérica (32 casos)		
2d) $4+7=9+2$	“V: Ambos resultados de las operaciones es el mismo” (Ej. A14)			
2e) $40 \div 7=5$	Operador (5 casos) “V: $\begin{array}{r} 40 \\ 5 \overline{) 5} \end{array}$ ” (Ej. A4) “V: (Resto 5)” (Ej. B11)	Sin clasificar (24 casos) 18 estudiantes responden falso. (Ej. A2) “F, el resultado de la división no es 5” 3 estudiantes responden verdadero sin argumentar. (Ej. A7) 4 estudiantes responden verdadero en función de argumentos inválidos. (Ej. A9) “V, $7 \times 5=40$ ”		Sin hacer (3 casos)
2f) $\pi = 3,14159$	Equivalencia numérica (6 casos) (Ej. A6) “F: El número π tiene más números después de la coma”	Aproximación (8 casos) (Ej. B9) “V: Se puede redondear el número así como está”	Sin clasificar (16 casos) 10 estudiantes responden verdadero sin justificar y 6 responden falso sin justificar.	Sin hacer (2 casos)
2g) $8 = \overset{\cdot}{2}$	Correspondencia (18 casos) (Ej. B7) “V: 8 <u>es</u> múltiplo de dos”	Equivalencia numérica (1 caso) (Ej. A2) “F, no coincide”	Sin clasificar (3 casos) Responden Falso pero no justifican	Sin hacer (10 casos)
2h) $\frac{1}{3} = Q \dots$	Correspondencia (19 casos) (Ej. B7) “V: Una fracción <u>es</u> racional”	Equivalencia numérica (1 caso) (A16) “F: $1/3$ pertenece a Q pero no es Q”	Sin clasificar (4 casos) Responden Falso sin justificar	Sin hacer (8 casos)
2i) $17 = 17$	Identidad estricta (29 casos) “V: Se dan para las dos partes el mismo resultado” (Ej. A4) “V: un número es equivalente e igual a si mismo” (Ej. B13)			Sin hacer (3 casos)

Cabe agregar que las últimas cinco tareas de la actividad 2, fueron dejadas sin hacer por algunos estudiantes. Consideramos que dichas tareas involucran conocimientos específicos que posiblemente esos estudiantes no lograron evocar. Por otra parte, otros estudiantes respondieron la tarea con verdadero o falso pero no dieron argumentos que nos permitiera identificar si admiten o no el uso del signo de igual presentado en la tarea. Como fuera previsto en el análisis a priori de cada una de estas actividades, estas respuestas no fueron consideradas evidencias de un significado en particular del signo de igual, y son presentadas en la tabla como “sin clasificar”.

En relación a la actividad 3, frente a la solicitud de explicitar el significado personal del signo de igual, la mayor parte de los estudiantes aluden a la palabra “igualdad”, seguido en frecuencia por alguna de las siguientes palabras: “es igual”, “igual a”, o simplemente “igual”. Sólo tres estudiantes se refieren al signo de igual como el “resultado de una operación

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

planteada de manera horizontal”, “el resultado” o “donde termina la operación”, evidenciando a través de estas palabras que piensan en el signo de igual como un símbolo *operador*.

Por otra parte, frente a la solicitud de dar variedad de situaciones donde lo utilizarían, las tres cuarta parte de los estudiantes ejemplifican con situaciones de uso del signo de igual que evidencian el significado del *operador*. Menos de la tercera parte de los estudiantes ejemplifica poniendo en juego el significado de *equivalencia numérica*. Más escasos son los usos presentados que evidencian los significados de *identidad* estricta, *propuesta de actividad*, *expresión de una acción*, *asignación de un valor numérico*, *indicador de cierta conexión o correspondencia* y *expresión de una equivalencia condicional*. Cabe destacar que algunos estudiantes ejemplificaron con una multiplicidad de usos asociados a diferentes significados del signo de igual. Siete estudiantes hicieron referencia de forma conjunta, al uso del signo de igual en su significado de *operador* y de *equivalencia numérica*. La estudiante “A1” expone varios ejemplos que involucran usos asociados a seis significados diferentes para el signo de igual: *operador* ($49 \div 7 = 7$); *expresión de una acción* ($49 = 7 \times 7$); *ecuación* (en contexto de regla de tres, $x = \frac{45 \times 30}{100}$); *identidad estricta* ($14 = 14$); *equivalencia por definición o por notación* ($2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$); *indicador de cierta conexión o correspondencia* ($7 = N$; $2,4 = Q$). En relación al último uso del signo de igual, se entiende que esta estudiante se refiere con N y Q a conjuntos numéricos y no a una variable, razón que lleva a clasificar el significado como se hizo y no como definición de un objeto matemático o como asignación de un valor numérico.

Respecto a la tarea 3c, cabe aclarar que veinte estudiantes hacen referencia al signo de igual refiriéndose a su nombre (es igual, igual a, igual). Quince estudiantes se refieren al signo de igual con expresiones que denotan su significado como Expresión de una equivalencia (igualdad, equivale a, vale lo mismo que, lo mismo que, misma cantidad, partes iguales, mismo valor, es lo mismo). Tres estudiantes hacen referencia a él en su acepción de *operador* (resultado de una operación, el resultado es, tiene tal resultado). Dos estudiantes se refieren al signo de igual en su acepción de correspondencia (corresponde, “las mujeres son iguales a los hombres en sus derechos”). Finalmente un estudiante se refiere al signo de igual en su acepción de aproximación (parecido y similar).

V.1.2 Usos y significados predominantes en la población estudiada

Observamos que el significado operacional en su acepción de *operador* surgió pobremente al describir un significado personal del signo de igual en la tarea 3a, pero sí se puso en evidencia y se destacó frente a los otros, al ejemplificar usos del signo de igual en la tarea 3b. Interpretamos esta situación entendiendo que los usos escolares del signo de igual, alimentan este significado, y consideramos que estos usos son reflejo de las situaciones a las que son y han sido expuestos, los futuros maestros a lo largo de todo su proceso de escolaridad y práctica docente.

Un análisis similar nos permite apreciar que el significado de expresión de una equivalencia en su sentido genérico, es el más popular al pedir una definición “personal” del signo de igual, haciendo referencia al concepto de igualdad, igual valor, etc. Sin embargo, cuando se piden usos del signo de igual, menos de la tercera parte de nuestra población hace referencia a este concepto. Todo esto nos lleva a apreciar que los usos asociados a cada una de las acepciones de la categoría *expresión de una equivalencia* son poco familiares para estos estudiantes.

Por otra parte, el caso de la estudiante “A1” quien propone ejemplos que involucran seis significados diferentes del signo de igual según la categorización de Molina (2006), nos mostró claramente la coexistencia no solo de dos tipos de visiones (*operacionales* y *relacionales*) del signo de igual en una misma estudiante, sino además deja de manifiesto la multiplicidad de significados del signo de igual, que pueden coexistir en un individuo.

En otro sentido, agregamos que si bien la actividad 1a) invitaba a dar más de una respuesta a cada tarea, no fue frecuente encontrar respuestas que incluyeran más de una forma de completar un espacio en blanco, que implicaran al signo de igual en más de un significado, lo cual sugiere que visiones *operacionales* y *relacionales* del signo de igual rara vez son puestas en juego en una misma tarea. Sin embargo, constatamos dos casos en los que esto sí sucedió. Los estudiantes (“B5” y “B16”) dieron dos respuestas a una misma tarea (1c y 1d respectivamente), una de sus respuestas en base a un significado *operacional* (concretamente el significado de *operador*) y otra respuesta en base a un significado *relacional* (en su acepción de equivalencia numérica). Estos estudiantes parecen reconocer la existencia de múltiples significados del signo de igual, y al menos en uno de los casos, el estudiante parece aceptar a ambos significados como válidos para dar solución a esta tarea. Interesaría conocer los pensamientos de este estudiante para legitimar la aceptación de dos respuestas

aparentemente correctas para estas tareas. En el otro caso mencionado, el estudiante sí pone de manifiesto su duda. Presenta el resultado obtenido al poner en juego el signo de igual en su acepción de *operador*, como producto de un proceso institucionalizado, “se suma $57+86$ y eso da 143” (completando el espacio en la sentencia $57+86=\underline{143}+84$). Esto parece indicar que el estudiante se maneja mediante la ejecución de mecanismos estandarizados de resolución de tareas, y que al parecer, aprecia que este procedimiento corresponde ser puesto en juego en esta situación.

Por otra parte, constatamos que todos nuestros estudiantes han construido para el signo de igual el significado de equivalencia numérica, pues logran validar igualdades con operaciones a ambos lados del signo de igual. Sin embargo, menos del 20% de los futuros maestros ponen en juego una visión relacional del signo de igual para completar la igualdad $90 : 3 = \underline{\quad} + 3 = \underline{\quad}$, lo cual refleja que la mayor parte de estos estudiantes ven en algunos contextos al signo de igual como un símbolo *operador*, que los lleva a dar una solución incorrecta en un planteo de la aritmética elemental. Consideramos que 4 de cada 5 estudiantes, mantiene visiones *operacionales* del signo de igual, que coexisten con múltiples visiones del signo de igual (*equivalencia numérica, identidad, expresión de una acción*, entre otras) y que dependiendo de la tarea a la que se enfrentan, ponen en juego uno u otro significado.

Cabe agregar que todos los estudiantes admiten el uso del signo de igual en su acepción de *expresión de una acción* cuando la tarea es presentada en el formato de V o F, pero que muchos de ellos prefieren completar la sentencia $\underline{\quad} = a - b$ con una operación, haciendo referencia en algunos casos, a que esta expresión estaba “al revés”. Por otra parte, una estudiante (A10) completa una sentencia de esta forma con una operación que da como resultado solo el primer término del segundo miembro, lo cual evidencia la puesta en juego del signo de igual como *operador*. Esta situación, agregada al hecho de una mínima aparición de situaciones de uso del signo de igual en su acepción de *expresión de una acción* al dar los estudiantes ejemplos de utilización de este signo, nos llevan a observar que si bien los futuros maestros aceptan este significado, no se sienten cómodos con su uso. Consideramos que posiblemente este hecho tenga relación con la baja frecuencia de uso de este tipo de sentencias en los contextos que estos estudiantes toman como referente (IFD, escuela, libros de texto).

V.1.3 Usos que promueven significados no matemáticos del signo de igual

Nos interesa analizar en este apartado, algunos usos del signo de igual que violan alguna de sus propiedades matemáticas, pero cuyos significados no quedan contemplados bajo la denominación de operacionales. Consideramos que estos usos, asociados a significados como los que se presentan a continuación, requieren igual atención que el uso del signo de igual en su acepción de *operador o propuesta de actividad*, más estudiados por la investigación.

El primero tiene que ver con la respuesta de un estudiante (B13) proponiendo completar la tarea 1e) como $5=100\%$. Puesto que se trata de un uso impreciso del signo de igual, que vincula dos objetos matemáticos de igual naturaleza y además, que este estudiante acompaña su trabajo con una explicación que alude a que el número 5 representa “el total”, entendemos que el significado de nuestro marco teórico que se corresponde con este uso es el de *indicador de cierta conexión o correspondencia*. Por otra parte, consideramos que este uso del signo de igual no ha sido reportado por la investigación y podría complementar los usos asociados al significado de *indicador de cierta conexión o correspondencia* al considerar el marco teórico aportado por Molina (2006) con la ampliación propuesta por Burgell (2012).

En segundo lugar, observamos que este mismo significado lleva a estudiantes a aceptar que $\frac{1}{3} = Q$ (Q conjunto de números racionales) o que $8 = \dot{2}$. Destacamos que más de la mitad de los futuros maestros aceptaron el primero de los dos usos expuestos para el signo de igual, lo cual nos sorprendió ampliamente, dado que este uso no había sido reportado en la literatura consultada. En el segundo caso, si bien superó al primero en frecuencia, no nos sorprende dado que Burgell (2012) reporta este uso en el nivel secundario, y reconocemos el mismo como habitual en diferentes niveles educativos. No ocurre lo mismo con el primer caso, la expresión $\frac{1}{3} = Q$ no es empleada en el ámbito académico; cabe observar que en este caso el signo de igual está reemplazando al símbolo pertenece y que la traducción verbal que parece acompañar a los tres usos asociados al significado de *indicador de cierta conexión o correspondencia* es la palabra “es”, como queda evidenciado en las tablas 1 y 2.

Observamos que si bien ningún estudiante ejemplifica el uso del signo de igual en su significado de *aproximación*, lo cual nos llevaría a conjeturar que probablemente los estudiantes duden en aceptar este uso, se aprecia que la mayoría de los futuros maestros aceptan este uso en una tarea de verdadero o falso. Entendemos que el trabajo con los

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

escolares muchas veces requiere del uso de aproximaciones, por ejemplo al trabajar con π , y que ciertos intentos de simplificar (o trivializar) los contenidos matemáticos podrían llevar a utilizar el símbolo = en sustitución del símbolo \sim .

Finalmente exponemos que cinco estudiantes aceptan que el cociente de la división entera coincide con el número escrito a la derecha del signo de igual en las divisiones presentadas, aún cuando el resto es no nulo, e incluso cuando el cociente no coincide con la aproximación entera de la división indicada. El significado atribuido al signo de igual en este caso, como se indicó en el análisis a priori, es el de *operador*, en el entendido que los estudiantes procuran observar después del signo de igual, la respuesta a la operación planteada antes de él. Observamos que en este caso, como en otros en este mismo cuestionario, este significado lleva a los estudiantes a aceptar usos del signo de igual que violan las propiedades que lo definen.

V.1.4 Apreciaciones sobre el potencial de las tareas

Como advierten Weinberg (2010) y Hartzler (2013) la cadena de igualdades resultó ser un contexto de tarea poderoso para evidenciar visiones *operacionales*, especialmente presentado en el formato de completar espacios en blanco. Entendemos que la doble igualdad brinda un pretexto para darle sentido a la operación planteada en el segundo miembro, y no advierte a los estudiantes que podrían poner en juego visiones *operacionales*, de que hay algo incorrecto en esa sentencia. Se aprecia que el formato de tareas V o F da otros elementos respecto a las tareas de completar espacios, que le permiten al estudiante advertir que hay algo incorrecto en la sentencia.

Contrariamente a lo observado por Hartzler (2013), en nuestra población de estudio las tareas de completar espacios en blanco resultaron más potentes para evidenciar visiones *operacionales*, que el formato de tareas V o F. Consideramos factible que al tener todos los números en la sentencia, los estudiantes realicen las operaciones y comparen los valores resultantes para cada miembro, estrategia que no puede ser puesta en juego inicialmente en todos los casos, en las tareas de completar espacios.

También en relación a tareas de completar espacios en blanco, pero en este caso con sentencias que incluyen operaciones a ambos lados del signo de igual, apreciamos que la

operación planteada en el segundo miembro incide en relación a la visión que se pone en juego. Algunos estudiantes hacen referencia a que “los signos de mas y menos separan términos”, o que “realizo la operación como una operación combinada”, como argumentos para validar respuestas que evidencian visiones *operacionales* del signo de igual, lo que nos hace pensar que la presencia de los signos \times y \div está íntimamente relacionada con la puesta en juego de una u otra visión. Por otra parte, al observar que el 25% de los estudiantes pone en juego una visión operacional del signo de igual al completar una sentencia de la forma $a + b = ___ + c$, y que solo el 6% lo hace al completar una sentencia de la forma $___ + b = c + d$, apreciamos que también la posición del espacio a completar es relevante. Entendemos que mientras que en el segundo caso, el estudiante posiblemente sume $c + d$ pero no encuentre un espacio donde colocar el resultado (situación que lo lleva a plantear, de forma escrita o mental otra sentencia y resolverla, promoviendo un análisis que requiere mayor atención), en el primer caso el formato de la tarea permite completar rápidamente este espacio con el resultado de la operación planteada, coherente con la idea “operación igual respuesta” y promueve la puesta en juego del signo de igual en su acepción de *operador*. En relación a este formato de sentencias, observamos que las tareas de V o F promueven la puesta en juego de visiones *relacionales* del signo de igual, ya que todos los estudiantes aceptan como verdadera la sentencia $4 + 7 = 9 + 2$. Nuevamente encontramos discrepancia con lo expuesto por Hartzler (2013) sobre la apreciación de que las tareas en formato V o F activan la puesta en juego de visiones *operacionales* del signo de igual.

Por otra parte, observamos que la tarea de completar espacios en blanco en $5 = ___$, acompañada de una invitación a completar de las formas que se considere posibles dicho espacio, resultó rica para poner en evidencia los múltiples significados que un mismo estudiante puede atribuir al signo de igual, en una misma tarea.

V.2 Análisis de un caso

Como ya mencionamos, el caso de estudio fue seleccionado a partir de las treinta y dos respuestas al cuestionario, teniendo en cuenta que este caso reflejara la diversidad de visiones respecto al signo de igual que caracterizó a este grupo de estudiantes. En particular, observamos que la estudiante A10, alternó las visiones *operacionales* y *relacionales* del signo

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

de igual puestas en juego en múltiples oportunidades al realizar las tareas del cuestionario, y fue la única en completar la igualdad $__ = 16 - 4$ con 4×4 , aún habiendo aceptado la sentencia $16 = 7 + 9$ como verdadera, lo que nos condujo a elegirla como caso de estudio.

Esta estudiante, de sexo femenino y 24 años de edad, tiene aprobadas todas las asignaturas relacionadas a Matemática, y asiste al grupo 4to A.

V.2.1 Respuestas al cuestionario de la estudiante "A10" y su análisis

A continuación se muestran las respuestas de esta estudiante en las actividades 1 y 2, indicando nuestra interpretación del significado del signo de igual que ella pone en juego, adjuntando una breve fundamentación.

a) $90 \div 3 = \underline{30} + 3 = \underline{33}$

Realicé la división 90 dividido 3 y al resultado que obtuve le sumé 3.

El total fue igual a 33.

La estudiante completa el espacio colocando a continuación del signo de igual el resultado de la operación planteada antes de él, coherente con el formato "operación igual respuesta" característico de la visión del signo de igual como *operador*. Se observa que en la primera igualdad, esto lleva a no respetar la equivalencia numérica.

Mantiene esta visión en las dos actividades que le siguen:

b) $\underline{4 \times 4} = 16 - 4$

Busqué dos números que multiplicado me diera como resultado 16.

c) $57 + 86 = \underline{143} + 84$

Realicé la suma $57 + 86$ y obtuve como resultado 143.

Observamos que continúa poniendo en juego el signo de igual en su acepción de *operador*. Aparentemente la búsqueda de la equivalencia numérica entre las dos expresiones colocadas a ambos lados del signo de igual, no es puesto en juego en las tres primeras actividades.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Sin embargo, hay un cambio notorio del significado atribuido al signo de igual en la tarea 1d, lo cual llama la atención dado que las tareas 1c y 1d corresponden ambas a sentencias con operaciones a ambos lados del signo de igual. La estudiante pasó en la tarea 1d, de ver el signo de igual como *operador* a verlo como *equivalencia numérica*.

d) $\underline{12} + 3 = 11 + 5$

Realicé la suma de $11 + 5 = 15$ y luego encontré el número que sumado 3 me da 15.

Esto nos da elementos para conjeturar que aquellas tareas que plantean el espacio a completar a continuación del signo de igual, promueven visiones *operacionales* del signo de igual, mientras que aquellas que contienen el espacio ubicado en otro sitio promueven *visiones relacionales* de este signo. Se procurará validar esta conjetura en la entrevista.

En la tarea 1e, la estudiante pone en juego al signo de igual en su acepción de *identidad*, manteniendo también la equivalencia pero eligiendo en este caso la misma representación del número 5.

e) $5 = \underline{5}$

En relación a la actividad 2, nuevamente frente a una cadena de igualdades, esta estudiante pone en juego el signo de igual en su significado de *operador*:

✓ a) $6 \times 8 = 48 + 7 = 55$ Es verdadero porque la multiplicación $6 \times 8 = 48$ y si le sumo 7 me da 55.

Se observa que aunque esta estudiante dio muestras de atribuir al signo de igual el significado de equivalencia numérica, al enfrentar una cadena de igualdades pone en juego una vez más una visión operacional (acepción *operador*), sin dar evidencias de preocuparse por constatar que las expresiones a un lado y otro del signo de igual sean iguales en valor, estrategia aplicada aparentemente en la tarea anterior. Observamos aquí el potencial de las cadenas de igualdades para poner en evidencia este tipo de visiones.

En la tarea 2b, la estudiante acepta la sentencia como verdadera, evidenciando que acepta el significado de *expresión de una acción* para el signo de igual, si bien esta estudiante en la tarea 1b no pone en juego ese significado para completar el espacio a la izquierda del signo de

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

igual en una tarea similar, lo que podría denotar cierta dificultad para dar este uso al signo de igual.

✓ b) $16 = 7 + 9$ Verdadero porque la suma $7 + 9 = 16$

Posteriormente, en las tareas 2c y 2d, evidencia poner en juego el signo de igual en su acepción de *equivalencia numérica*, buscando comparar las cantidades representadas a un lado y otro del signo de igual.

F c) $5 + 9 = 14 \div 2$
$$\begin{array}{r} 5 \\ + 9 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 2} \\ 0 \end{array}$$
 ✓ d) $4 + 7 = 9 + 2$
$$\underbrace{4 + 7}_{11} = \underbrace{9 + 2}_{11}$$

La consideración de la sentencia 2c como falsa, es coherente con lo manifestado anteriormente sobre la incidencia de la prioridad de las operaciones en la resolución correcta de este tipo de tareas. Pensamos que al apreciar que en una misma sentencia se encuentran operaciones con distintos órdenes de prioridad, posiblemente se activen ciertos procesos de atención a los convenios de prioridad, pensando primero en el resultado de dividir 14 entre 2, encontrando que la sentencia $5 + 9 = 7$ como falsa. Esto no se puede constatar ya que no existe una explicación de la alumna, por lo que será otro de los aspectos a profundizar en la entrevista.

✓ e) $40 \div 7 = 5$
$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 7} \\ 5 \end{array}$$

En la actividad 2e, la estudiante busca validar mediante la ejecución del algoritmo escrito de la división, que el resultado de la operación planteada coincide con el número colocado a la derecha del signo de igual. Se conjetura que esta estudiante admite como resultado de dividir un número entre otro al cociente (podría también ser al resto, pero es menos probable) de la división entera, aún cuando el resto es diferente de cero, atribuyendo al signo de igual el significado de *operador*. Esta conjetura también buscará ser verificada durante la entrevista.

Las preguntas 2f y 2h no pueden ser analizadas, puesto que en el primer caso, la estudiante asignó un valor equivocado a π , por lo que la comparación realizada difiere en sustancia con

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

la propuesta. En el segundo caso, la alumna no da una respuesta a la pregunta de V/F. En la entrevista se buscará completar o complementar estas respuestas.

F ~~h)~~ f) $\pi = 3,14159$ $\pi = 3,141516$

h) $\frac{1}{3} = Q$, siendo Q el conjunto de los números racionales

Por otra parte, en la tarea 2g esta estudiante admite el uso del signo de igual para establecer una *correspondencia* entre dos objetos matemáticos diferentes, un número y un conjunto de números.

✓ g) $8 = 2$ 8 es múltiplo de 2

En base a las respuestas a las tareas 1e y 2i, se observa que esta estudiante evidenció atribuir al signo de igual el significado de *Identidad estricta*.

✓ i) $17 = 17$

Al observar las respuestas obtenidas en la actividad 3 apreciamos que si bien en contexto aislado, la estudiante no hace referencia al signo de igual denotando una visión operacional, y se refiere al mismo como “igual a...”, al continuar observando las respuestas en las otras dos partes del esta actividad se observa una clara visión operacional del signo de igual, en sus dos acepciones, como *propuesta de actividad* (3b) y como *operador* (3c).

a)- Ese símbolo significa igual a.

b)- $a+b=$
 $a-b=$
 $a \times b=$
 $a \div b=$

c)- lo leo como el resultado de dos factores.

Estas visiones *operacionales*, ya habían sido evidenciadas a lo largo de su trabajo en las actividades 1 y 2, lo cual marca una coherencia entre sus propias respuestas, y señala que, aunque ciertas tareas como la 1d) puedan promover significados *relacionales* del signo de igual, enfrentar estas tareas no modifica de forma permanente los significados admitidos del signo de igual. Por otra parte, si bien la Actividad 1 invitaba a dar múltiples respuestas para

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

los espacios en blanco, esta estudiante no lo hizo en ninguna oportunidad, lo que nos hace pensar que las visiones del signo de igual no fueron puestas en juego de forma simultánea, o al menos no fueron ambas aceptadas como correctas a nivel personal. En la entrevista interesará conocer cómo maneja todas estas situaciones, al presentarle para su análisis producciones de estudiantes que den respuestas basadas en visiones del signo de igual diferentes a las que ella pone en juego en cada situación.

En síntesis a partir del análisis del cuestionario, podemos afirmar que en esta estudiante coexisten, al menos cinco significados del signo de igual (*operador, equivalencia numérica, identidad estricta, indicador de cierta conexión o correspondencia, propuesta de actividad*). Sin embargo, ninguna de ellas parece surgir de forma conjunta con otra, y a esta estudiante no se le plantean aparentemente conflictos en relación a cuál de todos los significados atribuidos al signo de igual es necesario poner en acción frente a cierta tarea. Este aspecto esperamos observarlo también durante la entrevista.

V.2.2 Entrevista del caso “A10” y su análisis

La entrevista se llevó a cabo el día 14 de junio en el propio instituto al cual asiste esta estudiante, siendo esta sesión audio grabada y luego transcrita. En este apartado se enlistan las observaciones extraídas de la entrevista, cada una de ellas seguida de un punteo que contiene fragmentos de la misma y un breve análisis. Este punteo adjunta las evidencias que consideramos que sustentan las observaciones realizadas. Los fragmentos textuales de la entrevista serán indicados con letra cursiva, a la investigadora se la designa con la inicial E, mientras que a la estudiante se le designa como A10.

Observación 1: Frente a las cadenas de igualdades, la estudiante pone en juego solamente el signo de igual en su acepción de *operador*, sin dar evidencias de cuestionar el significado que atribuye al signo de igual, aún frente a una tarea de una escolar que da solución a una de estas cadenas de igualdades, poniendo en juego el significado de *equivalencia numérica*.

Completa con 8 y 9 los espacios en $5+3 = _ + 1 = _$, evidencia poner en juego la visión de *operador*, respondiendo que “*haría esta suma ...8...+ 1...9*”, y mantiene su respuesta

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

(incorrecta) frente a la propuesta de corregir las producciones de una escolar, Delfina, que completa al igual que ella esta sentencia, indicando “...para mí está bien”

Frente a la producción de “Julieta” (producción de una alumna de quinto año de escuela) que completa correctamente esa sentencia poniendo en juego la noción de *equivalencia numérica*, no da evidencias de considerar el signo de igual en un sentido relacional, y sanciona esta producción como incorrecta, sin buscar entender los pensamientos de esta escolar, ni advertir que podría existir otra forma de apreciar el signo de igual, o que el aparente “error” de Julieta no es tal, y que sus propias visiones no consideran la equivalencia numérica.

“E: ...Vamos a mirar ahora el trabajo de Julieta. Julieta completó con 7 y con 8.

A10: 5 más 3 igual 7 más 1 igual 8. Y acá está mal porque 5 más 3 igual 8 ... aunque ella terminó el resultado acá (indica el segundo espacio en blanco)... si porque me daba... 9 en realidad, no 8.”

La estudiante continúa analizando otras tareas, al solicitarle retomar esta actividad responde...

“E: Y en la primera si tuvieras que corregirla ¿cómo se la corregirías?

A10: y acá, que sería $8+1...9$, ¿no?

E: Le dirías que está mal porque ahí iría un 8...

A10: Sí.”

Observación 2: Evidencia dificultad en aceptar al signo de igual como *expresión de una acción*, en especial al completar los espacios en blanco en las tareas de la forma $__ = a - b$. En estos casos alterna los significados que pone en juego: en ciertas oportunidades propone completar con una operación que resulte en el número a, mientras que en otras propone completar con el resultado de la operación $a - b$. Estas respuestas son hechas frente a distintas tareas y también frente a la misma tarea, en instancias separadas en el tiempo. Por otra parte, ella misma sanciona como incorrecta su propia producción que denotaba el uso del signo de igual en su acepción de *operador*, no logrando aparentemente atribuir significado a su propio trabajo.

Frente a la consigna de completar los espacios en la propuesta $__ = 7 - 3$ responde:

“A10: En esta $7-3$... 4 ¿ahí tendría que poner 4? No, ahí no... No entiendo esta...”

E: ¿Por qué lado se te plantea la duda?

A10: Porque acá dice $__ = 7 - 3$, acá iría el resultado de lo que...? No iría el resultado...”

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

E: Por un lado pensabas poner un 4, ¿en que sentido se te plantea la inquietud?

A10: De que el igual... pero acá $4 = 7 - 3$ no tiene sentido me parece.”

Frente a la consigna de corregir la actividad producida por Delfina (escolar de 4to año), que completa con $6 + 1$ el espacio en blanco en la igualdad $___ = 7 - 3$, aprecia la misma como correcta, aún cuando esta forma de completar no coincide con su propia propuesta,¹ ni respeta la *equivalencia numérica*. Consideramos que la no aceptación del signo de igual como *expresión de una acción*, promueve la puesta en juego del significado *operador*, ya que de esta forma logra atribuir sentido a la sentencia, al observar la sentencia como verdadera, atendiendo solo a la igualdad $6 + 1 = 7$.

“A10: ... y después, claro, acá puso... Esa fue en la que yo me había trancado...”

E: Ella puso $6 + 1 = 7 - 3$

A10: $7 - 3 = 4$, Sí, sí es así, sí podía hacer eso sí. Porque yo me imaginaba que acá iba... solo el número...”

Frente al pedido de indicar como verdadero o falso la sentencia $13 = 15 - 2$ y la invitación a indicar las dificultades que ella aprecia que tendrían los escolares para resolverla, nuevamente manifiesta sus dudas, apreciando que la igualdad está “invertida”.

“E: El $13 = 15 - 2$?...”

A10: Si lo veo así me parece que está bien, porque 13 es igual a 15 - 2.

E: ¿Y de qué otra manera lo podrías ver? ¿Qué es lo que te choca? ¿En qué sentido es que eso de alguna forma te parece que no está bien?

A10: Porque si fuera $15 - 2 = 13$ ahí sí ya digo que está bien, que es verdadero...”

E: No estás muy acostumbrada a ver este planteo...”

A10: Claro, pero no invertido.”

Más adelante en la entrevista se le muestra el trabajo de Alexandría, que responde como falsa a esta misma sentencia sin dar argumentos, invitándola a ponerse en la situación de un estudiante para dar esta respuesta. Sus dudas siguen siendo evidentes.

“A10: Creo que le pondría como verdadero yo, porque en realidad 13 es igual a 15 - 2, ¿o no? ... No sé... (risas) No podría corregirlo porque estoy dudando.

E: Bueno, ¿por qué te parece que podría ser falsa (dado que la escolar lo marca como falso)?

¹ Cabe agregar que en su propio cuestionario la estudiante magisterial completa con 4×4 el espacio en la sentencia $___ = 16 - 4$ para hacerla verdadera, como se muestra más adelante.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

A10: En realidad pienso que es verdadera, si hago $15 - 2$ que es 13, y 13 es igual a ... Cosas tan fáciles... (risas)”

Frente a observar su propio trabajo (donde respondió $4 \times 4 = 16 - 4$ como respuesta al cuestionario para estudiantes magisteriales), esta estudiante no logra poner nuevamente en juego la visión del signo de igual como *operador*, visión que la llevó inicialmente a dar esa respuesta. En esta oportunidad, separada un lapso de casi tres semanas respecto a cuando realizó el cuestionario, la estudiante pone en juego una visión relacional que le permite apreciar su error, pero no explicar qué la llevó a dar esa respuesta. Observamos que la visión del signo de igual que esta estudiante pone en juego depende no solo de la tarea que enfrenta sino también del contexto en el cual venía trabajando. El diálogo fue el siguiente:

“A10: Cualquier cosa.

E: ... por qué?

A10: Aparte acá puse $4 \times 4 = 16$ pero acá es $16 - 4$. No se ni qué puse. (risas)

E: Tú pusiste..., en la explicación que pusiste dice: busqué dos números que multiplicados me dieran como resultado 16.

A10: pero acá sería $16 - 4$...”

Observación 3: En situaciones de división, pone en juego el signo de igual como *operador*, buscando colocar el cociente de la operación $a \div b$ sin tener en cuenta el valor del resto, sin cuestionar si se verifica la igualdad entre las cantidades representadas, a uno y otro lado del signo de igual, es decir, sin poner en juego el significado de *equivalencia numérica*. Por otra parte, advertimos que esta estudiante, así como otros cuatro estudiantes magisteriales, completaron $40 \div 7 = \underline{\quad}$, escribiendo un 5 en el espacio a la derecha del signo de igual, que coincide con el cociente de la división entera, en este caso con resto diferente de cero. Si bien entendemos que esta problemática escapa en cierta forma a nuestros objetivos, advertimos de este error que consideramos podría estar promovido por el uso del signo de igual como *propuesta de actividad*. Asimismo cabe destacar que la estudiante entrevistada, si bien reconoce la producción de una estudiante que completó la sentencia como $7 \div 2 = 3,5$ como correcta, no logra decidir si la sentencia $7 \div 2 = 3$ es correcta o incorrecta. Se observa que la estudiante legitima el proceso de obtención de la igualdad, más que el objeto igualdad.

Frente a la consigna de completar los espacios en blanco para tener una igualdad en $7 \div 2 =$ la estudiante magisterial responde: “ $7 \div 2 \dots 3$ ”, dando evidencias de ver el signo de igual

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

como *operador*, que la invita a efectuar la operación y expresar su resultado a continuación del signo de igual. Mantiene esta misma postura frente a la tarea de juzgar la sentencia $7 \div 2 = 3$, indicando: “ $7 \div 2 = 3$ ahí pondría verdadero también” Se observa que su respuesta queda conformada únicamente por el cociente de la división entera completando el espacio sin tener en cuenta si se cumple o no la *equivalencia numérica* entre las expresiones representadas en ambos miembros, permaneciendo el significado de *equivalencia numérica* oculto para ella en este momento, aunque supo ponerlo en juego en otros contextos ajenos a este. Por otra parte, confirmando las sospechas que nos llevaron a proponer esta tarea, la visión del signo de igual como operador lleva a esta estudiante, a colocar a continuación del signo de igual un número que coincide con el cociente de la división entera en un caso en que el resto es distinto de cero.

No cambia su posición frente al trabajo de la escolar Delfina, quien completa esta sentencia como $7 \div 2 = 3$ acompañando su respuesta con el planteo del algoritmo escrito de la división, la estudiante magisterial responde “Y este, la división... Está bien”. En este caso la respuesta de esta estudiante coincide con la suya propia, y no produce conflictos que pongan en juego la evaluación de la *equivalencia numérica* en esta sentencia.

A continuación se le solicita que corrija la actividad de Julieta, que completa la propuesta anterior colocando 3,5 y adjunta el planteo de la división con cociente decimal:

A10: Y acá la siguió 3,5. Ta, está bien.

E: ¿Esa también se la corregirías como bien?

A10: Sí, sí porque la siguió. La otra terminó cortándola cuando le sobraba 1. Sí, porque la mitad de 7 es 3,5...”

Se observa que frente a la producción de esta estudiante, logra poner en juego la visión del signo de igual como *equivalencia numérica*, evidenciando que recién en este momento atribuye un significado numérico a la expresión $7 \div 2$ y considera evaluar la equivalencia entre el número representado a la izquierda del signo de igual ($7/2$) y el expresado a su derecha (3,5). Se aprecia que en este caso la ejecución del algoritmo escrito de la división con cociente decimal fue una ayuda importante para legitimar la producción de la alumna, y evaluar la igualdad propuesta, permitiéndole la puesta en juego de otro significado del signo de igual. Sin embargo esto no le resulta suficiente para asegurar que $7 \div 2$ no es igual a 3, como observamos a continuación.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Al solicitarle que corrija esta misma actividad, realizada por otra alumna de cuarto año de escuela llamada Alejandra, que responde como “Verdadero” a la sentencia $7 \div 2 = 3$, comienza a dudar, centralizando su atención en qué tipo de división “corresponde” hacer:

A10: Acá en esta, en realidad no sé si contarla como bien o como mal, o sea, si la sigue es 3,5 la división, pero si no la sigue y le sobra 1, o sea el resultado..., no, pero en realidad es 3,5, no sé cómo tomarla ... (risas)

E: ¿De dónde saca el 3?, te acordás cuando obtiene el 3... , ¿por qué podría dar esa respuesta? ¿Por qué podría considerar que el 3 es la respuesta correcta?

A10: Porque el más cercano o sea es el 6, porque 3×2 es 6, ¿no? Claro, si la sigue es 3,5...

E: En un caso está haciendo la división con resto y en el otro caso no.

A10: Entonces no sé si ponerle que está bien o mal....

Posteriormente, al solicitarle que nos explique su propio trabajo en la actividad 2e del cuestionario A, se evidencia que persiste la contradicción entre la respuesta que habitualmente esta estudiante parece colocar en este lugar al efectuar una división, y una respuesta que atiende a la igualdad numérica entre los dos miembros, lograda al continuar la división hasta obtener resto cero:

E: Ahora te hago una preguntita para que me aclares, ya que el problema tenía el cociente y el resto que eran iguales en la división, ¿en qué te fijas para responder que $40:7=5$ es verdadero, ¿en qué te estas fijando? ¿En el cociente o en el resto?

A10: Me fijé acá (en el cociente), o sea si yo la seguía ahí en realidad me va a dar falso, ¿no?

Se observa que aunque la estudiante pone en duda la veracidad de su propia afirmación, traslada el problema de evaluar la *equivalencia numérica* a determinar cuál de los dos algoritmos de la división corresponde realizar (división con resto o “seguir” la división), pero que en ambos casos considera los cocientes obtenidos como el resultado de esta operación y que este resultado debe ser colocado a continuación del signo de igual, apreciando que la interpretación del signo de igual como *operador* predomina en su discurso.

Observación 4: Al completar o validar sentencias con operaciones a ambos lados del signo de igual, esta estudiante alterna los significados que le atribuye al signo de igual en cada una de

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

las tareas, pasando de la *equivalencia numérica* al significado de *operador*, una y otra vez, en distintas situaciones. Se aprecia que frente a cada tarea, una de las dos visiones aflora para dar solución a la misma, pero sin evidencias de que sean puestas en juego simultáneamente de forma espontánea, posiblemente por el conflicto que esto traería. Cuando se la lleva a observar la presencia de dos “estrategias” en su propio discurso, considera brevemente cambiar la idea de “buscar el resultado” por la idea de “que diera igual en los dos” pero rápidamente abandona esta idea, prevaleciendo la visión operacional sobre esa tarea. Por otra parte, se pudo confirmar que la prioridad de las operaciones y la posición de los espacios en blanco, intervienen al determinar la visión que se pone en juego. Conjeturamos que esta estudiante enfrenta las tareas con la siguiente lógica: primero realiza las operaciones dadas de forma explícita, siguiendo el orden establecido por la prioridad de las operaciones. Si advierte que esta operación está colocada antes del signo de igual, y el espacio después de él, coloca el resultado en el espacio, motivada por la visión del signo de igual como *operador*. Si aún no puede completar el espacio, busca dar solución a la igualdad resultante al sustituir las operaciones por sus resultados. Apreciamos que esta estudiante podría dar solución correcta a sentencias de la forma $_ + a = b + c$, sin que esto constituya una evidencia de que la visión puesta en juego para completar el espacio sea del tipo relacional. Consideramos que por los motivos expuestos, y coherentemente con lo constatado experimentalmente a partir del análisis de las producciones grupales, las sentencias de la forma $a + b = _ + c$ resultan más adecuadas para poner en evidencia visiones *operacionales* del signo de igual que las de la forma $_ + a = b + c$.

Frente al pedido de dar una respuesta del tipo verdadero o falso a la sentencia $5 \times 2 = 8 + 2$, esta estudiante pone en juego el significado de *equivalencia numérica*, como lo evidencia su discurso: “Ahí pondría verdadero porque en los dos da el mismo resultado”

Siguiendo en la entrevista, se la consulta por un caso específico, Alexandría, pidiéndole que conjeture qué podría estar pensando esta niña para considerar esa sentencia como falsa, y comienza a expresar su duda respecto a la veracidad de la sentencia:

E: Capaz está pensando que como cambian los signos, no le da lo mismo, por si no hizo la cuenta, pienso yo, no sé... Porque en realidad estos dos te dan el mismo resultado.

E: Tú calculás $8+2$ y te da el mismo resultado.

A10: Pero no sé si es así ... (risas)

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Hacia el final de la entrevista, se le solicita que explique su propia respuesta de 143 al completar el espacio en blanco en la sentencia $57 + 86 = _ + 84$ del cuestionario aplicado a los futuros maestros. En esta etapa de la entrevista, y aunque anteriormente puso en juego una visión relacional del signo de igual en su acepción de *equivalencia numérica* en sentencias de estructura similar, la estudiante ve nuevamente al signo de igual como *operador* al dar como válida su propia producción. Cabe destacar además que a través de su discurso “*Capaz que a esto buscarle la diferencia a esto*” se puede conjeturar que consideró como alternativa la equivalencia entre ambas expresiones, pero que prevalece la visión operacional frente a la relacional del signo de igual por su rotundo “*No*” con que finaliza esta frase.

E: Bueno y en el 1c, pusiste 143 en el espacio. Contame que estuviste pensando ahí.

A10: Acá lo que hice fue esta suma...

Claro acá lo que hice en realidad fue esta suma ($57+86=143$) y completé acá. ¿Cómo hice esto...?

E: ¿Ahora te parece que darías otra respuesta?

A10: Y ... No, no porque sigo sumando esto, y dice igual, yo sumé esto y me da esto... Acá lo que tenía que hacer era esta suma... ¿no? No entiendo el $+84$... Capaz que a esto buscarle la diferencia a esto... No.”

Posteriormente en la entrevista se hace notar sus cambios de “estrategias” al completar las tareas 1c) $57 + 86 = \underline{143} + 84$ y 1d) $\underline{12} + 3 = 11 + 5$, interrogándola por las razones que la llevan a manejar diferente ambas situaciones. Su explicación pone en evidencia que la posición del espacio a completar hace la diferencia:

A10: Acá como sumaba supuestamente^{II} 15, busque algo que me diera 15.

E: ¿Estás usando la misma estrategia en el caso 1d que en el caso 1c?

A10: No, no porque acá quería que me diera igual en los dos, y acá busqué solo para este, para completar ahí.

Más adelante...

^{II} El estudiante calcula inicialmente que $11 + 5 = 15$, y se toma este valor como válido para continuar con la entrevista.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

E: ... ¿Qué te llevó a usar esa estrategia de decir que el segundo miembro sea igual al segundo miembro y no a completar el espacio intentando como en este que el resultado sea...?

A10: Porque acá ya me dabas los dos, entonces lo que hice fue buscar el resultado de este,

E: 143

A10: Y en este, como no me dabas este...

La siguiente explicación pone en evidencia la incidencia de las operaciones que se plantean en la sentencia con la forma de completar los espacios y la relación que establece esta estudiante entre esta última y la prioridad de las operaciones que aparecen:

E: Y te pregunto en el 2c, tenés $5 + 9 = 14 : 2$, y tú pusiste falso,

A10: Si ahí en realidad me entreceré con todo, con la separación de términos, y todas esas cosas...

Más adelante sigue...

A10: Que no sé en realidad si lo que hice está bien, me parece que no.

E: Cuando tú lo hiciste ¿qué es lo que estabas considerando?

A10: Lo mismo que he hecho en todas, que estos resultados eran iguales. Por eso puse falso.

Observación 5: En relación a las tareas y su potencial para poner en juego una u otra visión, podemos afirmar que las tareas de completar espacios en sentencias de la forma $__ + a = b + c$ podrían ser completadas de forma correcta por un estudiante que ponga en juego únicamente una visión del signo de igual como *operador*, al igual que las tareas de verdadero o falso de la forma $a + b = c \times d$. Observamos que las tareas de completar espacios en blanco con cadenas de igualdades de la forma $a \times b = __ + c$ donde en el primer miembro se coloque una multiplicación o división y en el segundo miembro una suma o resta, resultarían instrumentos más poderosos que las anteriores para detectar la persistencia de visiones *operacionales* del signo de igual.

Se aprecia que las tareas de completar cadenas de igualdades que posicionan el espacio a completar inmediatamente a continuación del signo de igual, son las tareas que mayor

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

potencial tienen para poner en evidencia visiones del signo de igual como *operador*. Por otra parte, dentro de las sentencias numéricas con operaciones en ambos lados del signo de igual, aquellas que ubican el espacio a completar a continuación del signo de igual tienen mayor potencial para poner en evidencia visiones *operacionales* que aquellas que colocan este símbolo en otra posición.

Observación 6: La estudiante acepta el uso del signo de igual en su acepción de *aproximación*.

E: Si te diera una aproximación del número pi, (que tiene infinitas cifras), por ejemplo 3,14 o 3,1, ¿podrías aceptar la sentencia que ese número aproximado fuera igual a pi?

A10: Sí, en realidad para mí pi es 3,14, no me acordaba lo otro como seguía, me acuerdo que cuando terminamos le dije a Paula, ¿cómo seguía...?

E: Y si yo te hubiera puesto $\pi=3,14$ lo hubieras aceptado como verdadero?

A10: Sí. Verdadero.

Observación 7: Acepta el uso del signo de igual para establecer una correspondencia entre un número y un conjunto numérico (uso inadecuado que podría sustituirse por el símbolo pertenece). El uso del signo de igual para vincular un número el 100% y un número cualquiera que represente el total, no pudo ser confirmado para esta estudiante. Da muestras de atribuir al signo de igual el significado de indicador de cierta conexión o correspondencia.

Acepta el uso del signo de igual para establecer una correspondencia entre un número y un conjunto numérico...

E: ...si yo te pusiera por ejemplo $2=N$, siendo N el conjunto de los números naturales ¿aceptarías esa sentencia como verdadera?

A10: Sí, y acá también ...

E: En $\frac{1}{3} = Q$ ¿también como verdadera?

A10: Sí.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

No niega la posibilidad de que la sentencia $5 = 100\%$ sea verdadera, informa que dependería del contexto de la situación...

“A10: $5=100\%$ no se en esta... porque ¿el 100% de qué?”

E: claro, ahí no dice el contexto. ¿te imaginas algún contexto que podría ser eso cierto?”

A10: Si me dieran más datos capaz que 5 si es el 100% de algo...”

Observación 8: La estudiante magisterial tiene una baja apreciación de las dificultades asociadas a las tareas que involucran al signo de igual a nivel escolar.

A excepción de las tareas que ella misma duda en dar una respuesta, esta estudiante no anticipa dificultades para la realización de las tareas involucradas en el cuestionario de escolares.

Cuestionada sobre las dificultades que percibe para que los escolares realicen correctamente esta tarea responde: “En estas no... Esta es la que me sigue...” haciendo referencia a una pregunta que ella dudó al responder.

Observación 9: Si bien cada tarea era factible de ser resuelta de al menos dos formas, según el significado del signo de igual que se pusiera en juego, y aunque hemos constatado siete significados (*equivalencia numérica, expresión de una acción, identidad estricta, correspondencia, aproximación, propuesta de actividad y operador*) del signo de igual puestos en juego por esta estudiante a lo largo de este estudio, esta estudiante no logra anticipar otras posibles respuestas a tareas concretas que involucran al signo de igual, más allá de su propia respuesta a cada tarea. La estudiante sigue sin poner en juego más de un significado del signo de igual frente a una misma tarea, independientemente de la visión predominante en la tarea.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

La estudiante no da evidencias de lograr poner en juego dos visiones distintas del signo de igual en una misma tarea. Solo pone en juego la visión relacional en esta situación, como lo evidencian sus respuestas:

E: ... ¿En $5 \times 2 = 8 + 2$? (haciendo referencia a indicar si considera esta sentencia como V o F)

A10: Y ese lo veo así.

E: ¿Te parece que algún niño podría entenderlo diferente, y dar alguna otra respuesta?

A10: No sé, porque a los niños se les ocurren tantas cosas... (risas)

E: Y acá solo lo puedes visualizar de una forma?...

A10: O que puedan cambiar el orden ahí, 2×5 , en realidad va por lo mismo, más $2 + 8$.

E: Pero ¿te parece que todos lo contestan verdadero?

A10: Sí, eso.

Observación 9: Esta estudiante no busca interpretar las producciones de los estudiantes, se limita a comparar los resultados obtenidos por los escolares con los suyos propios.

Frente a la resolución correcta de una alumna de primaria al completar blancos en una cadena de igualdades, señala que la tarea es incorrecta, sin evidenciar la búsqueda de explicaciones sobre los pensamientos de la escolar, limitándose a señalar que la tarea está mal porque la respuesta es otra (respuesta que por otra parte es incorrecta).

E: Y en la primera, si tuvieras que corregirla ($5 + 3 = \underline{7} + 1 = \underline{8}$) cómo se la corregirías?

A10: Y acá que sería $8 + 1 \dots 9$ ¿no?

E: Le dirías que está mal porque ahí iría un 8...

A10: Sí.

Observación 10: Frente a respuestas de los escolares en las que se evidencian visiones operacionales, esta estudiante duda de sus propias respuestas dadas desde una visión relacional del signo de igual.

No logra explicar por qué una escolar podría considerar la igualdad $5 \times 2 = 8 + 2$ como falsa, aunque no está segura de si lo es:

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

E: ... seguimos con la 2b de Alejandría, ella indica falso, pero no indica nada, nos preguntamos por qué, ¿qué podría estar pensando?

A10: Capaz está pensando que como cambian los signos, no le da lo mismo, por si no hizo la cuenta, pienso yo, no sé... Porque en realidad estos dos te dan el mismo resultado.

E: Tú calculás $8+2$ y te da el mismo resultado.

A10: Pero no sé si es así... (risas)

Aunque la estudiante magisterial propone inicialmente al 4 para completar el espacio en $__ = 7 - 3$, al mostrarle el trabajo de Delfina completando como $6 + 1 = 7 - 3$, responde “ $7 - 3 = 4$. Sí, sí es así, sí podía hacer eso, sí. Porque yo me imaginaba que acá iba... solo el número...”

Observación 11: Esta estudiante se ve superada al intentar corregir las distintas tareas de los estudiantes. Evidencia gran inseguridad y no contar con estrategias para resolver sus conflictos. Consideramos que los fragmentos que incluimos en las otras observaciones son evidencia de ello. Adjuntamos una más:

A10: En todo en realidad se me plantea la duda... (risas)

E: Viste que es algo tan cotidiano...

A10: No puede ser que los niños lo hagan al toque...

Capítulo VI: Reflexiones finales

Todos los estudiantes magisteriales participantes de nuestro estudio, evidencian aceptar el uso del signo de igual en su acepción de *equivalencia numérica*, al solicitarles señalar como verdadero o falso sentencias con operaciones a ambos lados del signo de igual. Por otro lado, solo en la quinta parte de este grupo de estudiantes, el significado de *equivalencia numérica* se impone frente al significado de *operador*, al completar espacios en blanco en tareas donde se presenta una cadena de igualdades, evidenciando que la persistencia de visiones *operacionales*, alcanza al 80% de los futuros maestros que participaron de este trabajo. El significado del signo de igual como *operador*, llevó a 4 de cada 5 estudiantes a dar respuestas matemáticamente incorrectas en tareas sencillas que involucran al signo de igual. Esta misma visión motivó a la cuarta parte de los futuros maestros, a completar de forma incorrecta, sentencias como $57 + 86 = ___ + 84$. Asimismo, observamos que todos los estudiantes que cursan su último año de magisterio, aceptan el significado de *expresión de una acción* para validar sentencias de la forma $12 = 16 - 4$, aunque muchos de ellos las aprecian como “al revés” y dudan de poner en juego este significado si se les pide completar $___ = 16 - 4$, lo cual hace pensar en una exposición limitada de estos estudiantes con este tipo de sentencias.

Reportamos que muchos de los futuros maestros aceptan el uso del signo de igual, para vincular un número y una aproximación de éste, atribuyéndole al signo de igual el significado de *aproximación*. Por otra parte, más de la mitad de los estudiantes que participan de nuestro estudio, aceptan el uso del signo de igual para establecer una correspondencia entre un número y el conjunto numérico al cual pertenece, admitiendo por ejemplo que $\frac{1}{3} = Q$. El significado atribuido en este caso al signo de igual es el de *indicador de cierta conexión o correspondencia*. Con este significado, un estudiante usa este signo también para establecer una correspondencia entre dos números, uno de ellos considerado (en algún contexto) como el total, y el número 100%, admitiendo que $5 = 100\%$. Estos dos usos complementan los usos ejemplificados por Molina (2006) y por Burgell (2012) para la novena categoría. Esta investigación no pudo constatar si este último uso es frecuente entre estos estudiantes. Agregamos que la palabra “es” está asociada a este uso inapropiado del signo de igual.

Por otra parte, la estudiante entrevistada acepta como verdadero que $7 \div 2 = 3$. Entendemos que impulsada por la visión operacional del signo de igual, y en su intento por expresar a

continuación del signo de igual un número asociado al resultado de la operación $7 \div 2$, esta estudiante elige al cociente de la división entera para ocupar este lugar, aún en un caso en que el resto de esta división es diferente de cero. Si bien consideramos que el análisis de esta problemática va más allá de los alcances de este estudio, advertimos de la misma ya que según nuestra exploración, no ha sido abordado por la investigación. El uso del signo de igual en su acepción de *propuesta de actividad*, en conjunción con una visión del signo de igual como operador, podrían estar relacionadas con este error.

Finalmente deseamos agregar que este trabajo pone de manifiesto la aceptación por parte de muchos estudiantes, de otros usos del signo de igual que violan su significado matemático, que no caen dentro de la categorización clásica de *operacionales* o *relacionales*, y no han sido abordados por la mayor parte de las investigaciones que estudian la problemática que rodea a este signo. Entendemos que los significados de aproximación y correspondencia, son igualmente problemáticos para la construcción del significado numérico y para la conceptualización de la estructura matemática, como lo es la presencia de significados operacionales en la construcción del pensamiento algebraico.

Por otra parte, si bien no fue uno de nuestros objetivos producir aprendizaje, en relación a las tareas que promueven uno u otro significado del signo de igual, pudimos realizar algunas observaciones que nos permitieron profundizar en este, respecto a lo encontrado en la bibliografía. Apreciamos que las tareas de completar espacios en blanco, que involucran cadenas de igualdades de la forma $a \times b = _ + d = _$, tienen gran potencial para evidenciar visiones operacionales, y constituyen a nuestro entender, un excelente herramienta de diagnóstico. Por otra parte, la tarea de completar el espacio en $5 = _$, acompañando la consigna con una invitación a dar varias respuestas, resultó valiosa para evidenciar las múltiples visiones de nuestro grupo de estudiantes. Finalmente, apreciamos que las tareas de clasificar como verdadero o falso sentencias de la forma, $a = b + c$, y $a + b = c + d$ promueven la construcción del significado *expresión de una acción* y equivalencia numérica respectivamente, para el signo de igual, y se aprecian como tareas ricas para trabajar la construcción de estos dos significados fundamentales en el aula.

En el estudio de caso realizado, constatamos la convivencia de visiones *operacionales* y *relacionales* del signo de igual en una misma estudiante, pero además, constatamos múltiples formas de entender al signo de igual (como *propuesta de actividad*, *operador*, *expresión de una acción*, *equivalencia numérica*, *identidad estricta*, *indicador de cierta conexión* o

correspondencia, aproximación). Dado que la estudiante entrevistada no pudo explicar su propia producción que evidenciaba una visión operacional del signo de igual (realizadas tres semanas antes), en momentos en que su propia respuesta a la tarea indicaba la puesta en juego de una visión relacional del signo de igual, apreciamos que estos significados son evocados dependiendo de la tarea y el contexto específico a la cual se enfrenta, e incluso de las tareas o contextos en los que se venía desempeñando. Por otra parte se observó a partir de la entrevista y del análisis de los cuestionarios, que las distintas visiones rara vez son activadas simultáneamente y que dar evidencias de haber construido un significado del signo de igual, no es garantía de que pueda poner en juego este significado en otro contexto similar, o incluso en otro momento frente a la misma tarea.

En relación al conocimiento especializado del futuro docente, destacamos que si bien esta estudiante evidenció haber construido una multiplicidad de significados para el signo de igual, estos no resultaron funcionales para anticipar otras formas de dar solución a tareas que admiten varias respuestas, según la visión del signo de igual que se pusiera en juego. Contrariamente a lo esperado por nosotros, estas múltiples visiones de esta estudiante no contribuyeron a atribuir sentido a las producciones de los escolares. Por otra parte, sus múltiples significados resultan poco útiles para entender el trabajo correcto de una escolar, y no le permiten apreciar sus propias limitaciones, corrigiendo equivocadamente la tarea de esta escolar, al sancionar como incorrecto el uso del signo de igual como equivalencia numérica en una cadena de igualdades. Esta situación es apreciada por nosotros como un llamado de alerta, que nos advierte de la magnitud del problema. Apreciamos que esta estudiante desconoce lo que conoce, y esto le genera mucha inseguridad. Entendemos que el abordaje tradicional del signo de igual, marcado por usos transparentes (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), impuestos y ausentes de negociación de sus significados, ha sido la causa principal de esta situación, que pone a estos futuros maestros en una situación de invalidez, al no encontrar herramientas que les permitan resolver conflictos que podrían advertirse como triviales.

Observamos que es necesario que el futuro maestro conozca y reconozca cada uno de los significados asociados al signo de igual, pero si el significado de *operador*, de *correspondencia* o de *aproximación* prima sobre el de *expresión de equivalencia*, en cualquiera de sus acepciones, guiará al estudiante a adoptar usos del signo de igual, incompatibles con el significado matemático de este símbolo. Por lo expuesto destacamos la importancia de que los futuros maestros completen los significados del signo de igual,

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

haciendo énfasis en las tres propiedades características del mismo (idéntica, simétrica y transitiva), que les permitan posteriormente promover la comprensión de la equivalencia y del pensamiento relacional en los escolares y sentar las bases del pensamiento algebraico.

Se considera que este avance de investigación ha contribuido a ampliar el conocimiento sobre los usos y significados del signo de igual a nivel de la formación inicial de maestros, procurando incorporar la dimensión didáctica al abordaje de esta problemática en este contexto específico. Creemos que este conocimiento podrá ser tomado en cuenta por los docentes de todos los niveles educativos, para repensar las prácticas de enseñanza ofrecidos a sus estudiantes, y por las autoridades para realizar ajustes que promuevan la inclusión del signo de igual como objeto de aprendizaje y enseñanza. Finalmente este estudio concluye que es necesaria mayor preparación de los futuros maestros, de los maestros y de los formadores de maestros y profesores, para fortalecer los significados del signo de igual basados en la equivalencia numérica desde los niveles iniciales, y construir paulatinamente nuevos significados que se integren significativamente a este.

Referencias bibliográficas

- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). *How children view equality sentences*. No. PMDC-TR- 3. Tallahassee, FL: Florida State University.
- Burgell, F. (2012). *¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de primer año del Ciclo Básico de Enseñanza Media? Aportes para pensar los cimientos del álgebra*. Tesis de Maestría no publicada. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Orientación Matemática. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén, Argentina.
- Carpenter, T. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. Madison, WI: University of Wisconsin.
- Carpenter, T., Franke, M. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Cuadernos de educación 22*. Barcelona: Editorial Horsori.
- Falkner, K., Levi, L. y Carpenter, T. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232-236.
- Gelman, R. y Gallistel, C. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Cambridge: Harvard University Press.
- Hartzler, J. (2013). *A comparative study of pre-service teachers' understandings of the equal sign*. Graduate theses and dissertations. Recuperado desde <http://lib.dr.iastate.edu/etd/13511/> el 15 de diciembre de 2015.
- Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73(8), 572-580.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12 (3), 317-326.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.
- Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N. y Alibali, M. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (4), 297–312.
- Knuth, E., Stephens, A., Mc-Neil, N., y Alibali, M. (2008). The importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol. 13, Nº 9, 514-519.
- McNeil, N. y Alibali, M. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development*, 76, 883-899.
- McNeil, N., Grandau, L., Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S. y Krill, D. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instruction*, 24, 367-385.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Parslow-Williams, P. y Cockburn, A. (2008). Equality: Getting the right balance. En A. Cockburn y G. Littler (Eds.), *Mathematical misconceptions: A guide for primary teachers* (pp. 23-39). London: SAGE.
- Siegel, L. (1978). The relationship of language and thought in the preoperational child: A reconsideration of nonverbal alternatives to Piagetian tasks. *Alternatives to Piaget: Critical essays on the theory*, 43-68.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(3), 249-278.

Weinberg, A. (2010). Undergraduates students' interpretations of the equal sign. *Proceedings of the 13th Annual Conference of Research in Undergraduate Mathematics Education*. Raleigh, NC: Mathematical Association of America (MAA). Recuperado desde <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Program2010.htm> el 15 de diciembre de 2015.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Anexo 1: El cuestionario (aplicado a los estudiantes magisteriales)

Nombre: _____ **Teléfono de contacto:** _____
Edad: _____ **Grupo:** _____ IFD Maldonado

Actividad 1

Completa con el número que falta en cada espacio para que las sentencias numéricas presentadas sean verdaderas. Explica todas tus respuestas.

a) $90 \div 3 = \underline{\quad} + 3 = \underline{\quad}$

b) $\underline{\quad} = 16 - 4$

c) $57 + 86 = \underline{\quad} + 84$

d) $\underline{\quad} + 3 = 11 + 5$

e) $5 = \underline{\quad}$

En algún caso, ¿podrías completar los espacios de alguna otra forma? Si es así registra cómo los completarías y por qué consideras que también estaría bien.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Nombre: _____ **Teléfono de contacto:** _____

Actividad 2

Indica si consideras las siguientes igualdades como verdaderas o falsas. En las que consideres verdaderas (V) explica en qué te basas para afirmar que lo son y si realizas cálculos estos deberán quedar registrados en la hoja. En las igualdades que consideres falsas (F), indica qué es lo que consideras que está mal y explica por qué.

a) $6 \times 8 = 48 + 7 = 55$

b) $16 = 7 + 9$

c) $5 + 9 = 14 \div 2$

d) $4 + 7 = 9 + 2$

e) $40 \div 7 = 5$

f) $\pi = 3,14159$

g) $8 = \dot{2}$

h) $\frac{1}{3} = \mathbb{Q}$, siendo \mathbb{Q} el conjunto de los números racionales

i) $17 = 17$

Nombre: _____ **Teléfono de contacto:** _____

Actividad 3

Las siguientes preguntas se refieren al siguiente símbolo: =

a) ¿Qué significa para ti este símbolo?

b) Indica la mayor variedad posible de situaciones donde usarías este símbolo.

c) ¿Cómo lees este símbolo en cada una de las situaciones que planteas?

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Anexo 2: Respuestas de la estudiante A10 al cuestionario

A10

Nombre: Ximena

Teléfono de contacto: _____

Edad: 24 años

Grupo: 4^{ta}A

IFD Maldonado

Actividad 1

Completa con el número que falta en cada espacio para que las sentencias numéricas presentadas sean verdaderas. Explica todas tus respuestas.

a) $90 \div 3 = \underline{30} + 3 = \underline{33}$

Realicé la división 90 dividido 3 y al resultado que obtuve le sumé 3.
El total fue igual a 33.

b) $\underline{4} \times \underline{4} = 16 - 4$

Busqué dos números que multiplicado me diera como resultado 16.

c) $57 + 86 = \underline{143} + 84$

Realicé la suma $57 + 86$ y obtuve como resultado 143.

d) $\underline{12} + 3 = 11 + 5$

Realicé la suma de $11 + 5 = 15$ y luego encontré el número que sumado 3 me diera 15.

e) $5 = \underline{5}$

En algún caso, ¿podrías completar los espacios de alguna otra forma? Si es así registra cómo los completarías y por qué consideras que también estaría bien.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Nombre: Ximena _____

Actividad 2

Indica si consideras las siguientes igualdades como verdaderas o falsas. En las que consideres verdaderas (V) explica en qué te basas para afirmar que lo son y si realizas cálculos éstos deberán quedar registrados en la hoja. En las igualdades que consideres falsas (F), indica qué es lo que consideras que está mal y explica por qué.

✓ a) $6 \times 8 = 48 + 7 = 55$ Es verdadero porque la multiplicación $6 \times 8 = 48$ y si le sumo 7 me da 55.

✓ b) $16 = 7 + 9$ Verdadero porque la suma $7 + 9 = 16$

F c) $5 + 9 = 14 \div 2$

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 9 \\ \hline 14 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 2} \\ 0 \ 7 \end{array}$$

✓ d) $4 + 7 = 9 + 2$

$$\underline{11} = \underline{11}$$

✓ e) $40 \div 7 = 5$

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 7} \\ 5 \ 5 \end{array}$$

F ~~✓~~ f) $\pi = 3,14159$ $\pi = 3,141516$

✓ g) $8 = \dot{2}$ 8 es múltiplo de 2

h) $\frac{1}{3} = Q$, siendo Q el conjunto de los números racionales

✓ i) $17 = 17$

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Nombre: Ximena

Actividad 3

Las siguientes preguntas se refieren al siguiente símbolo: =

- ¿Qué significa para ti este símbolo?
- Indica la mayor variedad posible de situaciones donde usarías este símbolo.
- ¿Cómo lo lees este símbolo en cada una de las situaciones que planteas?

a)- Ese símbolo significa igual a.

b)- $a+b=$

$a-b=$

$a \times b=$

$a \div b=$

c)- lo leo como el resultado de dos factores.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Anexo 3: Cuestionario “B” aplicado a escolares

Nombre: _____ Edad: _____ Grupo: _____

Actividad 1: Completa

a) $5 + 3 = \underline{\quad} + 1 = \underline{\quad}$

b) $\underline{\quad} = 7 - 3$

c) $7 \div 2 =$

Nombre: _____

Actividad 2: Indica con verdadero (V) o falso (F). Anota los cálculos y lo que pensaste para responder.

a) $13 = 15 - 2$

b) $5 \times 2 = 8 + 2$

c) $7 \div 2 = 3$

d) $5 = 100\%$

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?
Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

Anexo 4: Respuestas seleccionadas de los escolares

El trabajo de Delfina en la Actividad 1:

Nombre: Delfina Edad: 9 Grupo: 4-B

Actividad 1: Completa

a) $5 + 3 = \underline{8} + 1 = \underline{9}$

b) $\underline{6} + 1 = 7 - 3 = \underline{4}$

c) $7 \div 2 = \underline{3}$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 14} \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$

El trabajo de Julieta en la Actividad 1:

Nombre: Julieta Edad: 10 Grupo: 5ºA

Actividad 1: Completa

a) $5 + 3 = \underline{7} + 1 = \underline{8}$

b) $\underline{4} = 7 - 3$

c) $7 \div 2 = \underline{3,5}$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 14} \\ \underline{10} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{35} \\ 15 \end{array}$$

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

El trabajo de Alexandría en la Actividad 2:

Nombre: Alexandria

Actividad 2: Indica con verdadero (V) o falso (F). Anota los cálculos y de lo que pensaste para responder.

a) $13 = 15 - 2$ F

b) $5 \times 2 = 8 + 2$ F

c) $7 + 2 = 3$ V

El trabajo de Valentina en la actividad 2:

Nombre: VALENTINA

Actividad 2: Indica con verdadero (V) o falso (F). Anota los cálculos y de lo que pensaste para responder.

a) $13 = 15 - 2$ (F)

b) $5 \times 2 = 8 + 2$ (V)

c) $7 + 2 = 3$ (V)

La primera es (F) porque tiene el número 13 = solo y tiene las 2 rayas para comenzar la cuenta y el resultado es 15 y el resultado no puede ser 15 porque el 13 está solo.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

El trabajo de Agustina en la Actividad 2:

Nombre: AGUSTINA Clase 4ºB

Actividad 2: Indica con verdadero (V) o falso (F). Anota los cálculos y de lo que pensaste para responder.

a) $13 = 15 - 2$ (V) Por que el 13 es lo mismo que 15 menos 2.

b) $5 \times 2 = 8 + 2$ (V) Por que 5×2 es lo mismo a $8 + 2$ por que te da el mismo resultado

c) $7 + 2 = 3$ (V) Por que queda lo mismo

d) $5 = 100\%$ (F) Por que para que te de 100% te hace tener 10

Anexo 5: Transcripción de la entrevista a “A10”

En primer lugar te muestro el cuestionario que le dimos a chiquilines de cuarto y quinto año de la escuela 1. Es muy similar a la que ustedes hicieron el otro día, pero adaptada a la escuela.

Coméntame qué respuestas considerarías como correctas...

A10: O sea, yo te digo lo que yo pondría en cada una de ellas...

A10: Haría esta suma $8+1\dots 9$.

E: Ahí está

A10: En esta $7-3 \dots 4$ ¿ahí tendría que poner 4? No, ahí no...No entiendo esta

E: ¿Por que lado se te plantea la duda?

A10: Porque acá dice $___ = 7-3$, Acá iría el resultado de lo que...? No iría el resultado...

E: Por un lado pensabas poner un 4, en que sentido se te plantea la inquietud?

A10: De que el igual... pero acá $4=7-3$ no tiene sentido me parece.

E: Bien y la siguiente?

A10: $7:2 \dots 3$

E: Esta está la actividad 2

A10: Acá hay un verdadero o falso

E: Ese es un verdadero o falso, exacto

A10: Acá en realidad es como este otro que me tranquilé $15-2=13$

E: Lo que dice es $13=15-2$

A10: Y ahí verdadero porque $15-2$ es 13

E: No le atribuyes sentido a que esté como al revés?

A10: Sí es lo que me hace dudar.

A10: Ahí pondría verdadero porque en los dos da el mismo resultado, $7:2=3$ ahí pondría verdadero también. $5=100\%$ no sé en esta... porque ¿el 100% de qué?

E: Claro, ahí no dice el contexto. ¿Te imaginas algún contexto que podría ser eso cierto?

A10: Si me dieran más datos capaz que 5 sí es el 100% de algo

E: Bien, ahora te voy a mostrar qué fue lo que contestaron los chiquilines. Haz de cuenta que tu fueras la maestra de esos niños. La primera producción es una de cuarto año. Esta chica Delfina completó de esa forma.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

E: La primer pregunta que te hago es cómo corregirías esa actividad?

A10: En esta para mi está bien,

E: La primera está bien

A10: y después, claro, acá puso...Era fue en la que yo me había trancado

E: Ella puso $6+1=7-3$

A10: $7-3=4$, Sí, sí es así, si podía hacer eso sí. Porque yo me imaginaba que acá iba ... solo el número...Y este, la división... Está bien.

Se vuelve para atrás...

En el cuestionario que hicieron, ¿percibes alguna dificultad? ¿Te das cuenta que los escolares pudieran contestar de alguna otra forma diferente a la que tu esperarías que contestaran?

A10: En estas no... Esta es la que me sigue...

E: En la a y en la c no tendría muchas dudas y en la b es la que a ti se te plantea duda.

E: ¿Qué resultados posibles podrían colocar acá en la parte b? ¿De qué formas podrían completarlo?

A10: una así como hizo esa niña, después... no se me ocurre ahora...

E: tu habías dado una, en el principio, que dudabas pero...

A10: claro, yo acá iba a poner el resultado de lo que me daba $7-3$, iba a poner el 4.

E: Y en esta, en la dos? Era un verdadero o falso, por ejemplo, en la primera evalúas que podrían tener alguna dificultad para evaluar eso como verdadero o como falso?

A10: En realidad es lo mismo que en aquella otra.

E: El $13=15-2$?...

A10: Si lo veo así me parece que está bien, porque 13 es igual a $15-2$.

E: ¿Y de que otra manera lo podrías ver que es lo que te choca? ¿En qué sentido es que eso de alguna forma te parece que no está bien?

A10: Porque si fuera $15-2=13$ ahí sí ya digo que está bien, que es verdadero...

E: No estás muy acostumbrada a ver este planteo...

A10: Claro, pero no invertido.

E: ...Como invertido, bien. ¿Y por ejemplo en las otras? ¿En $5 \times 2 = 8 + 2$?

A10: Y ese lo veo así.

E: ¿Te parece que algún niño podría entenderlo diferente, y dar alguna otra respuesta?

A10: No sé, porque a los niños se les ocurren tantas cosas... (risas)

E: Y acá solo lo puedes visualizar de una forma...

A10: O que puedan cambiar el orden ahí, 2×5 , en realidad va por lo mismo, mas $2+8$.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

E: Pero te parece que todos lo contestan verdadero?

A10: Sí, eso.

E: Bueno, ahora si seguimos. Te mostré el trabajo de Delfina. Vamos a mirar ahora el trabajo de Julieta. Julieta completó (1a) con 7 y con 8.

A10: 5 mas 3 igual 7 mas 1 igual 8. Y acá está mal porque 5 mas 3 igual 8...aunque ella terminó el resultado acá... sí porque me daba... 9 en realidad, no 8. Y acá ... (no se escucha) $7-3=4$ (risas) ...Y acá la siguió 3,5. Ta, está bien.

E: ¿Esa también se la corregirías como bien?

A10: Sí, sí porque la siguió. La otra terminó cortándola cuando le sobraba 1. Sí, porque la mitad de 7 es 3,5...

E: Y en la primera si tuvieras que corregirla cómo se la corregirías?

A10: Y acá que sería $8+1 \dots 9$ no?

E: Le dirías que está mal porque ahí iría un 8...

A10: Sí.

E: Ahora te muestro otro trabajo, el de una chica que se llama Alexandría, que responde a la actividad 2 de verdadero o falso. Primero que nada te consulto qué devolución le harías a su trabajo...

A10: Acá en esta en realidad no sé si contarla como bien o como mal, o sea, si la sigue es 3,5 la división, pero si no la sigue y le sobra 1, o sea el resultado..., no pero en realidad es 3,5, no sé como tomarla ... (risas)

E: ¿De dónde saca el 3?, te acordás cuando obtiene el 3..., ¿por qué podría dar esa respuesta, por qué podría considerar que el 3 es la respuesta correcta?

A10: porque el más cercano o sea es el 6, porque 3×2 es 6, no? Claro, si la sigue es 3,5

E: En un caso está haciendo la división con resto y en el otro caso no,

A10: Entonces no sé si ponerle que está bien o mal.

E: En la primera, en la 2a, ella contesta como falso

A10: Creo que le pondría como verdadero yo, porque en realidad 13 es igual a $15-2$, o no? ... No sé... (risas) No podría corregirlo porque estoy dudando.

E: Bueno, ¿por qué te parece que podría ser falsa?

A10: En realidad pienso que es verdadera, si hago $15-2$ que es 13, y 13 es igual a ...Cosas tan fáciles... (risas)

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

E: No te preocupes, seguimos con la 2b de Alejandría, ella indica falso, pero no indica nada, nos preguntamos por qué, ¿Qué podría estar pensando?

E: Capaz está pensando que como cambian los signos, no le da lo mismo, por si no hizo la cuenta, pienso yo, no sé...Porque en realidad estos dos te dan el mismo resultado.

E: Tu calculás $8+2$ y te da el mismo resultado.

A10: Pero no sé si es así...(risas)

E: Ahora mira, te muestro un trabajo de Valentina, y Valentina sí argumenta. En la primera, en la 2a, dice también que es falsa, pero dice por qué es falsa. “La primera es Falsa porque tienen el número $13=$ solo y tiene las dos rallas para comenzar la cuenta y el resultado es 15, y el resultado no puede ser 15 porque el 13 está solo”

A10: ... me hace dudar...no sé, (risas)

E: ¿No entiendes lo que está queriendo decir?

A10: Sí, como que este número (13) está solo, que no sería lo mismo que esto (15? O $15-2$) no?

E: Aparentemente dice que después de las dos rayas, hablando del signo de igual, dice “para comenzar la cuenta y el resultado es 15”

A10: ¿pero 15 por qué, porque si se está restando...?

E: No se entiende mucho. Bien, y en éste que indica como verdadero ¿qué podría estar pensando?

A10: Lo que te había dicho hoy, que como daban el mismo resultado tal vez lo indica como verdadero.

E: Bien, y el último trabajito para corregir es el de Agustina, Agustina es de 4to año también, y pone en la 2a verdadero, dice 13 es lo mismo que 15 menos 2. En la b pone verdadero porque 5×2 es lo mismo que $8+2$ porque te da el mismo resultado, en la c pone verdadero porque te da lo mismo, y a esta chica le había tocado otra opción más que dice $5=100\%$ y dice falso porque para que te de 100% tenés que tener 10. La pregunta es ¿cómo le corregirías la actividad?

A10: Si llega a ser o sea si es como yo digo que es, que no sé si está bien como estoy diciendo, esta se la corregiría como bien y esta sigo dudando porque no sé.

E: En la última, en la última estás dudando...

A10: Sí.

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

E: Ahora te pregunto sobre tu trabajo, En la 1b tu pusiste acá $4 \times 4 = 16 - 4$, al completar pusiste 4×4 , entonces te quería preguntar haber...

A10: Cualquier cosa

E: ¿Por qué?

A10: Aparte acá puse $4 \times 4 = 16$ pero acá es $16 - 4$. No sé ni qué puse. (risas)

E: Tu pusiste, la explicación que pusiste dice busqué dos números que multiplicados me dieran como resultado 16

A10: Pero acá sería $16 - 4$

E: Bueno y en el 1c, pusiste 143 en el espacio. Contame que estuviste pensando ahí.

A10: Acá lo que hice fue esta suma...

Claro acá lo que hice en realidad fue esta suma ($57 + 86 = 143$) y completé acá. ¿Cómo hice esto?

E: ¿Ahora te parece que darías otra respuesta?

A10: Y ...No, no porque sigo sumando esto, y dice igual, yo sumé esto y me da esto...Acá lo que tenía que hacer era esta suma...no? No entiendo el $+84$... Capaz que a esto buscarle la diferencia a esto...no.

E: Fíjate como completaste la 1d) pusiste 12 en el espacio ese y explicaste que hiciste la suma de $11 + 5$, ta, te dio 15, ahí asumí que era 16...

A10: Era 16, sí tenía que ser 16 (risas)

E:Ta, consideramos que te dio 15, y luego encontraste el número que sumado a 3 te diera 15.

A10: sí, no sé por qué me daría 15, quería encontrar en realidad 16, lo que pasa es que sumé mal,

E: Pero ta, consideremos que ta, que la suma te diera 15, para no cambiar tanto, que la suma de estos dos números en el segundo miembro me diera 15. Entonces en este buscaste un número que sumado con 3 te diera ese número...

A10: Claro 15

E: Que te diera 15. ¿Por qué hiciste eso?

A10: No sé, se me ocurrió que podía ser 15 ...

Acá como sumaba supuestamente 15, busqué algo que me diera 15.

E: ¿Estás usando la misma estrategia en el caso 1d que en el caso 1c?

A10: No, no porque acá quería que me diera igual en los dos, y acá busque solo para este, para completar ahí.

E: ¿Y te parece que daría lo mismo empleando una estrategia y la otra?

A10: ¿Cómo?

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

E: Que los espacios en blanco se completarían igual?

A10: No,

E: ...usando una estrategia y la otra?

A10: ¿usando diferentes estrategias?

E: Sí

A10: Sí pero ...

E: Claro, tu usas una estrategia para completar un espacio ...

A10: Y otra estrategia para completar el otro...

E: Y otra estrategia para completar el otro...¿Que te llevó a usar esa estrategia de decir que el segundo miembro sea igual al segundo miembro y no a completar el espacio intentando como en este que el resultado sea...

A10: Porque acá ya me dabas los dos, entonces lo que hice fue buscar el resultado de este,

E: 143

A10: Y en este, como no me dabas este...

E: Y te pregunto en el 2c, tenés $5+9=14:2$, y tu pusiste falso,

A10: Sí ahí en realidad me entreveré con todo, con la separación de términos, y todas esas cosas...

E: Anda ahí también mezclado no?

A10: Sí, me entreveré con todo.

E: A ver, contame como lo contestarías ahora independientemente de cómo lo hayas puesto

A10: No sé...

A10: y ese es verdadero o falso?

E: Ese es verdadero o falso.

A10: (risas)....

E: Contame cuál es la duda tuya.

A10: Que no sé en realidad si lo que hice está bien, me parece que no.

E: Cuando tu lo hiciste ¿qué es lo que estabas considerando?

A10: Lo mismo que he hecho en todas, que estos resultados eran iguales. Por eso puse falso.

E: En ese sentido pusiste falso. Ta, no en todas porque te acordás que en esta no buscaste eso, no?

A10: risas

E: ¿Y cual sería la otra alternativa para pensarlo?

A10: En realidad si yo sumo $9+5$ me da 14... pero ta, vi el $14:2$...a no sé, soy un desastre!

E: No le asignas sentido al dividido 2 ¿verdad?

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

A10: Claro, no sé como...

E: Queremos sacarlo al dividido dos, no?

A10: risas sí, si se pudiera borrar...

E: Y si yo te permitiera agregarle por ejemplo un igual acá? Te daría mas sentido esa sentencia, esa igualdad?

A10: No sé, no, no sé...

E: Porque viste por ejemplo acá, fijate acá en la actividad 1a, tenés $90:3=___+3=___$ viste que ahí tenés dos signos de igual.

A10: Sí, no sé, no sé, risas)

E: ¿Ahí también se te plantea la duda?

A10: En todo en realidad se me plantea la duda...(risas)

E: Viste que es algo tan cotidiano...

A10: No puede ser que los niños lo hagan al toque...

E: Ahora te hago una preguntita para que me aclares, ya que problema tenía el cociente y el resto que eran iguales en la división ¿en qué te fijas para responder que $40:7=5$ es verdadero, ¿en qué te estas fijando? ¿En el cociente o en el resto?

A10: Me fijé acá (en el cociente), o sea si yo la seguía ahí en realidad me va a dar falso, no?

E: Si siguieras la división... y por ejemplo, relacionado con eso, si te diera una aproximación del número pi, que tiene infinitas cifras, por ejemplo 3,14 o 3,1, podrías aceptar la sentencia que ese número aproximado fuera igual a pi?

A10: Sí en realidad para mi pi es 3,14, no me acordaba lo otro como seguía, me acuerdo que cuando terminamos le dije a Paula, ¿cómo seguía...?

E: Y si yo te hubiera puesto $\pi=3,14$ lo hubieras aceptado como verdadero?

A10: Sí. Verdadero.

E: Bien, y acá, la última pregunta que te hago, en esta: $\frac{1}{3} = Q$ no completaste nada,

A10: No me acuerdo.

E: No te acordabas cuales son los números racionales. Ta, es el conjunto de todos los números que se pueden expresar como fracción, te lo hago más fácil, si yo te pusiera por ejemplo $2 \in \mathbb{N}$, y \mathbb{N} el conjunto de los números naturales ¿aceptarías esa sentencia como verdadera?

A10: Sí, y acá también...

E: En $\frac{1}{3} = Q$ ¿también como verdadera?

¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de magisterio que están cursando el cuarto año de su carrera en un Instituto de Formación Docente del Uruguay?

Aportes para pensar la enseñanza de la matemática en la formación de maestros.

A10: Sí.

E: Por mi parte te agradezco muchísimo...

A10: (risas) Soy un desastre...