Un estudio de las creencias de los estudiantes de profesorado sobre la matemática y sus orígenes: qué puede aportar la historia de la matemática en la formación inicial

Mario Dalcín | Cristina Ochoviet | Mónica Olave

Departamento de Matemática
Consejo de Formación en Educación

Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores
Departamento de Matemática
Asilo 3255, Montevideo.

ISBN (en línea): 978-9974-91-715-6
Primera edición: 2017

Responsables de la edición: Mario Dalcín, Cristina Ochoviet, Mónica Olave
Publicación avalada por la Comisión de Publicaciones del Consejo de Formación en Educación

Imagen de tapa: Azulejos marroquíes

Por consultas o sugerencias: depdematematica@gmail.com

UN ESTUDIO DE LAS CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES DE PROFESORADO SOBRE LA MATEMÁTICA Y SUS ORÍGENES: QUÉ PUEDE APORTAR LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL

Mario Dalcín, Cristina Ochoviet, Mónica Olave

Consejo de Formación en Educación

Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores

Departamento de Matemática

Este trabajo es el resultado del proyecto de investigación titulado *Integrando la Matemática con su Historia en la Formación de Profesores de Matemática*, desarrollado entre 2011 y 2013, en el marco de los Equipos Investigadores aprobados por Resolución 6, Acta 19 del 22/06/2011 del CFE. La publicación fue autorizada por el Considerado del 14/08/2015, Acta 28, del CFE.

PRESENTACIÓN

Un aporte sobre lo (in)visible del mundo profesional del docente de Matemática

Prof. Mag. Alejandra Capocasale Bruno

La investigación *Un estudio de las creencias de los estudiantes de profesorado sobre la Matemática y sus orígenes: qué puede aportar la Historia de la Matemática en la Formación Inicial* de Mario Dalcín, Cristina Ochoviet y Mónica Olave, se enmarca dentro de los proyectos de investigación concursables para Equipos Investigadores del Consejo de Formación en Educación (aprobados por Acta 19, Resolución N° 6 del 2/6/11 del CFE). Este se ejecutó anidado en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores "Juan E. Pivel Devoto" (IPES) como centro de formación permanente (cursos de educación permanente y posgrados para profesionales de la educación), dentro de una gestión institucional que inició un proceso hacia la profesionalización docente como base del desarrollo del carácter universitario de la Formación Docente nacional. En este sentido, tanto a nivel político-social como académico, constituye uno, entre otros, de los aportes relevantes para la construcción de comunidades académicas dentro de la Formación Docente sobre la base de la investigación educativa.

A partir de la lectura del Informe final de esta investigación sobresalen dos aspectos que corresponde mencionar y desarrollar sucintamente, a saber:

- El equipo de investigación presenta antecedentes en la indagación sistemática relativa al conocimiento matemático en sus diversas dimensiones. Esto implica, por lo tanto, que es un equipo con trayectoria profesional de investigación y de enseñanza que da cuenta de un profundo saber que vincula lo teórico con lo práctico. La *praxis* no se construye por generación espontánea, sino que es producto de un largo y extenso proceso de trabajo intelectual (en su sentido teórico-práctico más estricto). Este equipo ha desarrollado este status académico a lo largo del tiempo. Esta investigación es uno más de sus logros dentro del saber académico específico.
- Toda investigación educativa que se propone indagar acerca de las creencias (en este caso de los estudiantes de primer año y segundo año del profesorado de Matemática de un instituto de Formación Docente) tiene implícita la concepción de que es necesario profundizar acerca de los

procesos de profesionalización docente. En esta investigación no solo se apunta a generar conocimiento acerca de estas creencias, sino que se da un paso más allá: se trabaja con el recurso didáctico de la Historia de la Matemática. Se plantea el interesante "experimento" de lo que ocurre con las creencias (previas) post facto incorporación de tal recurso. Esto conlleva una visión dinámica no solo de la Matemática sino del vínculo teoría-práctica en la formación de docentes. Muchas veces, este vínculo es concebido exclusivamente como resultado de la práctica educativa propiamente dicha. En esta investigación, el equipo responsable apuesta a que se puede ingresar por el intersticio epistémico entre la teoría y la práctica en el trabajo de campo de una investigación para descubrir emergentes teórico-prácticos.

Finalmente, y no por ello menos relevante, cabe señalar que esta investigación es con claridad un ejemplo de lo establecido por la Dra. Marta Fernández en su comunicación en la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires un 18 de agosto de 2006: "El doble carácter de lo social como conjunto de creencias y prácticas que el hombre encuentra al nacer, como un complejo de significados subjetivos..." (p. 5) que hay que considerar y jamás desatender. Estos constituyen la base del significado construido y dinámico del contenido de todos los comportamientos sociales incluido el del docente.

Referencia

Fernández, M. (2008). Creencia y Sentido en las Ciencias Sociales. Comunicación en la sesión privada extraordinaria de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires. Recuperado de http://www.ciencias.org.ar/user/files/Fernandez.pdf

Índice

Introducción

La formación inicial de profesores se ha convertido en uno de los principales focos de atención de la investigación en Didáctica de las Ciencias en general y en Didáctica de la Matemática en particular (Furió, 1994; Gómez, 2009; CBMS, 2001; Ochoviet y Olave, 2009).

En nuestro país es bien conocido el problema de la enseñanza de la matemática en todos los niveles del Sistema Educativo. Se ha confundido el rigor propio de la matemática, con el rigorismo en su enseñanza y, en esa medida, no ha contribuido a la formación real de los estudiantes; por el contrario, ha incidido en el fracaso escolar. Se hace necesario entonces conocer en profundidad cómo formar profesores que puedan desarrollar proyectos de aula acordes a las recomendaciones emergentes en la enseñanza de la matemática para la enseñanza media (NCTM, 1991).

El conocimiento de los profesores se traduce a la práctica a través del filtro de sus creencias acerca de la matemática y su enseñanza (Swafford, 1995). En este sentido, Ernest (1989) señala que los cambios en la educación matemática no podrán tener lugar a menos que los docentes cambien sus creencias, fuertemente arraigadas, sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

Muchos profesores siguen creyendo hoy en día que la matemática es exacta e infalible. Esta creencia en un futuro profesor puede conducirlo a plantear a sus estudiantes una matemática estática o puramente instrumental. Esto es, en el primer caso, una matemática entendida como un cuerpo unificado de conocimientos preexistente que espera por ser descubierto y, en el segundo, una matemática entendida como un conjunto de instrumentos (reglas, operaciones, algoritmos) y que por tanto puede ser asociada a una visión formalista de la matemática. Según Albert (1998) la siguiente idea ilustra bien estas posturas: “Tú no vas a inventar (o demostrar) lo que ya está inventado (o demostrado), hazlo como te digo” (p. 20), diría un profesor a su alumno. Con lo cual la actividad del estudiante se reduce a la memorización y mecanización para aprobar pruebas y exámenes, y la del profesor a dar un enfoque desvinculado de todo contexto histórico o social y con excesivo énfasis en el desarrollo de habilidades algorítmicas.

Una meta mayor en la formación docente es que los futuros profesores desarrollen creencias y actitudes favorables acerca de la matemática y su enseñanza para que puedan tener una nueva perspectiva que los lleve, en un futuro, a cambios en sus prácticas de aula (Clarke y Hollingsworth, 1994; Dalcín, Ochoviet y Olave, 2008).

Lo que los estudiantes de profesorado aprenden en su período de formación inicial está directamente conectado con su futuro rol de enseñantes. En este contexto la forma en que la matemática es enseñada a los futuros docentes es más importante que los temas que se abordan.

Philippou y Christou (1998) reportan que la inclusión de la historia de la matemática como recurso para la enseñanza ha sido un factor que incide en un cambio positivo en las creencias de los estudiantes hacia la matemática y su enseñanza.

En este trabajo reportamos una investigación que abordó por un lado, el estudio de las creencias de los estudiantes sobre la matemática, y por otro, el análisis de sus reacciones frente a situaciones de enseñanza que utilizaron a la historia de la matemática como recurso didáctico. Nuestra meta es ir generando elementos que contribuyan a la comprensión de los procesos de cambio de las creencias de los futuros profesores de matemática en nuestro sistema de formación de profesores. Las secuencias de enseñanza que diseñamos no intentan, como se verá más adelante, reproducir el proceso histórico de construcción de los conocimientos en forma acrítica, sino incorporar elementos de la historia que aporten a la comprensión de las ideas matemáticas y contribuyan a una visión de la matemática como construcción social.

1. Estado del arte

Con el objetivo de precisar los límites y alcances del problema de investigación reportaremos algunos trabajos que por sus objetivos de investigación o problemática de estudio, guardan relación con la temática que nos proponemos abordar.

El estado del arte que presentamos está organizado de la siguiente manera:

- Reflexiones emergentes en el campo de la investigación referidas a la integración de la Historia de la Matemática en la educación matemática.
- Resultados de investigación referidos a la integración de la Historia de la matemática en los procesos de enseñanza.
- Resultados de investigación referidos a las creencias de los estudiantes y profesores acerca de la matemática y su enseñanza.

Luego ubicaremos nuestro proyecto en relación a las investigaciones reportadas y destacaremos la aportación que pretendemos realizar en el campo.

1.1. Reflexiones emergentes en el campo de la investigación referidas a la integración de la Historia de la Matemática en la educación matemática

A partir de la década del 90 se puede constatar una mayor preocupación acerca del uso y valor de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática. Prueba de ello es el trabajo que empezó a hacerse a partir de ICMI (*International Commission on Mathematics Instruction*) abordando el estudio del rol de la historia de la matemática en la enseñanza y aprendizaje de la matemática y que culminó en la publicación del libro *History in mathematics education: the ICMI study*, Fauvel/Van Maanen (2000).

Según algunos estudios (Fraser y Koop, 1978; Philippou y Christou, 1998) se evidencia el interés creciente entre los profesores de matemática en la historia de la matemática; al mismo tiempo señalan las dificultades de los docentes en acceder a materiales que permitan un uso real de la historia en sus clases. En muchos países, sobre todo europeos, se formaron grupos de investigación en torno al tema.

De acuerdo a Gulikers y Blom (2001, p. 224) “el cambio innovador en los últimos años es la búsqueda de una base teórica y una metodología para la integración de la historia en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática”. Es en este sentido que estos autores, a partir de un relevamiento de artículos publicados en revistas de didáctica de la matemática a partir de la década del 70, buscan organizar los *por qué* y los *cómo* de esta integración. También hacen una distinción entre argumentos que corresponden a profesores y aquellos que corresponden a estudiantes.

Los argumentos referidos al *por qué* usar la historia han sido agrupados por Gulikers y Blom (2001) en tres categorías: conceptuales, (multi-) culturales, motivacionales; haciendo una distinción entre argumentos referidos al profesor y al estudiante.

Entre los argumentos conceptuales encontramos el principio histórico-genético que sostiene que la génesis del conocimiento en el individuo sigue el mismo curso que la génesis del conocimiento en la humanidad. Actualmente se discute el alcance de esta concepción en la enseñanza (Sessa, 2005) sin negar la posibilidad de ciertos puntos de encuentro en el desarrollo histórico y las dificultades que enfrenta un estudiante al momento de conceptualizar ideas matemáticas. Ernest (1994) defiende el uso de la historia de la matemática para proporcionar un análisis epistemológico de la génesis de los conceptos matemáticos para los propósitos psicológicos y didácticos. De acuerdo a Schubring (1988) y Waldegg (1997) existe una conexión entre los errores de los estudiantes, los obstáculos cognitivos y los problemas en el desarrollo histórico de la matemática. Afirman que conocer momentos importantes de la historia puede proveer al docente de herramientas para anticipar algunos obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de la matemática y ayudarlos a entender mejor los errores y concepciones erradas en ciertos temas. Barbin (1994, 1996, 1997) sostiene que tener conocimiento de las viejas fuentes permite tener una mejor comprensión de la esencia de lo que es la matemática y mejora sus habilidades didácticas como profesor. El conocimiento por parte de los estudiantes de que la matemática ha sido inventada en distintos momentos de la historia, y no algo que siempre estuvo ahí, la hace algo más concreto, menos por encima de lo humano. Este aspecto es relevante para nuestra investigación en la medida que el uso de este recurso podría afectar las creencias de los alumnos sobre la matemática.

Entre los argumentos (multi-) culturales los autores sostienen que la historia de la matemática puede contribuir a mostrar que la matemática no es solo producto de la cultura occidental sino que han habido aportes de las distintas culturas a través del tiempo. También permitiría tener una visión científica del mundo, siendo la matemática una vertiente más en dicha visión junto a otras ramas de la ciencia. Además, es posible hacer uso del contexto cultural de ciertos tópicos de la historia de la matemática como estrategia de enseñanza. La historia de la matemática puede ayudar a explicar el rol de la matemática en la sociedad, a concebir la matemática como una actividad dinámica influenciada por factores sociales y culturales. También puede contribuir a entender que el desarrollo de la matemática se ha debido a motivaciones provenientes del estudio de la naturaleza así como a motivaciones internas de la propia matemática. Permite concebir la matemática como una actividad humana y no solo como un cuerpo rígido de verdades inmutables. Esta componente humana de la matemática puede ser vista como un objetivo, una meta a alcanzar o también como una consecuencia natural de enseñar la matemática desde una perspectiva histórica.

En referencia a los argumentos motivacionales, la historia de la matemática puede ser usada para crear un ambiente de clase más interesante y disfrutable, así como ser fuente de materiales para el trabajo en clase y disponer así de nuevos enfoques para un tema determinado. Explorar en torno a la historia de la matemática contribuye a incrementar el interés de los estudiantes por aprender matemática en la medida que la hace más disfrutable (Byers, 1982; Siu y Siu, 1979). También motiva a que indaguen por su propia cuenta. La vía en que la historia de la matemática puede ser usada en las clases es la vía en la que los estudiantes puedan revivir el trabajo creativo e imitar la creación de resultados ya creados en el pasado. Esto no necesariamente implica seguir cronológicamente el desarrollo de las ideas matemáticas. (Grattan-Guinness, 1973)

¿Cuáles son las críticas que han surgido en la comunidad de educadores matemáticos a los argumentos antes presentados? Una primera dificultad es que muchos docentes no tienen los conocimientos necesarios acerca de la historia de la matemática (Fauvel, 1991). Otra dificultad es que muchos profesores tampoco tienen acceso a materiales adecuados que les permitan integrar la historia de la matemática a sus clases. Una tercera dificultad que se le presenta a los docentes es que insume mucho tiempo la elaboración de los materiales para el trabajo en clase (Fowler, 1991).

El *cómo* puede usarse la historia de la matemática en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, es agrupado en tres categorías en el Capítulo 7 del ICMI *Study* (Tzanakis y Arcavi, 2000, p. 208):

> (a) Aprendizaje de la historia mediante la provisión de información histórica directa. Esta forma puede hacerse mediante la información de hechos aislados o mediante cursos completos o libros sobre la historia de las matemáticas.
> En ambos casos el énfasis está puesto en presentar una serie de datos y fuentes históricas y no en el aprendizaje de conceptos matemáticos.
>
> (b) Aprendizaje de temas matemáticos, siguiendo un enfoque de la enseñanza y el aprendizaje inspirado por la historia. De acuerdo a estos autores este ítem refiere a una aproximación genética en la enseñanza y aprendizaje. No es una aproximación ni estrictamente deductiva ni histórica, sino que el concepto o teoría matemática involucrada se estudia después de haber motivado al estudiante a hacerlo. De esta manera el nuevo concepto o teoría surge en el estudiante como una necesidad al tratar de responder preguntas y problemas históricamente generados. Esta "necesidad" del concepto es el núcleo central del significado que el estudiante atribuirá a dicho concepto.
>
> (c) Desarrollo de una conciencia más profunda, tanto de la matemática en sí como del contexto social y cultural en los que la matemática se ha desarrollado.
> En este sentido la historia de la matemática brinda oportunidades para desarrollar y analizar la naturaleza cambiante de la matemática a lo largo de su historia; el rol de las dudas, paradojas, contradicciones, intuiciones, heurísticas y dificultades a medida que se producen nuevas matemáticas en el contexto específico de preguntas y problemas.
> Por otro lado la historia de la matemática puede ilustrar acerca de las conexiones de la matemática con los aspectos sociales y culturales en las que se desarrollaron.

En nuestro trabajo tendremos en cuenta los aspectos referidos en b) y c) para el desarrollo de las secuencias didácticas que desarrollaremos.

1.2. Resultados de investigación referidos a la integración de la Historia de la matemática en los procesos de enseñanza

En la última década se han realizado varias investigaciones que refieren al uso de la historia de la matemática en el trabajo con profesores y futuros profesores de matemática. Aquí reportaremos los trabajos de Furinghetti (2000, 2007), Pitombeira (2000), Fried (2008), Arcavi e Isoda (2007), Charalambous, Panoura y Philippou (2009), Philippou y Christou (1998) y Ho (2008).

Furinghetti (2000) lleva adelante una experiencia con estudiantes universitarios de matemática que eligieron la docencia de la matemática como su futura profesión. A partir de definiciones dadas de un cierto objeto matemático a lo largo de la historia, se discuten con los estudiantes ciertos aspectos de la definición: lógicos, epistemológicos y didácticos. Centrándose en el aspecto didáctico los estudiantes tuvieron la posibilidad de reflexionar en torno a: cuándo y cómo es significativo introducir definiciones; cuáles son las maneras más eficientes para producir definiciones (ostensivas, extensivas); qué aspectos son preferibles (semánticos o sintácticos); qué aproximación elegir (constructiva o declarativa); qué orientación seguir en clase (histórica o lógica). La autora concluye que la historia de la matemática no es la panacea de todos los problemas de la formación de profesores de matemática pero, no obstante, sostiene la tesis de que la historia es un buen vehículo para reflexionar sobre problemas cognitivos, para trabajar sobre las concepciones de la matemática y su enseñanza de los estudiantes, y para proponer flexibilidad y concebir la matemática con mente abierta.

Pitombeira (2000) realizó una experiencia con profesores de matemática en la que intentó ampliar el concepto que tenían de función (que estaba restringido a la conceptualización del mismo como subconjunto del producto cartesiano con determinadas características) y atender el rechazo a otras visiones. Para esto utilizó diferentes definiciones del concepto de función que aparecen en su desarrollo histórico y analizó la presentación histórica de este objeto matemático en los libros de texto de Brasil. Este autor concluye que los profesores participantes tomaron conciencia de que la forma en que ven los conceptos es una consecuencia de ideas, movimientos e influencias del pasado, permitiéndoles ver que varias definiciones son posibles y que no es necesario adoptar visiones hostiles hacia alguna de ellas.

Fried (2008) plantea la pregunta acerca de si la incorporación de la historia de la matemática en la educación matemática, en particular a la educación secundaria, puede realizarse sin problemas. Hay problemas prácticos como la elección de temas históricos relevantes, la producción de materiales de aprendizaje, y la búsqueda de espacio para el estudio histórico en los actuales planes de estudio de matemáticas. Pero en Fried (2001) se plantea que la historia de la matemática y la enseñanza de la matemática son disciplinas, cada una con sus propios objetivos y su propia concepción del tema. La pregunta, entonces, era si estos objetivos son compartidos, si la historia de la matemática está en armonía con la enseñanza de las matemáticas.

En lugar de una negación de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática, el dilema que debe ser tomado como un desafío a reconsiderar es la naturaleza de la educación matemática para que la historia de la matemática sea una parte integral de lo que significa ser educado matemáticamente.

En los últimos años, el cambio en la atención de la comunidad hacia aspectos socioculturales de la educación matemática resulta promisorio a la hora de pensar en enfoques que hagan posible la integración de la historia de la matemática a la enseñanza.

Arcavi e Isoda (2007) realizan una investigación en la que analizan un enfoque para desarrollar la capacidad de escuchar en forma productiva de los profesores. Entienden que *escuchar* significa prestar atención a lo que dicen los estudiantes (además de observar lo que hacen) con la intención de entender qué es lo que hacen, buscando las fuentes y vinculaciones de sus afirmaciones.

¿De qué forma se podría conseguir esto? La propuesta de los autores se basa en la lectura y comprensión de textos históricos como una forma de ejercitar la adopción de la "perspectiva del otro". La experiencia consistió en un taller con profesores de matemática en formación, en dos sesiones y trabajando sobre materiales previamente preparados a partir de un texto del Papiro Rhind.

El escuchar implica por parte del docente: crear situaciones en las que los estudiantes puedan involucrarse y expresar sus ideas libremente; preguntar buscando detectar la esencia del pensamiento del estudiante; analizar lo que se está oyendo haciendo el esfuerzo de ponerse en el lugar del otro; decidir en qué forma puede integrar a la clase las ideas previamente escuchadas.

Una vez entendida una idea o un conjunto de ideas matemáticas tendemos a olvidar o a minimizar el proceso que hicimos para conseguir tal dominio. Este hecho crea una distancia entre la posición del docente, que ya se ha enfrentado a la situación problemática y la ha superado, quizás hace bastante tiempo y por tanto ni siquiera recuerda cuáles fueron sus propias dificultades originales, y la posición de los estudiantes que se están enfrentando al desafío por primera vez. El docente suele escuchar a los estudiantes con un fin evaluativo y les responde valorando si las intervenciones se adecuan o no a un conocimiento ya establecido y en posesión del docente y al cual el estudiante no tiene acceso. Se hace así necesario, como parte de la formación del docente, desarrollar la capacidad de escuchar la perspectiva del otro y esto implica salirse del escuchar evaluativo y buscar entender lo que está afirmando el estudiante, por qué lo hace, qué sostiene su afirmación, cuál es su sentido.

En Furinghetti (2007) se reporta una investigación que se realizó en un programa de educación de futuros profesores en el que la historia de la matemática no se presentó por sí misma, sino como un mediador del conocimiento para la enseñanza. El objetivo era hacer que los participantes reflexionaran sobre el significado de los objetos matemáticos a través de experimentar momentos históricos de su construcción. Se pretendía que esta reflexión promoviera una asignación de significados para la enseñanza de la matemática que contrarrestara la reproducción pasiva del estilo de enseñanza de la matemática que los futuros profesores han experimentado como estudiantes.

La investigación hace hincapié en la “reorientación”: hacer a los futuros profesores experimentar de nuevo la construcción de los objetos matemáticos. A través de la reorientación los futuros profesores son obligados a encontrar su propio camino hacia la apropiación del significado de los objetos matemáticos así como de los objetos a enseñar.

Mediante entrevistas previas los futuros profesores involucrados en la experiencia revelan sus creencias acerca de la matemática y de lo que es enseñar matemática y evidencian dificultades en concebir una manera distinta de enseñar a la forma en que a ellos mismos se les enseñó la matemática. Si bien en su formación como profesores han tenido cursos teóricos tanto de matemática como de pedagogía no son capaces de apreciar la utilidad ni la aplicabilidad de dicha teorías pedagógicas.

Como resultado de la experiencia los futuros profesores elaboraron: ejercicios y problemas, planes para la enseñanza de secuencias, informes sobre la implementación de parte de estas secuencias.

La historia afectó sus producciones de dos formas:
a) Ver la evolución de un concepto a través de los siglos. Esto les dio la posibilidad de identificar los elementos que hicieron dominantes a ciertas corrientes de pensamiento.
b) La lectura de fuentes primarias les permitió situar el conocimiento en el contexto histórico y entender así el razonamiento de los matemáticos que contribuyeron al desarrollo de ciertos conceptos. De esta forma se recuperan las raíces cognitivas a través de las raíces históricas y se evita ceñirnos solo a la teoría brillante que viene al final del proceso evolutivo. Por otro lado no se halló mayor diferencia en el conocimiento de los profesores después de las experiencias. Furinghetti propone que esto no sería debido al uso de la historia sino más bien a la forma en que se llevaron adelante dichas experiencias dado que la influencia depende en gran parte del método que se haya empleado en introducir la historia.

Charalambous, Panoura y Philippou (2009) reportan una investigación realizada con maestros en formación y referida a sus creencias y actitudes hacia la matemática. Las creencias de los profesores y actitudes hacia la matemática y su enseñanza y aprendizaje son consecuencia de los enfoques docentes de la enseñanza (Philipp, 2007). La experiencia involucró a 94 estudiantes a los que se les planteó cuatro veces un cuestionario a lo largo de dos años. Los cuestionarios fueron aplicados al principio y al final de cada curso. Para examinar las actitudes y creencias de los profesores en formación se usó un cuestionario con ítems que estaban dirigidos a captar las creencias epistemológicas y las creencias de eficacia y las actitudes hacia la matemática. Además se hicieron entrevistas semiestructuradas con seis de los participantes. Este estudio evalúa la eficacia de dos cursos de contenido basado en la historia de la matemática -y que forman parte de un programa de formación universitaria- en la búsqueda de promover cambios en las creencias epistemológicas, creencias de eficacia, y las actitudes hacia la matemática de profesores en formación. Las preguntas de investigación fueron:

- ¿Qué tan exitoso fue el programa de educación basado en la historia de la matemática en transformar las creencias epistemológicas y de eficacia y sus actitudes hacia la matemática?

- ¿La eficacia de este programa en términos de promover cambios en creencias y actitudes difiere de acuerdo a los conocimientos previos de los profesores en formación?

Las creencias formalistas se intensificaron a lo largo del programa, las creencias platónicas disminuyeron y las creencias experimentales fluctuaron.
Los autores terminan sosteniendo que las investigaciones suelen considerar solo los éxitos de los programas de formación, y se pierden así oportunidad de aprender sobre lo que no funciona.
Algunos motivos dados por los autores y que pueden explicar los resultados de la experiencia:
a) No se hizo explícita a los participantes del estudio cuál era la intención de los cursos. Algunas entrevistas revelan que lo que los autores tenían en mente al diseñar y llevar adelante los cursos no fue obvio para los participantes.
b) Los investigadores esperaban que la historia de la matemática ayudara a los participantes a empezar a experimentar la matemática de una forma distinta a cómo la habían vivido hasta el momento. Pero la experiencia de los cursos resultó similar a sus experiencias anteriores en algunos sentidos: continuaron sintiéndose estresados cuando se enfrentaron a problemas complejos; el argumento de que los grandes matemáticos también habían tenido desafíos similares cuando trabajaron en problemas complejos no les resultaba un argumento convincente.
Esto lleva a pensar que las dificultades de los problemas provenientes de la historia de la matemática deben ser graduadas.
c) Algunos entrevistados también sostienen que las oportunidades y el tiempo de involucrarse realmente en el desarrollo de ideas matemáticas fue insuficiente. Los participantes más bien parecen haber vivido la historia de la matemática como turistas en un recorrido donde los docentes hacían de guías mostrando y explicando aspectos destacados, pero sin el tiempo necesario para que los turistas pudieran interiorizarse de cada lugar.
A pesar de lo dicho antes respecto a esta investigación en particular, los autores sostienen que una solución plausible podría ser el diseño de exploraciones guiadas de ideas matemáticas importantes que apoyaran al profesor en formación en su futura labor de enseñanza. La historia de las matemáticas puede apoyar este planteamiento:
- Puede ayudar a tomar decisiones respecto a qué ideas matemáticas explorar en la formación del profesor, teniendo en cuenta aquellas que tengan una mayor vinculación con las matemáticas escolares y que por tanto sean más relevantes en la formación del profesor dado que aparecen vinculadas a su futura tarea.
- Puede ayudar a desarrollar una actitud más productiva de los profesores en formación hacia los temas abordados. La historia de la matemática puede contribuir a hacer familiar lo extraño yendo más atrás y reflexionando sobre lo que se suele dar por sentado cuando se enseñan algunos conceptos a los estudiantes en la enseñanza inicial. Por ejemplo, al estudiar nuestro sistema decimal y el cero, se podrían estudiar otros sistemas no decimales o sistemas que no tengan el cero.

Philippou y Christou (1998) llevaron adelante, en la Universidad de Chipre, un programa de formación de profesores de matemática de enseñanza primaria diseñado con el objetivo de ayudar a los futuros profesores a aprender matemática dándole sentido, tanto a los conceptos como a los métodos, y que de esta forma mejoraran su autoconfianza al hacer matemática. Se tuvo especial cuidado en ofrecer a los estudiantes oportunidades para que tuvieran experiencias exitosas y también en ayudarlos a reconsiderar sus puntos de vista sobre la naturaleza de la matemática, su utilidad, y las dificultades de su aprendizaje. El programa constó de tres cursos: dos cursos de contenido matemático y un curso de enseñanza de la matemática. El objetivo de los cursos fue favorecer un cambio de actitud de los estudiantes hacia la matemática.

El diseño del programa se basó en la hipótesis de que la matemática a enseñar en primaria tiene sus raíces en el período histórico temprano, y que futuros profesores se sintieran motivados a leer la matemática en el contexto de su desarrollo inicial.
El método con el que se llevó adelante los cursos consistió en: la mitad del tiempo se desarrollaron aspectos teóricos y la otra mitad en cómo enseñar hoy en día (teniendo en cuenta los aportes de la didáctica) dichos temas.

Las preguntas de investigación fueron:
1. ¿Cuáles son las actitudes acerca de la matemática de los estudiantes que inician su formación como profesores de enseñanza primaria?
2. Las experiencias matemáticas en la formación de estos profesores, ¿pueden cambiar su actitud?
3. Los cambios en las creencias de los profesores en formación, ¿varían de acuerdo a características personales?

Los resultados de este estudio parecen demostrar que (a) los futuros maestros ingresan a su formación como maestros con ideas falsas y actitudes negativas hacia la matemática, y (b) los programas de formación en matemática pueden influir en las actitudes de manera positiva.

Ho (2008) realizó un estudio a pequeña escala, basado en un enfoque de investigación-acción, que se llevó a cabo por el autor en el Politécnico de Singapur durante un semestre. El estudio de caso consiste en la integración de la historia de la matemática en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, con el objetivo de entender sus efectos (tanto en términos de nivel de motivación y de rendimiento académico) en los estudiantes. Busca investigar si esta metodología ayuda a los estudiantes a desarrollar (o incluso mejorar) una actitud positiva centrada en el fortalecimiento de los siguientes aspectos: (i) interés y apreciación, (ii) creencia, (iii) confianza, (iv) perseverancia. En las primeras seis semanas se incluyeron fragmentos históricos e incorporaron actividades de clase con un componente histórico.

Al final de cada clase, cada estudiante lleva un registro de los sentimientos acerca de la lección, comentarios de lo que se ha aprendido (o no aprendido), las cosas que le gustaron o disgustaron, observaciones sobre la naturaleza de la clase. En resumen, los estudiantes llevan un registro conciente de lo que pasó en clase cada una de las doce semanas. El profesor también lleva un registro de los procesos de enseñanza y aprendizaje en forma de (i) planificaciones de clase y (ii) registro posterior a cada clase. El profesor-investigador tuvo acceso a los registros de los estudiantes y estos fueron periódicamente recogidos como fuente de información sobre los estudiantes. La finalidad del registro del estudiante y del registro del profesor era proporcionar información cualitativa sobre los aspectos de motivación tanto de los alumnos como del profesor, aspecto que difícilmente se logre mediante métodos cuantitativos.

Además de los registros de los estudiantes y el profesor, se hizo una encuesta a los 17 estudiantes que participaron de la experiencia y a otros 57 estudiantes que formaban parte de grupos testigo y que también habían llevado adelante el curso de álgebra lineal, sin el enfoque histórico. La encuesta incluye cuatro aspectos relacionados con las actitudes de los estudiantes hacia la matemática: (1) creencias, (2) intereses, (3) confianza, y (4) perseverancia.

Los resultados indican que el enfoque histórico fue más efectivo en los componentes de creencias y perseverancia. Sin embargo, cabe señalar que el estudio considerado aquí es de un tamaño muy pequeño para que el resultado sea concluyente en general.

1.3. Resultados de investigación referidos a las creencias de los estudiantes y profesores acerca de la matemática y su enseñanza

Varios de los trabajos reportados en la sección anterior hacían referencia a las creencias ya sea de profesores como de estudiantes. En esta sección reportamos algunos trabajos donde los autores sostienen que existe una vinculación entre las creencias del formador y sus prácticas en el aula, como son el caso de Dalcín, Ochoviet y Olave (2008, 2010), Larsen y Zandieh (2008), Marcelo (1994), Blanco (1996), Parra (2005).

Dalcín, Ochoviet y Olave (2008) realizaron un estudio de las creencias de los estudiantes de primer año de profesorado de matemática, relativas a la matemática y su enseñanza, en un instituto de formación docente de nuestro país. Las respuestas de estos estudiantes dan cuenta de que su visión de la matemática al ingresar a la carrera de profesor es la de una disciplina de corte instrumental (un conjunto de reglas, fórmulas y métodos), que vive encerrada en las aulas y que se conecta muy poco con el mundo que nos rodea. También reportaron que los estudiantes que ingresan a formación docente conciben a la enseñanza como un proceso de transmisión en el que el estudiante juega un papel pasivo. Esta creencia se sostiene en las experiencias que han tenido estos estudiantes como alumnos, en el tipo de matemática que se les ha ofrecido y en la manera en que se la han enseñado.

Dalcín, Ochoviet y Olave (2010) analizan el referente epistemológico de diez profesores de matemática de un instituto de formación docente. En el conjunto de los diez profesores con los que trabajaron, identificaron los dos referentes epistemológicos relativos al conocimiento planteados por Albert (1998): el *estático* (cinco profesores) y el *dinámico* (cinco profesores). En el primer caso el conocimiento es entendido como un corpus de conocimientos científicos acotado por la disciplina y elaborado por grandes pensadores, que hay que transmitir y que es el profesor quien lo posee. En el segundo caso, el conocimiento es entendido como una construcción social y negociada a la interna del grupo. Este conocimiento no es estable ni tiene una única expresión. El conocimiento consiste en las respuestas que son originadas, consensuadas y acordadas en el seno del grupo, a diferentes tipos de actividades que fueron diseñadas por el docente con una intencionalidad didáctica específica. La responsabilidad de organizar y transformar el conocimiento es del profesor y del alumno. Los docentes asociados a un referente epistemológico estático desarrollan prácticas de enseñanza en las que el profesor es quien básicamente expone el conocimiento. La participación de los alumnos se reduce a contestar a preguntas de respuesta inmediata, formuladas en la mayoría de los casos por el docente, con el propósito de ir avanzando en el desarrollo del tema y de chequear el grado de coherencia entre el conocimiento que el docente ha decidido enseñar y el conocimiento del alumno. La clase no es planteada como un ámbito de producción de conocimiento matemático. Existen dos razones fundamentales por las que se lleva adelante este tipo de práctica. La primera es porque los profesores creen que dan participación activa a los estudiantes en la construcción del conocimiento, esto es, viven una ficción o una interpretación equivocada del real significado de la participación que efectivamente promueven en clase. La otra razón en que se sustenta este tipo de prácticas es la imposibilidad de diseñar actividades de aula por falta de formación didáctica específica. A partir de lo detectado en este trabajo en relación a la visión estática del conocimiento que se está ofreciendo en muchas de las aulas de formación docente, y teniendo en cuenta las recomendaciones emergentes para la formación de profesores, los autores señalan que se hace necesario emprender proyectos de trabajo que atiendan el diseño y gestión de las clases de matemática de formación docente, al menos en las áreas de geometría, álgebra y análisis, que fueron las consideradas en este estudio.

Larsen y Zandieh (2008) señalan que la matemática puede ser reinventada por los estudiantes universitarios a través de una actividad matemática que tenga un fuerte paralelismo con el proceso descrito por Lakatos (1976). El análisis de Larsen y Zandieh permite sostener que es posible integrar a los estudiantes en el desarrollo de ideas matemáticas a través de diseños de enseñanza que guíen la reinvención en matemática.

Marcelo (1994) hace una reseña y análisis de investigaciones realizadas acerca de las prácticas de enseñanza de los futuros profesores y se pregunta qué nos aportan las investigaciones revisadas para la mejora de las prácticas. Afirma que una mejora sustantiva de las prácticas de enseñanza no es posible si no se presta atención a la calidad de los otros componentes formativos que habitualmente se conocen como cursos académicos. Sostiene que la calidad profesional tiene que ver con la forma en que los formadores de profesores presentan relaciones entre los contenidos de sus materias y la práctica de la enseñanza. Se trata por tanto de analizar en qué medida el conocimiento que los profesores en formación están recibiendo o construyendo es relevante para desenvolverse en contextos reales de enseñanza. Se hace necesario conocer en qué medida existe congruencia entre los métodos didácticos, las tareas académicas y los modelos de evaluación, desarrollados en la institución de formación, y los modelos de profesor que se asuman como apropiados. Uno de los hallazgos que se confirma en la mayoría de las investigaciones sobre las prácticas es que, en primer lugar, los candidatos a profesores traen consigo creencias e imágenes sobre la enseñanza, los profesores y los alumnos que, aunque inconscientes, inciden en la forma en que se aborda la compleja tarea de la enseñanza. En segundo lugar, se confirma que estas creencias no cambian por sí solas; que las experiencias académicas tienen una mínima influencia sobre ellas y que las experiencias prácticas, en general, contribuyen a confirmar dichas creencias. Ante esta evidencia, las investigaciones informan que un primer paso hacia la mejora de las prácticas consiste en hacer conscientes a los estudiantes de las creencias que asumen y cómo, a partir de estas, interpretan el mundo de la enseñanza. Analizar las creencias es una tarea individual pero también colectiva. Se debería incentivar a los estudiantes a justificar sus propias actuaciones docentes a la luz de las creencias y valores que asumen, y a aceptar los dilemas propios de actuar en contradicción con las creencias asumidas.

Blanco (1996) profundiza en el conocimiento de los profesores en formación desde una perspectiva centrada en el paradigma del pensamiento de los profesores. Este autor afirma que los conceptos sobre la matemática, el aprendizaje y la enseñanza están fuertemente relacionados y que, principalmente, condicionan -en gran medida- las prácticas docentes. Además, Blanco describe y analiza diferentes dificultades que los estudiantes de profesorado manifiestan en sus prácticas docentes y que inciden, en parte, en que los estudiantes se sitúen ante las prácticas más desde su perspectiva de alumnos que desde la posición que podría suponerse de profesores en formación que se encuentran desarrollando alguna actividad docente. En las prácticas de enseñanza reflejan más lo que han vivido como alumnos que lo que han estudiado en clases teóricas de psicopedagogía o de didácticas específicas. Blanco señala que la falta de reflexión sobre las contradicciones y dificultades mencionadas es una de las causas fundamentales para que persistan en los estudiantes de profesorado creencias generales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que son coherentes con la tradición educativa vivida por estos durante su largo proceso de formación. Ello justificaría, en parte, las dificultades para aplicar los conocimientos sobre Didáctica de la Matemática que reciben en sus cursos, a su actividad durante las prácticas docentes o en los primeros años de enseñanza. Igualmente, la falta de referencia explícita al conocimiento que los estudiantes de profesorado han desarrollado a partir de su propia experiencia y la falta de conexión del conocimiento formalizado en la formación de profesores con situaciones escolares concretas posibilitan que persistan en los estudiantes de profesorado sus conocimientos anteriores sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Parra (2005) describe las relaciones existentes entre las creencias de un grupo de estudiantes de Licenciatura en Educación, mención matemática y física, de la Universidad de Zulia (Venezuela) y la de los actores más próximos presentes en su proceso de formación (profesora colaboradora y alumnos). A partir de su experiencia como formador de docentes, Parra notaba que la inserción de los pasantes al contexto educativo se iniciaba en el marco de una gran tensión entre las exigencias y presupuestos teóricos de las prácticas profesionales (basadas en creencias sustentadas en modelos constructivistas) y las creencias de los pasantes y otros actores que intervenían en el desarrollo de sus prácticas en los centros educativos. Considera que es necesario transformar y adaptar la educación matemática a las nuevas realidades y para ello es necesario un cambio en los docentes en la manera de ejercer su profesión que está estrechamente ligado a sus creencias en torno a la matemática y su enseñanza. Complementando investigaciones anteriores acerca de las creencias, Parra pone el foco de atención en las relaciones del futuro profesor con el entorno. Plantea investigar cuál es la relación existente entre las creencias de los pasantes y las de los diferentes actores del contexto escolar matemático durante el desarrollo de las prácticas profesionales. Para contestar la interrogante se propone identificar las creencias de los pasantes y de los actores próximos y cómo evolucionan a lo largo de sus prácticas y con las interacciones con los otros actores. Estudia cuatro tipos de creencias: conceptualización de la matemática, objetivos de la educación matemática, modelo de enseñanza de la matemática, modelos de evaluación. Identifica las creencias de los pasantes y cómo evolucionan a lo largo de sus prácticas y con las interacciones con los otros actores. Concluye que las creencias personales no están aisladas. Deben considerarse en el marco de un contexto ya que forman parte de una red de creencias constituidas en torno a una institución escolar y que cualquier intento de modificar esas creencias debe tener en cuenta al conjunto de actores que las constituyen.

2. Problema de investigación y delimitación de objetivos

2.1. Qué docentes formar

Si nos planteamos formar *profesores de educación media en la especialidad matemática* parece claro que la formación que reciba el futuro profesor deberá estar enfocada hacia la tarea que desarrollará: enseñar matemática en el nivel medio. Veamos entonces qué entendemos por prácticas adecuadas para la enseñanza de la matemática a nivel de la enseñanza media. Nuestra concepción de una buena enseñanza está basada en presupuestos ideológicos y filosóficos que no desarrollaremos en esta oportunidad pero que se desprenden de las puntualizaciones que realizaremos. Creemos, al igual que el Grupo Cero de Valencia (1987), que el centro de atención de la enseñanza de la matemática debería desviarse de los contenidos a la actividad matemática del estudiante. Esto implica una manera especial de entender la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Tal como lo señala el Grupo Cero, consideramos que toda experiencia educativa involucra un proceso creador, tanto por parte de los estudiantes como de los profesores, cada uno de ellos en la medida de sus posibilidades y conocimientos. Dado que la mayoría de los estudiantes va a usar poco de la Matemática (entendida como disciplina científica) en su vida y que muchos alumnos sufren el aprendizaje de la matemática escolar como un fracaso, entendemos que uno de los principales objetivos de su enseñanza es que disfruten de su aprendizaje y no se consideren fracasados en una disciplina de tan alta consideración social. Es importante que los estudiantes desarrollen ciertas capacidades como generalizar, abstraer, formular hipótesis y someterlas a prueba, comunicar sus ideas y enfrentar problemas nuevos, con la confianza de que podrán entenderlos, abordarlos y resolverlos. Entendemos que la actividad matemática resulta óptima en este sentido ya que en su seno el alumno encontrará situaciones ideales para poner en juego todas estas capacidades. Consideramos, como el Grupo Cero de Valencia, que para que los estudiantes aprecien en qué consiste la matemática, es suficiente que experimenten durante la enseñanza media, situaciones problemáticas en las que actúen como matemáticos, esto es, que se hagan preguntas, que exploren, que investiguen, que tomen decisiones y que comuniquen con claridad sus resultados.

2.2. El proceso de formación y las prácticas de los futuros docentes

Si aceptamos esta concepción de la enseñanza de la matemática para el nivel medio, la pregunta que nos planteamos ahora es cómo formar docentes que posibiliten en sus aulas el tipo de trabajo antes descrito.

Furió (1994) reporta variados trabajos de investigación en los que se sostiene que los profesores de ciencias poseen concepciones muy arraigadas sobre la ciencia y sobre la forma de aprenderla y enseñarla, que son consecuencia de su historia escolar. Estos trabajos consideran que la forma en que los profesores han sido enseñados impacta fuertemente en su ejercicio de la función docente. En Blanco y Borrallho (1999) se señala que para contextualizar el contenido en la formación de profesores se debe tener en cuenta a los participantes del programa de formación y el contexto donde estos desarrollarán su acción. Esto queda claramente expresado en palabras de García, Escudero, Llinares y Sánchez (1994):

> El programa de formación debe capacitar a los futuros profesores para que puedan llegar a caracterizar, en su práctica futura, una nueva cultura matemática escolar, diferente de la que proceden como aprendices. Esto lleva como consecuencia la necesidad de definir nuevas prácticas sociales alternativas en las aulas de los programas de formación. (p. 12)

De aquí que sea necesario situar la atención en las prácticas de enseñanza en la formación docente, ya que, en la formación inicial, no podemos dejar de plantearnos la meta de emprender proyectos de trabajo que contribuyan a un cambio en las creencias de los futuros profesores.

2.3. La incidencia de la historia de la matemática en la formación de un profesor

De Guzmán (1993) recomienda incluir a la historia en la formación de profesores. Este autor señala que:

> La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas. (p. 107)

Entendemos entonces que la inclusión de la historia de la matemática en los propios procesos de enseñanza puede contribuir a una visión más dinámica de la matemática permitiendo una visión de esta como una construcción social, producto del trabajo de hombres y mujeres. Creemos que esto también favorecerá el desarrollo de una perspectiva amplia del conocimiento matemático que trascienda los meros resultados permitiendo tomar contacto con la génesis del conocimiento, con los problemas y contextos que le dieron origen. En definitiva, lo más importante es entender que la actividad matemática es una actividad humana más y que el conocimiento matemático es producto de esa actividad.

2.4. Objetivos generales y específicos

El objetivo general de este trabajo es desarrollar elementos que contribuyan a la formación de profesores de matemática que desarrollen creencias y actitudes relativas a la matemática y su enseñanza más acordes a la evolución natural de esta disciplina, rompiendo así con las visiones formalistas y platónicas tanto de la matemática como de su enseñanza.

Como objetivos específicos, planteamos los siguientes:

1) Explorar las creencias de los estudiantes sobre la matemática situada en un ámbito escolar.

2) Diseñar y poner en práctica tres secuencias de enseñanza que utilicen como recurso la historia de la matemática en las asignaturas Fundamentos de la Matemática, Geometría I y Análisis Matemático I del profesorado de

matemática (Plan 2008), y analizar las reacciones inmediatas de los estudiantes respecto de la clase atendida.

2.5. Preguntas que busca responder la investigación

Las preguntas de investigación se derivan de los objetivos planteados. Pretendemos indagar cuáles son las creencias predominantes sobre la matemática y de qué manera se evidencian estas creencias en las reacciones de los estudiantes a posteriori de la puesta en práctica de situaciones de enseñanza que utilizan como recurso didáctico a la historia de la matemática. También nos preguntamos si la historia de la matemática utilizada en situación de clase puede ser una herramienta para incidir en un cambio de estas creencias.

2.6. Justificación de la investigación

Como ya señalamos, en Dalcín et al. (2008) se da cuenta de las creencias de los estudiantes de primer año de profesorado de matemática, relativas a la matemática y su enseñanza, en un instituto de formación docente de nuestro país. Las respuestas de estos estudiantes revelan que su visión de la matemática al ingresar a la carrera de profesor es la de una disciplina de corte instrumental, que vive encerrada en las aulas y que se conecta muy poco con el mundo que nos rodea. También se reporta que los estudiantes conciben a la enseñanza como un proceso de transmisión en el que el estudiante juega un papel pasivo. Si como señalan diversos autores (Mellado, 1996; Marcelo, 1994) estas creencias inciden fuertemente en las prácticas de los futuros profesores y además son muy estables y apenas cambian durante el período de formación, se hace necesario emprender proyectos de trabajo que enfrenten esta realidad que es inminente cambiar si buscamos formar profesionales de la educación que puedan desempeñarse atendiendo las recomendaciones actuales en Educación Matemática para la enseñanza media.

3. Marco teórico

Ernest (1989) señala que los cambios en la educación matemática no podrán tener lugar a menos que los docentes cambien sus creencias, fuertemente arraigadas, sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Sostiene que estos cambios en las creencias están asociados a la autonomía y a la reflexión por parte de los docentes de matemática. Si bien la enseñanza de la matemática depende de múltiples factores, aquellos que inciden fuertemente son: los esquemas mentales de los docentes -particularmente el sistema de creencias concerniente a la matemática y su enseñanza y aprendizaje-, el contexto social en el que se desarrolla la enseñanza -en especial las restricciones y oportunidades que provee-, y el nivel de los procesos reflexivos de los docentes.

Según Ernest, estos factores determinan la autonomía del profesor de matemática y por tanto la posibilidad de realizar innovaciones en la educación que, a su vez, dependen de la autonomía del profesor para una implementación exitosa.

Este autor establece que los componentes clave de las creencias de un profesor de matemática son: su visión o concepción de la naturaleza de la matemática; su modelo o visión de la naturaleza de la enseñanza de la matemática; su modelo o visión de los procesos de aprendizaje de la matemática.

Respecto de la naturaleza de la matemática, Ernest distingue una visión instrumentalista, una platónica y una visión dinámica. Desde la perspectiva instrumentalista, la matemática es un conjunto de hechos, reglas y métodos, concebidos como entidades separadas. La visión platónica es estática y concibe a la matemática como un cuerpo consistente de conocimientos. Desde esta perspectiva la matemática se descubre, no se crea. La visión dinámica de la matemática la concibe como un proceso de investigación a través del cual se obtienen resultados provisionales y no productos terminados, sus resultados están abiertos a la revisión y se ubican en un contexto social y cultural.

Ernest señala que el modelo de enseñanza del profesor de matemática, refiere a las concepciones que un profesor tiene sobre su rol en el aula, sobre las acciones que emprende y sobre las actividades que formula en relación a la enseñanza de la matemática. Estos modelos de enseñanza están asociados con los modelos mentales de los profesores sobre el aprendizaje de la matemática y consecuentemente con los comportamientos y las actividades que se espera que los estudiantes realicen para aprender matemática. También con la idea que el profesor tiene de lo que es una actividad apropiada de aprendizaje. En estos modelos entran en tensión concepciones opuestas como ser: el aprendizaje como construcción activa en contraposición a la recepción pasiva del conocimiento o la autonomía del estudiante versus su actitud pasiva frente al conocimiento.

Como definición de creencia consideraremos la referenciada por Moreno y Azcárate (2003) a partir de los aportes de Llinares (1991) y Pajares (1992):

> Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se

> fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo. (p. 267)

Las creencias sobre la enseñanza incluyen lo que el profesor considera que significa enseñar, cómo enseñar, su rol, la metodología de enseñanza, los recursos empleados, etcétera.

Según Pajares (1992) muy pocos discutirían que las creencias de los docentes inciden en sus percepciones y juicios, y que estos a su vez afectan su comportamiento en clase. Las creencias actúan como una especie de pantalla que filtra la información que reciben los profesores durante su proceso de formación y condiciona la manera en que esta se interpreta y se lleva a la práctica. Por consiguiente, entender la estructura de las creencias de los docentes o de los futuros docentes, es imprescindible para mejorar su formación profesional y sus prácticas de aula. Este autor señala que poder entender los procesos de cambio de estas creencias constituye un gran desafío. Es en este sentido que intentamos realizar un aporte.

4. Método

Describimos a continuación con qué grupos y estudiantes trabajamos de acuerdo a los propósitos de la investigación. También se explican los objetivos y el diseño de las secuencias de enseñanza así como el diseño del cuestionario utilizado para explorar las creencias de los estudiantes y su análisis a priori.

En este proyecto trabajamos con los estudiantes de tres grupos de la especialidad matemática de un instituto de formación de profesores: dos grupos de primer año y uno de segundo año. En el caso de los grupos de primer año se eligió uno para trabajar en la asignatura Geometría I y otro en la asignatura Fundamentos de la Matemática. En el caso del grupo de segundo año, se trabajó en la asignatura Análisis Matemático I. Se eligieron grupos que no estuvieran a cargo de los docentes responsables de este proyecto porque no teníamos intención de realizar un proyecto en primera persona o desde adentro como lo denomina Ball (2000) y cuyos docentes responsables estuvieran dispuestos a participar en el proyecto para llevar adelante las secuencias de enseñanza diseñadas. En el transcurso del desarrollo del proyecto, uno de los docentes de primer año desistió en participar pero manifestó no tener inconvenientes en que se pusiera en escena una secuencia en su grupo de Fundamentos de la Matemática. En este caso uno de los docentes investigadores fue quien tuvo a su cargo el grupo mientras se trabajó con una de las secuencias de enseñanza y los otros dos investigadores participaron como observadores. En este último caso, durante el dictado de la clase, el investigador que ofició como docente, cuidó sus intervenciones tratando de minimizar todo sesgo y empleó una metodología que se caracterizó más bien, por dejar hablar a los estudiantes, que confrontaran entre sí sus ideas y se dedicó más que nada a realizar pequeñas síntesis, a partir de lo vertido por los estudiantes, en los momentos que fue planificado.

A todos los estudiantes de los grupos participantes se les aplicó un cuestionario de tres preguntas para explorar sus creencias en relación a la matemática y sus orígenes. Este cuestionario fue aplicado en uno de los días y horarios que habitualmente tenían clase y en presencia del docente responsable del grupo. Lo contestaron individualmente. Fue aplicado antes de que se dictaran las clases utilizando las secuencias de enseñanza con historia de la matemática.

Los docentes de los grupos de Geometría I y Análisis Matemático I fueron quienes llevaron a la práctica las respectivas secuencias de enseñanza en sus grupos. Con estos dos docentes se realizaron entrevistas previas en las que se dialogó sobre la secuencia a aplicar, la intencionalidad del diseño y la metodología a utilizar en la clase. Se explicó que se buscaba enfrentar a los estudiantes a conflictos a través de las actividades matemáticas que debían resolver y el papel del docente era más bien el de un mediador que, dialogando con los estudiantes y favoreciendo la discusión entre los integrantes del grupo, iba haciendo avanzar la situación didáctica. Se les pidió que al finalizar la sesión realizaran junto a los estudiantes una síntesis de lo trabajado en la clase en forma oral. La clase a dictar estaba completamente estructurada pero cada docente tenía libertad para realizar cambios manteniendo el abordaje y objetivo de todas las actividades planificadas.

Los docentes investigadores asistieron a los grupos a observar las clases en las que se pusieron en escena las secuencias de enseñanza diseñadas. Estas clases fueron dictadas en el horario habitual de la asignatura y tuvieron una duración aproximada de dos horas y media cada una. Las clases fueron audiograbadas y se tomaron notas. Como cada clase se dividió en equipos de trabajo, se audiograbaron también las intervenciones orales de cada uno de los participantes a la interna de los equipos.

Al finalizar la clase se aplicó un cuestionario a los estudiantes que fue contestado en forma individual en los grupos de Geometría I y Análisis Matemático I, y en equipos en el grupo de Fundamentos de la Matemática. El objetivo del cuestionario era capturar sus reacciones al finalizar la clase en relación a la temática abordada en las respectivas secuencias de enseñanza y obtener evidencias de sus creencias sobre la matemática.

4.1. Cuestionario exploratorio de las creencias de los estudiantes

Se elaboró un cuestionario con tres preguntas que se respondieron en forma individual. Las preguntas apuntan a detectar las creencias de los estudiantes de profesorado hacia la matemática pero situándola en un ámbito escolar.

1. Si tuvieras que explicarle a un alumno qué es la matemática, ¿qué le dirías?

Formulamos la pregunta situando al alumno en su rol de profesor. Optamos por esta redacción para evitar un enunciado más directo del tipo ¿qué es la matemática?, con el fin de eludir definiciones formales que el estudiante conociera y pudiera expresar lo que realmente cree que es la matemática a través de los términos que optaría por utilizar si se estuviera dirigiendo a sus alumnos. Pensamos que esto otorga libertad al estudiante de profesorado para utilizar un lenguaje sencillo e ideas simples al nivel de los alumnos de enseñanza media.

2. Indica seis características del conocimiento matemático y explica qué significa cada una de ellas para ti.

A través de características, que a priori pensamos serán más que nada adjetivos sobre la matemática, esperamos captar creencias de la matemática que nos permitan ampliar lo detectado en la pregunta anterior. Al solicitar seis características, y no menos, apelamos a que afloren más que las de mayor frecuencia: “exacta”, “rigurosa”, “útil” (Abric, 2003 referenciado en Graça, Moreira y Caballero, 2004).

3. ¿Cómo se origina el conocimiento matemático?

A través de esta pregunta buscamos detectar si el origen del conocimiento matemático se encuentra vinculado al hombre, a contextos sociales y culturales o si más bien se cree en la matemática como cuerpo de conocimientos que nos es dado a partir de las obras matemáticas que pueden ser conocidas por los estudiantes. Esta pregunta permitirá triangular con la pregunta 1 y la 2 en tanto observar si lo que la matemática es se encuentra vinculado a sus orígenes y si las características mencionadas en 2 dan cuenta de un devenir histórico.

4.2. Secuencias de enseñanza

Uno de nuestros objetivos consiste en diseñar y poner en práctica secuencias de enseñanza que utilicen como recurso la historia de la matemática en las asignaturas Fundamentos de la Matemática y Geometría I de primer año y Análisis Matemático I de segundo año del profesorado de matemática (Plan 2008). Para cada una de las asignaturas se seleccionó una temática a trabajar, realizándose una revisión histórica de los temas considerados para elaborar las correspondientes secuencias didácticas. Una vez diseñadas las secuencias se analizaron junto a los profesores que las iban a poner en práctica. Este intercambio llevó al rediseño de las mismas cuyo formato final presentamos a continuación. Para cada secuencia se incluye la justificación de cada una de las actividades.

4.2.1. Secuencia para Fundamentos de la Matemática

Para la asignatura Fundamentos de la Matemática de primer año del profesorado de matemática se trabajó en torno a la resolución de la ecuación polinómica de segundo grado. La elección de esta temática se debe a que es un tópico que se trabaja en los cursos de secundaria desde tercer año del ciclo básico hasta tercer año de bachillerato. En esas instancias, en la mayoría de los casos, se presenta a los estudiantes la fórmula resolvente sin mediar una justificación de la misma y en los casos en que esta justificación se presenta, suele darse exclusivamente en el registro algebraico. Esto último hace difícil que los estudiantes asocien un significado a la misma.

El diseño de la secuencia pretende que los estudiantes tomen conciencia que la forma en que hasta el momento se ha trabajado con la fórmula resolvente no es mucho más que una “receta” carente de significado. Para ello se recurre al tratamiento que recibieron las ecuaciones de segundo grado por distintas culturas y en diferentes momentos de la historia. Es así que se rescata la interpretación geométrica de la resolución de la ecuación de segundo grado pues permite dar sentido y justificar las transformaciones algebraicas que dan lugar a la obtención de la fórmula resolvente.

Las actividades fueron trabajadas en equipos de tres o cuatro estudiantes. Las respuestas a cada actividad debían ser consensuadas entre los integrantes de cada equipo.

Actividad 1

a) Resuelve la ecuación $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

b) ¿Cómo resolviste la ecuación de la parte a)? ¿Por qué es correcto el procedimiento que elegiste para resolver la ecuación?

En las partes a) y b) se busca ver si surge el uso de la fórmula resolvente como estrategia o alguna otra, e indagar la confianza de los estudiantes en la herramienta utilizada.

En forma separada se entrega la siguiente pregunta:

c) Seguramente en el liceo habrás aprendido una fórmula para resolver una ecuación de segundo grado. ¿Por qué funciona dicha fórmula para resolver una ecuación de segundo grado?

De esta pregunta podemos obtener diferentes respuestas que nos permitirán, por un lado, obtener información acerca de las creencias de los estudiantes sobre la matemática y, por otro, saber cómo les fue enseñado este tema en la enseñanza media.

Las posibles respuestas que esperamos de los estudiantes son las que siguen: "apliqué una fórmula que ya conocía y sé que funciona", "siempre funcionó", "porque me la enseñaron así", "porque el profesor me lo enseñó", "sustituí la solución en la ecuación y verifiqué que estaba bien", entre otras.

En todas las situaciones detalladas anteriormente, el estudiante puede resolver el problema pero seguiría sin saber de dónde surgió eso y por qué funciona.

Se acordó con el docente que lleva adelante la clase que, ante estas respuestas preguntara en forma oral:

¿Pero cómo saben que lo que el profesor enseñó efectivamente funciona? ¿Por qué permite hallar las raíces de la ecuación y no otras?

En el caso que digan que lo saben porque verificaron las raíces, se sugiere preguntar:

¿Por qué? ¿Cómo saben que esa fórmula resuelve cualquier ecuación de segundo grado?

En forma oral el docente realizará la siguiente pregunta:

Recién resolviste una ecuación de segundo grado. ¿Desde cuándo consideras que el hombre se plantea este tipo de problemas?

Creemos que los estudiantes han adquirido un conocimiento de que lo matemático pertenece exclusivamente al ámbito escolar; en particular sobre este tópico que han manejado casi exclusivamente desde lo algebraico. El objetivo de esta pregunta es indagar acerca del imaginario de los estudiantes sobre el origen de estos conocimientos en la historia.

Con el objetivo de que los estudiantes tengan una primera aproximación a los orígenes de la ecuación de segundo grado y su contexto histórico, geográfico y social, se entregará la siguiente lectura luego de que contesten la pregunta anterior.

Se solicitará a un estudiante que realice la lectura del siguiente texto.

La cultura babilónica se desarrolló en unos claros de tierras fértiles entre los ríos Tigris y Éufrates. La región había sido el centro de la civilización sumeria que vivió antes de 3500 a. C. Se trataba de una civilización avanzada que construía ciudades y disponía de sistemas de irrigación, administración e incluso un servicio postal.

Desarrollaron una forma abstracta de escritura utilizando tablas de arcilla mojadas y cocidas al sol. El uso de una arcilla blanda condujo a la utilización de símbolos cuneiformes. Miles de estas tablillas han sobrevivido hasta nuestros días. Gracias a ello, se ha podido conocer, entre otras cosas, gran parte de la matemática babilónica.

Tablilla en la que se narran historias de seres venidos de las estrellas.

Algunas de esas tablillas contenían lo que podríamos llamar textos matemáticos babilonios que consistían en una lista de problemas.
Estos problemas están formulados y resueltos de forma puramente verbal, es decir, sin la utilización de símbolos especiales como usamos en la actualidad. La solución de estos problemas lleva muchas veces a la resolución de lo que hoy consideramos ecuaciones de primer grado, segundo grado, tercer grado, sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.

Tabla YBC 4652

En las tablillas babilónicas encontramos problemas que, si los tradujéramos al lenguaje del álgebra actual, harían referencia a ecuaciones del tipo:

$$x^2 + bx = c$$
$$x^2 = bx + c$$
$$x^2 + c = bx$$

con coeficiente principal 1 y b y c positivos, como por ejemplo: $x^2 + 7x = 5$, $x^2 = 12x + 23$, $x^2 + 8 = 3x$.

A esta altura te estarás preguntando a qué se deben tantas ecuaciones de segundo grado diferentes si cuando ibas al liceo había solo una que se resolvía con una fórmula y que era conocida por todos. Veamos entonces qué sucedía en la época de los babilonios.

Si ahondamos, desde el punto de vista histórico, en el desarrollo de la matemática podemos observar que, en gran medida, estuvo motivado por la búsqueda de respuestas a problemas prácticos, que tienen su origen fuera de la matemática y en ese ámbito no tienen sentido las cantidades negativas. Los babilonios no conocían los números negativos, por lo que no se planteaban ecuaciones con coeficientes negativos y no se tenían en cuenta las soluciones negativas de las ecuaciones.

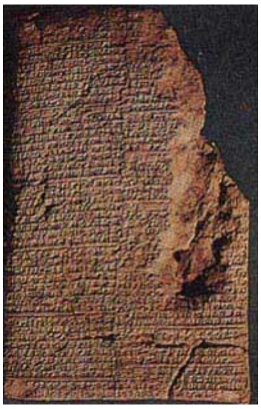


Tabla BM 13901

La tablilla de la imagen se halla en el Museo Británico. En ella se encuentran veintiún problemas. El enunciado del primer problema, en el lenguaje actual, es el siguiente:

He sumado el cuadrado y mi lado obteniendo ¾.

La solución que aparece en la tablilla es:

> *Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1 (1/2). Multiplicarás 1/2 por 1/2 (1/4). Agregarás 1/4 a 3/4: 1. 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el 1/2 que has multiplicado de 1 (1/2). 1/2 es el lado del cuadrado.*

En esta instancia es necesaria la intervención del docente para la interpretación del enunciado.

En el lenguaje algebraico actual el enunciado babilonio se traduce a través de la siguiente ecuación:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Esta ecuación la resolvimos en la actividad 1. Sus raíces están dadas por: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{2}$ de donde $x = \frac{1}{2}$ o $x = -\frac{3}{2}$.

Después se entrega la siguiente actividad:

Actividad 2

Si traducimos la resolución dada en la tabla obtenemos:

Pondrás 1, la unidad	1
Fraccionarás la mitad de 1 (:1/2)	$\frac{1}{2}$
Multiplicarás 1/2 por 1/2 (:1/4)	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
Agregarás 1/4 a 3/4 (: 1)	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
1 es (su) raíz cuadrada	$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$
Restarás el 1/2 que has multiplicado de 1 (:1/2). 1/2 es el lado del cuadrado	$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Una vez finalizada la interpretación y la traducción al lenguaje del álgebra actual la solución dada por los babilonios, el docente planteará en forma oral:

1. La forma recién vista de resolución de una ecuación de segundo grado dada por los babilonios, ¿es equivalente a la nuestra?

La intención es observar si los estudiantes advierten la no equivalencia de las mismas.

2. ¿Por qué consideran que los babilonios tenían en cuenta solo la solución positiva de la ecuación?

Se desea observar si los estudiantes reparan en la parte del enunciado que hace referencia al ámbito geométrico: “1/2 es el lado del cuadrado”.

Se entrega luego:

a) Como puedes ver, los babilonios consideraban exclusivamente la raíz positiva de la ecuación de segundo grado. Esto es coherente con el contexto geométrico en el que está planteado el problema. Más allá de eso, entre la expresión actual para hallar las raíces de una ecuación de segundo grado y las instrucciones dadas por los babilonios ¿tienes preferencia por alguna? Explicita tus razones.

Interesa poner en evidencia si los alumnos consideran "más científica" la actual porque es una fórmula o porque da las dos soluciones.

Se entrega luego la siguiente lectura que hace referencia a tres ámbitos culturales de la vida babilonia: la adivinación, la medicina y la matemática.

En la vida intelectual babilónica tres disciplinas parecen haber desempeñado un papel privilegiado: la adivinación, la medicina y la matemática. Para cualquiera de estas tres disciplinas figuraba, en diferentes tablillas, un largo listado de *ejemplos típicos* que permitía, frente a cualquier problema, obtener una respuesta directamente del listado o interpolar a partir de los ejemplos típicos que figuraban en la lista.

En la adivinación consideraban que los dioses escribían los designios del futuro en toda clase de materiales: marcas de nacimiento sobre la piel, formas del humo del incienso, formas del aceite mezclado con el agua, entre otras.

> *Si el aceite se divide en dos partes:*
> *Para la campaña militar: los dos campos marcharán uno contra el otro.*
> *Para el enfermo: este morirá.*
>
> *Si salieron dos gotas del medio del aceite y una era grande y la otra pequeña:*
> *Para la campaña militar: ….*
> *Para el enfermo: ….*

En la medicina:

> *Si un hombre, un escorpión lo ha picado: aplicarás los excrementos de un buey y él sanará.*
>
> *Si un hombre, sus ojos están enfermos: aplastarás anémona, aplicarás y él sanará.*

En la matemática:

> *He sumado el cuadrado y mi lado obteniendo ¾.*
> *Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1 (1/2). Multiplicarás 1/2 por 1/2 (1/4). Agregarás 1/4 a 3/4: 1. 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el 1/2 que has multiplicado de 1 (1/2). 1/2 es el lado del cuadrado.*

En un libro de texto de enseñanza media de nuestros días dice:

> *Las raíces de una ecuación de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$*, pueden obtenerse sustituyendo los coeficientes a, b y c en las siguientes expresiones:*

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad o \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para abreviar, las reunimos en una sola expresión que llamaremos fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) En cada uno de los ejemplos anteriores se plantea una situación y su correspondiente solución. ¿Consideras las respuestas en alguno(s) de estos ejemplos más fundamentada(s) que en otros?

El objetivo de la pregunta es poner en evidencia si los estudiantes se percatan que tanto la fórmula que usamos hoy en día como las instrucciones de los babilonios son dos instrucciones que nos llevan a la solución de la ecuación pero, por el momento, son tan sin sentido una cosa como la otra.

Actividad 3

Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (780 – 850 aprox.) fue un gran matemático árabe. Sobrevivieron cinco de sus obras y la más importante sobre el tema ecuaciones es "Precisiones sobre el cálculo del al-jabr y al-muqabala". En esta se describen seis tipos de ecuaciones de primer y segundo grado con coeficientes positivos. No conocía los números negativos.

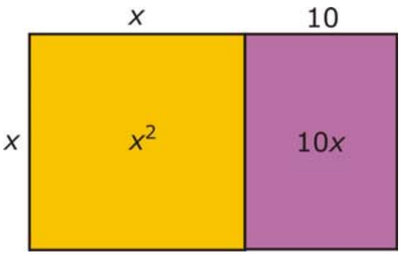
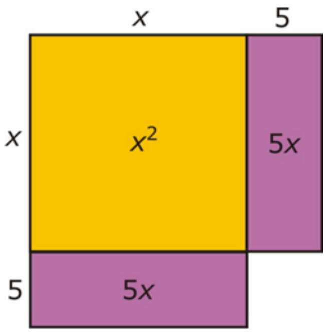
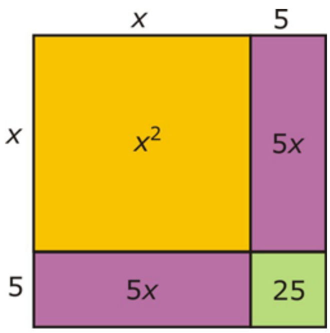
$$x^2 + bx = c$$
$$x^2 = bx + c$$
$$x^2 + c = bx$$
$$x^2 = bx$$
$$x^2 = c$$
$$bx = c$$

Al-Khwarizmi resolvía en forma geométrica cada uno de los tipos de ecuaciones anteriores y cada caso implicaba un argumento geométrico específico y distinto al de los restantes tipos de ecuaciones.

En el libro se plantean una serie de problemas y para resolverlos seguían los siguientes pasos: (i) construir una ecuación, (ii) reducirla a la forma canónica, (iii) aplicar la regla.

Al-Khwarizmi realizaba una interpretación geométrica de los pasos y la validación del procedimiento en base a las propiedades de las figuras. Explicaba sus métodos de resolución con ejemplos concretos.

Veamos como ejemplo la forma de resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$.

Resolución de Al-Khwarizmi	**Traducción al lenguaje del álgebra actual**
	$x^2 + 10x = 39$
	$x^2 + 5x + 5x = 39$
	$x^2 + 5x + 5x + 25 = 39 + 25$ $x^2 + 2(5x) + 25 = 39 + 25$
El área del cuadrado de lado x+5 es 64 por lo que el lado x+5 del cuadrado es 8, de donde x = 3.	$(x + 5)^2 = 64$ $x + 5 = 8$ $x = 3$

Se razona junto a los alumnos este procedimiento.

a) Resuelve la ecuación $x^2 + 3x = 40$ aplicando el método de Al-Khwarizmi y realiza la traducción al lenguaje del álgebra actual de cada uno de los pasos.

Resolución al estilo de Al-Khwarizmi	Traducción al lenguaje del álgebra actual
	$x^2 + 3x = 40$

Intervención docente sugerida:
Si bien es un caso particular mostrar que si se cambian coeficientes el "algoritmo geométrico" es el mismo. Comentar que Al-Khwarizmi explicaba sus métodos de resolución con ejemplos concretos lo hacía sabiendo que tenían validez general. A partir de esto se generará la necesidad de realizar una justificación genérica.

b) Teniendo en cuenta el método de resolución de Al-Khwarizmi recién analizado, ¿cómo completarías las dos columnas de la tabla para resolver la ecuación: $x^2 + bx = c$?

Resolución al estilo de Al-Khwarizmi	Traducción al lenguaje del álgebra actual
	$x^2 + bx = c$

Durante el trabajo de los equipos con las partes a) y b), el docente pasará por los grupos observando y haciendo acotaciones en caso de ser necesario.

c) Esta generalización que acabas de realizar, ¿es válida para cualquier valor de *b* y *c*? Explica.

Esto último permite analizar que la expresión general para algunos casos de *b* y *c* puede interpretarse geométricamente y que en otros no.

Hasta el momento hemos visto la forma en que los babilonios y Al-Khwarizmi resolvían ecuaciones de segundo grado. Ambos consideraban varios casos de ecuaciones, cada uno de los cuales tenía una forma diferente de resolución. Es recién con la aparición de la notación simbólica que se puede unificar la diversidad de casos.

Actividad 4

Ahora queremos resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$. Para ello nos apoyaremos en el razonamiento de Al-Khwarizmi.

Intervención docente sugerida:
Debe observar que las ecuaciones que plantea Al-Khwarizmi son mónicas. Para ello preguntará:

¿Cómo podrían obtener una ecuación, equivalente a la dada, con coeficiente principal 1?

Dividimos ambos miembros de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ entre *a* y obtenemos $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

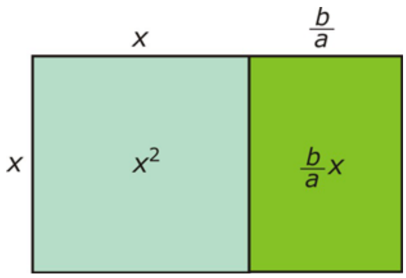
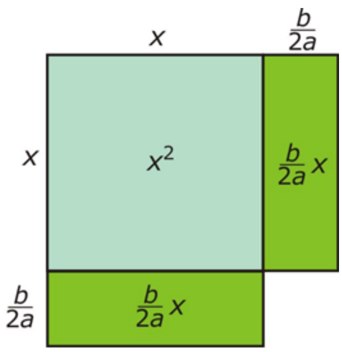
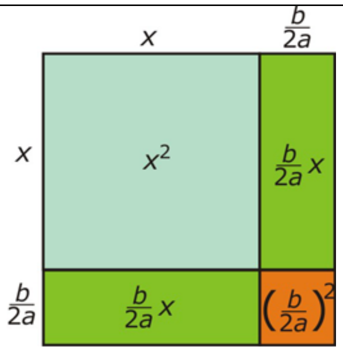
¿Siempre podemos dividir entre *a*?

¿Pueden seguir ahora el razonamiento de Al-Khwarizmi?

Apoyo gráfico	**Interpretación algebraica**
	$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$

Intervención docente sugerida:
Puesta a punto luego de que los equipos completen la tabla.

Se espera que el cuadro quede de la siguiente manera:

Resolución de Al-Khwarizmi	**Traducción al lenguaje del álgebra actual**
 	$ax^2 + bx + c = 0\ (:a)$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
 	$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$
 	$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
El área del cuadrado de lado $x + \frac{b}{2a}$ es $\frac{-4ac + b^2}{4a^2}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$

Prescindiendo ahora del soporte gráfico se analiza el procedimiento algebraico obtenido y se discute la validez del mismo para cualquier valor de a, b y c ($a \neq 0$), la condición de existencia de raíces en los reales. Se finaliza con la conclusión de que ahora sí tenemos argumentos para explicar por qué funciona.

Actualmente, en el tratamiento de la resolución de la ecuación de segundo grado en las aulas de enseñanza media, se trabaja en forma algebraica para llegar a la fórmula resolvente. Este tratamiento no es apoyado por visualizaciones que, como vimos, confieren poder explicativo al razonamiento que se realiza en procura de despejar la incógnita.

Actividad final

La siguiente es la actividad final que se presentó a estos estudiantes:

> a) ¿Para qué utilizamos la interpretación geométrica?
> b) ¿Conocían esta interpretación en relación a la resolución de las ecuaciones de segundo grado?
> c) Si tuvieran que trabajar con alumnos de enseñanza media, ¿trabajarían con la interpretación geométrica? ¿Por qué?

Con la pregunta a) pretendemos observar si los estudiantes pueden percibir la importancia de trabajar en diferentes registros para poder dar significado a la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado.

En la medida que conocemos el tratamiento que se da a este tema en los diferentes niveles de la enseñanza media, creemos que los estudiantes desconocen otras formas de tratar el tema que no sea el enfoque algebraico. Por esto planteamos la pregunta b) ya que esto nos indicaría el impacto de esta secuencia de enseñanza. En la pregunta c) proponemos al estudiante que se posicione en el rol de profesor de matemática, y de acuerdo a las argumentaciones que dé a la respuesta a esta pregunta, creemos que podremos observar si valoran o no el registro geométrico para dar explicaciones a una temática que generalmente se trabaja desde el álgebra. Esto también puede revelar la valorización de dar significado a los objetos de enseñanza más allá de los significados puramente intramatemáticos.

4.2.2. Secuencia para Análisis Matemático I

Para la asignatura Análisis Matemático I de segundo año del profesorado de matemática se trabajó en torno a la definición, en este caso, del concepto de máximo relativo estricto. En general, los estudiantes consideran que una definición es única e inamovible. Con la secuencia elaborada se pretende contribuir a un cambio de visión en el estudiante y que comience a concebir a las definiciones matemáticas actuales como resultante de una evolución influida por distintos contextos históricos e intramatemáticos. Se pretende mostrar que las definiciones dependen del momento histórico, de los conocimientos de la época y del contexto de los problemas a resolver. También tiene por objetivo que el estudiante tome conocimiento que los problemas de máximos y mínimos fueron una preocupación del hombre en todas las épocas y que estos problemas tuvieron un origen en un ámbito no matemático.

Las actividades fueron trabajadas en equipos de tres o cuatro estudiantes. Las respuestas a cada actividad debían ser consensuadas entre los integrantes de cada equipo.

Las tres lecturas siguientes fueron seleccionadas por estar referidas a problemas que involucran situaciones en las que hay que determinar un máximo o un mínimo y por corresponder a tres momentos históricos diferentes. El objetivo es que los estudiantes vean que existía una preocupación por este tipo de problemas en distintos momentos históricos y cuya solución fue dada originalmente en el ámbito de la geometría y no en el del análisis matemático. Buscamos con esto cambiar la visión, que generalmente impera entre los estudiantes, de que la solución de estos problemas solo hay que buscarlas en el análisis matemático.

Lectura 1

Dido era una princesa fenicia de la ciudad de Tiro (hoy parte del Líbano). El rey Pigmalión, implacable hermano suyo, asesinó al marido de Dido para despojarla de sus posesiones y esta huyó por mar. Cuando Dido arribó a las costas de África, hacia 900 a. C., en el lugar que más tarde sería Cartago, quiso comprar al cacique local, el rey Jarbas de Numidia, tierra donde asentarse ella y su gente y donde establecer su nueva patria. Es posible que Dido fuera cicatera, o que el rey Jarbas no quisiera colonias en su país: cerraron el trato con la condición de que la reina no tendría más tierra que la que pudiera encerrar una piel de buey. Dido sacó el máximo partido de la situación. En primer lugar, interpretó la palabra "encerrar" en el sentido más amplio posible. Se dice que hizo cortarle a su gente la piel en finas tirillas, las cuales, empalmadas, formaron una cuerda cerrada de gran longitud. Suponiendo que las tirillas tuvieran tan solo un par de milímetros de ancho, tal longitud debió estar entre los 1000 y 2000 metros.

Luego, Dido extendió el cordel sobre el terreno de modo que encerrase la máxima área posible. Suponiendo que el suelo fuese completamente llano, podemos imaginar que Dido tuvo que resolver el siguiente problema matemático:

Hallar, entre todas las curvas posibles de longitud dada, aquellas que encierran una región interior de área máxima.

(Hildebrandt y Tromba, 1990, p. 46)

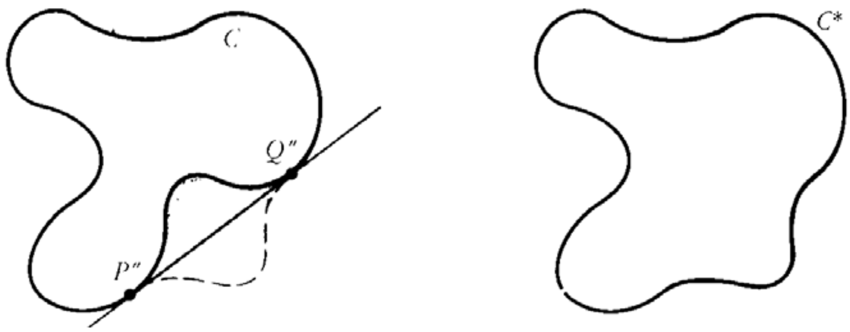
Muerte de Dido

a) ¿Conoces una respuesta a este problema? En caso de que conozcas una, explica brevemente en qué consiste.

La respuesta al problema de Dido es una región circular cuya circunferencia tenga la longitud dada. De esta manera, Dido hubiera adquirido un área que podemos estimar entre 10 y 25 hectáreas. Si los dos extremos de su cuerda se hubieran fijado a dos puntos de una porción de recta de playa mediterránea, Dido hubiera conseguido más tierra todavía extendiendo su cordel en semicírculo; esto es precisamente lo que la historia dice que hizo. Al observar los mapas de las ciudades amuralladas medievales se descubre que sus habitantes llegaban por lo común a las mismas conclusiones que Dido.

Mapa medieval de la ciudad alemana de Colonia a orillas del río Rhin

Los griegos conocían perfectamente este problema matemático, referido como problema isoperimétrico (*isos* = igual; *perímetro* = medida del contorno), y tenían evidentes razones prácticas para analizar el mismo. Por ejemplo, ¿se puede estimar la superficie de una isla por el tiempo que se tarda en circunnavegarla? Como se muestra en la figura es obvio que se pueden cometer terribles errores.



Los avispados sabían que un terreno de pequeño contorno podía tener área mayor que otro de perímetro más largo. Podían así embaucar a otros propietarios más lerdos en los intercambios de terrenos, siempre que el tamaño del campo se midiera por el tiempo necesario para circunvalarlo andando. Proclo (hacia el 450 d. C.) describe situaciones de este tipo en su comentario al primer libro de Euclides. (Hildebrandt y Tromba, 1990, p. 46)

Lectura 2

Los griegos habían estudiado los rayos luminosos desde los tiempos de Pitágoras. Casi todos los conocimientos que sobre la luz se tenían en tiempo de los griegos aparecen en una obra atribuida a Euclides (aprox. 330 – 270 a. C.). Entre los escritos de Euclides que han llegado hasta nosotros se cuentan, además de los *Elementos*, la *Óptica* y *Catóptrica* (teoría de los espejos). En su *Óptica* enunció que la luz atraviesa el espacio en línea recta. Seguidamente se valió de este y otros resultados para exponen la teoría de la visión. Dio en la *Catóptrica* la ley de la reflexión, que establece para los rayos incidentes y reflejados de un espejo que *el ángulo de incidencia del rayo es igual a su ángulo de reflexión*.

Unos 400 años después de Euclides, un sabio alejandrino, Herón (hacia 100 d. C.), vio que a la ley de reflexión subyacía una ley más fundamental todavía. Herón afirmó que la ley de reflexión se sigue del principio de que *la luz ha de tomar siempre el camino más corto*.

Como ilustración de tal hecho, fijémonos en la reflexión en un espejo plano. Se ha visto que este problema es equivalente al de la reflexión de un rayo en una línea recta. Supongamos, pues, dados dos puntos *P* y *Q* situados a un mismo lado de una recta, que deseamos, a partir de *P*, tocar la recta e ir hasta *Q*. La cuestión consiste entonces en determinar el camino más corto que nos permita lograr nuestro propósito.

a) ¿Conoces una respuesta a este problema? En caso de que conozcas una, explica brevemente en qué consiste.

Lectura 3

Niccolo Fontana (1500-1557), matemático italiano apodado Tartaglia (tartamudo) desde que de niño recibió una herida en la toma de su ciudad natal, Brescia, por Gastón de Foix. Huérfano y sin medios materiales para proveerse una instrucción, llegó a ser uno de los principales matemáticos del siglo XVI. Enseñó y explicó esta ciencia sucesivamente en Verona, Vicenza, Brescia y finalmente Venecia, ciudad en la que falleció en 1557 en la misma pobreza que le acompañó toda su vida. Se cuenta que Tartaglia solo aprendió la mitad del alfabeto de un tutor privado antes de que el dinero se agotara, y posteriormente tuvo que aprender el resto por su cuenta. Sea como sea, su aprendizaje fue esencialmente autodidacta.

Niccolo Fontana (1500-1557)

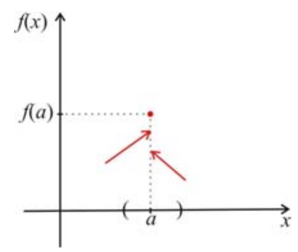
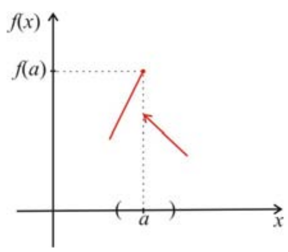
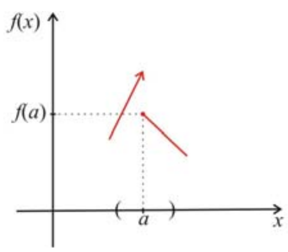
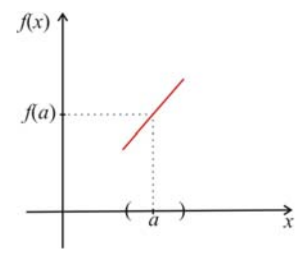
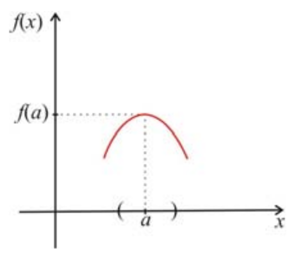
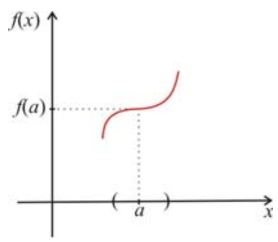
Descubridor de un método para resolver ecuaciones de tercer grado, estando ya en Venecia, en 1535 su colega del Fiore discípulo de Scipione del Ferro de quien había recibido la fórmula para resolver las ecuaciones cúbicas, le propone un duelo matemático que Tartaglia acepta. A partir de este duelo y en su afán de ganarlo Tartaglia desarrolla la fórmula general para resolver las ecuaciones de tercer grado. Por lo que, consigue resolver todas las cuestiones que le plantea su contrincante, sin que este logre resolver ninguna de las propuestas por Tartaglia. Además de sus trabajos matemáticos, Tartaglia publicó las primeras traducciones al italiano de las obras de Arquímedes y Euclides.

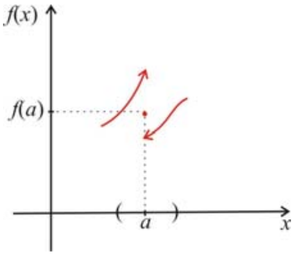
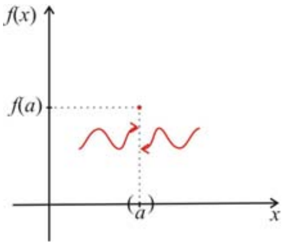
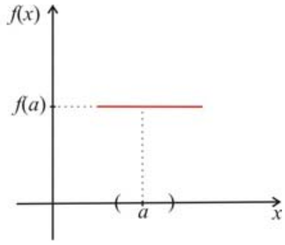
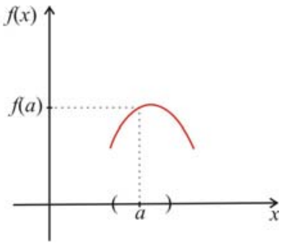
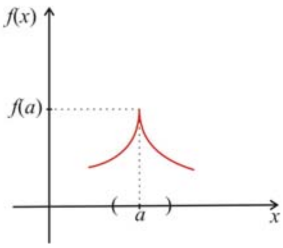
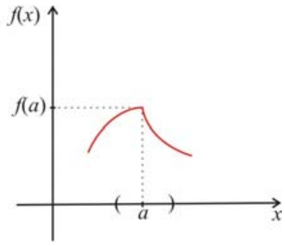
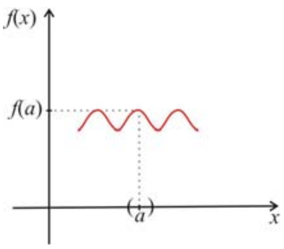
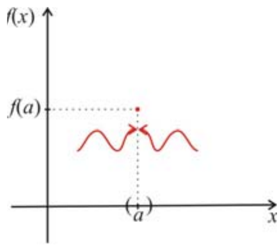
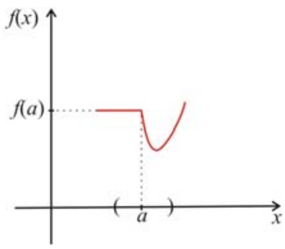
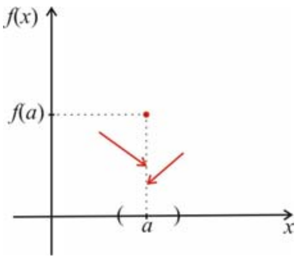
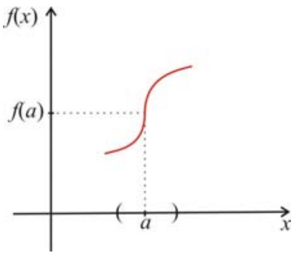
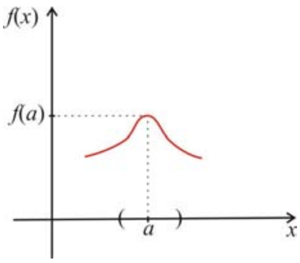
Otras aportaciones destacables de Tartaglia fueron los primeros estudios de aplicación de las matemáticas a la artillería en el cálculo de las trayectorias de los proyectiles en su obra *La Nueva Ciencia*. Un aspecto importante era el de determinar la inclinación del cañón para que el proyectil tuviera un alcance máximo.

Niccoló Fontana Tartaglia (s. f.)

Actividad 1

A continuación te presentamos 15 gráficas de funciones definidas en un entorno de *a*. En cada caso se indica si las mismas presentan o no un máximo relativo estricto $f(a)$ en $x = a$. (Para simplificar la notación nos referiremos al máximo relativo estricto con la sigla MRE)

 f presenta un MRE en $x = a$	 f presenta un MRE en $x = a$	 f no presenta un MRE en $x = a$
 f no presenta un MRE en $x = a$	 f presenta un MRE en $x = a$	 f no presenta un MRE en $x = a$

 *f* no presenta un MRE en $x = a$	 *f* presenta un MRE en $x = a$	 *f* no presenta un MRE en $x = a$
 *f* no presenta un MRE en $x = a$	 *f* presenta un MRE en $x = a$	 *f* presenta un MRE en $x = a$
 *f* presenta un MRE en $x = a$	 *f* presenta un MRE en $x = a$	 *f* no presenta un MRE en $x = a$
 *f* presenta un MRE en $x = a$	 *f* no presenta un MRE en $x = a$	 *f* presenta un MRE en $x = a$

a) Completa la oración:

Una función *f* presenta un máximo relativo estricto en $x = a$ si ...

El objetivo de la actividad es que los estudiantes, en base a ejemplos y no ejemplos, puedan discutir y acordar una definición de máximo relativo estricto en un punto. Para los ejemplos propuestos se tuvieron en cuenta distintos casos posibles y en el caso de los no ejemplos se consideraron en particular aquellos casos que generalmente el estudiante considera, intuitivamente, como casos de máximo.

Una vez que los grupos hayan terminado la actividad se realizará una puesta en común sobre el alcance y las limitaciones de las definiciones dadas por cada grupo, sin la intención de llegar a la definición formal.

En caso de que haya incongruencias entre la definición y el objeto que definen, el o los grupos involucrados deberán reelaborar la definición u optar por alguna de las dadas por los demás equipos.

En forma previa a la entrega de la Actividad 2, el docente hará una breve reseña histórica acerca de la vida y aportes de los matemáticos Johannes Kepler, Pierre de Fermat y Guillaume De L'Hospital en base a material seleccionado, para esta ocasión, por los investigadores.

Actividad 2

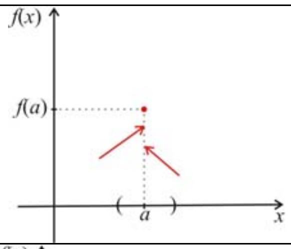
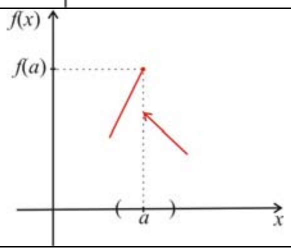
Definiciones de máximo dadas por estos tres matemáticos

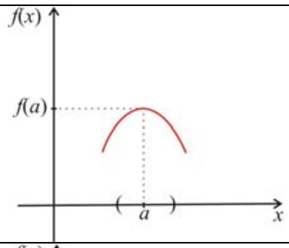
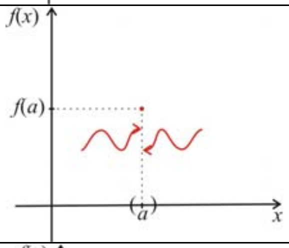
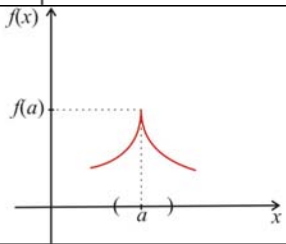
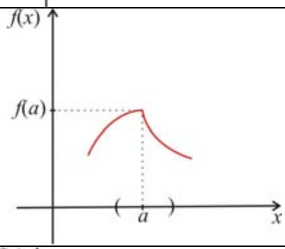
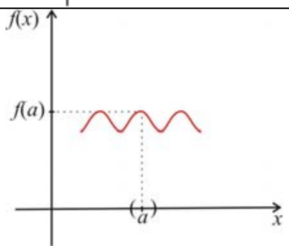
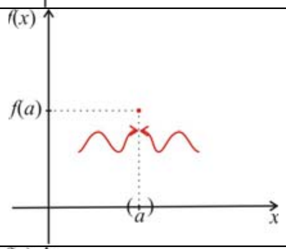
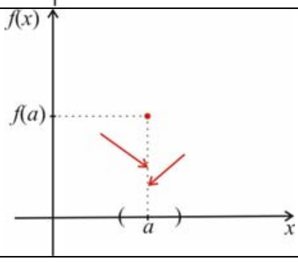
Definición de Kepler (1571 – 1630)
Cerca de un máximo las diferencias de ordenadas en ambos lados son al principio solo imperceptibles.

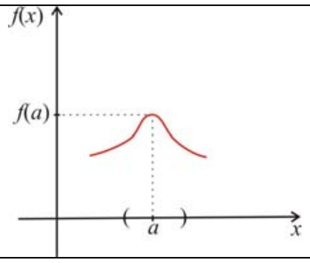
Definición de Fermat (1601 – 1665)
La tangente a una curva en un máximo es paralela al eje de las abscisas.

Definición de L'Hospital (1661 – 1704)
Si una curva al incrementarse continuamente la abscisa x, la ordenada $f(x)$ también crece hasta cierto punto a después del cual disminuye, entonces la ordenada $f(a)$ es máxima.

a) Decide y justifica si las funciones de la primera columna tienen un máximo relativo estricto en $x = a$ según las diferentes definiciones que vimos y la que tú elaboraste.

	Definición de Kepler (1600 aprox.)	**Definición de Fermat (1630 aprox.)**	**Definición de L'Hospital (1696)**	**Definición elaborada por ti (2012)**
				
				

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

La finalidad de esta parte a) de la actividad es, por un lado, dar a conocer diferentes definiciones de máximo de grandes matemáticos y el alcance de las mismas. Para ello se solicita que confronten estas definiciones con las gráficas asociadas a máximos propuestas en la actividad 1. Se busca también que, además de reconocer que esas definiciones están dadas en lenguaje coloquial, las mismas no abarcan todos los casos de máximo considerados. De esta manera el estudiante podrá reconocer que ha existido una evolución en el concepto de máximo a lo largo de la historia.

Intervención docente sugerida:
Mientras los equipos trabajan en la parte a) de la actividad, el docente recorre el salón atendiendo a los requerimientos de los estudiantes. Una vez que los equipos culminan su tarea se realiza una puesta en común hasta llegar a una tabla única consensuada entre los estudiantes y el docente.

b) ¿Para qué tipo de funciones, de las que conoces de este curso y cursos anteriores, se obtiene un máximo relativo estricto con cualquiera de las cuatro definiciones? Ejemplifica (puedes hacer uso de representaciones gráficas).

Esta parte pretende que los estudiantes adviertan que las definiciones de estos grandes matemáticos estaban basadas en cierto tipo de funciones que eran las conocidas en ese momento.

c) Para ese tipo de funciones que enumeraste en la parte b), ¿qué puedes decir de las cuatro definiciones?

Con esta pregunta se busca que los estudiantes comprueben que para las funciones consideradas en b), las cuatro definiciones son correctas.

Los matemáticos con los que estamos trabajando desarrollaron sus teorías en el siglo XVII. En esa época no existía el concepto de función tal como lo conocemos hoy, que recién fue dado por Dirichlet a mediados del siglo XIX. En la época de Kepler, Fermat y L'Hospital se hablaba de la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables, aspecto que involucraba a algunas curvas que, con la definición actual, no serían hoy consideradas funciones. Entre las que hoy serían consideradas funciones encontramos las polinómicas, racionales, irracionales y las de tipo logarítmico y exponencial.

Intervención docente sugerida:
Observar que las definiciones están ligadas a un momento histórico, al tipo de problemas a resolver y a los modelos matemáticos elaborados para resolverlos (intramatemáticos o interdisciplinarios).

¿Qué tipos de funciones conocen que no sean polinómicas ni del tipo exponencial? Los estudiantes pueden presentar nuevos ejemplos o hacer uso de los ejemplos proporcionados.

Es posible que quieran dar fórmulas pero no es el objetivo. Se sugiere presentar gráficos y observar que la definición de ellos abarca otras funciones.

Luego sugerimos institucionalizar el concepto, redacción y su correspondiente expresión simbólica (papel del docente de enseñar a escribir matemática).

Actividad final

a) Si fueras profesor de enseñanza media y tuvieras que definir máximo relativo estricto, ¿trabajarías con alguna(s) de las definiciones vistas en la clase de hoy?
En caso afirmativo indica con cuál o cuáles trabajarías y por qué.
En caso negativo explica por qué no optarías por ninguna de ellas.

b) La siguiente definición de máximo relativo estricto fue extraída de *Funciones reales. Matemática A* para 6º año de Eduardo Giovannini:

> Una función **f** tiene un máximo relativo o local en sentido **estricto** en **a**, cuyo valor es f(a), **si existe un entorno reducido de centro a** tal que f(a) es mayor que los valores funcionales obtenidos para todos los puntos **x** de dicho entorno reducido.
> Es decir: si existe $\delta > 0$ tal que: $f(x) < f(a)$ si $x \in E^{*}(a, \delta)$

i) Esta definición, ¿es similar a alguna de las que trabajaste en la clase de hoy? En caso afirmativo indica a cuál de ellas.
ii) ¿Por qué crees que el autor del texto eligió esta definición y no otras elaboradas por grandes matemáticos como por ejemplo las que viste en la clase de hoy?

c) ¿Son correctas las definiciones elaboradas por Kepler, Fermat y L´Hospital? ¿Por qué?

En la pregunta a) se posiciona al estudiante en el rol de profesor de enseñanza media con el objetivo de que, a través de su respuesta, deje entrever sus creencias acerca de la matemática en el ámbito escolar. Esto permitirá observar si considera otras formas de presentar las definiciones en el aula diferentes a las validadas por la comunidad matemática.

La pregunta b) enfrenta al estudiante a una definición formal validada por un texto usado en la enseñanza secundaria. Dicha definición es similar a la que se trabaja en el curso de Análisis Matemático I, con las restricciones necesarias para ser presentadas a estudiantes de enseñanza media. Frente a esta diferencia pueden pensar que hay algún error en la definición ya que no es exactamente igual a la que ellos manejan o presumir que los cambios se deben a que está destinada a estudiantes de enseñanza media. Por otro lado pueden argumentar que, aunque no es correcta –para ellos- es más certera que las dadas por los grandes matemáticos de otras épocas. Cualquiera de estas reacciones nos brinda información acerca de las creencias de los estudiantes sobre las definiciones en el ámbito escolar.

Con la pregunta c) se pretende cerrar el círculo sobre las creencias de los estudiantes acerca de las definiciones en el ámbito de la matemática, en el contexto de la matemática escolar y del devenir de las definiciones a lo largo de la historia.

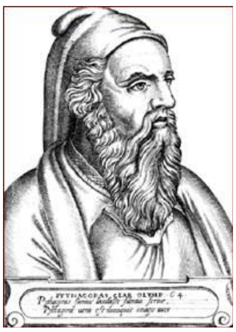
4.2.3. Secuencia para Geometría I

Para la asignatura Geometría I de primer año del profesorado de matemática se trabajó en torno al recubrimiento del plano con polígonos iguales. Con la secuencia elaborada se pretende enfrentar al estudiante a un problema abierto hoy en día en la matemática. A lo largo de la actividad se van mostrando distintos momentos en el abordaje del problema que fue considerado resuelto en varias oportunidades y que permanece aún abierto. De esta manera se pretende que el estudiante cambie su visión de la matemática como algo acabado, esto es, que pueda ver que un resultado que en determinada oportunidad fue avalado por la academia puede ser revisado y reformulado.

Las actividades fueron trabajadas en equipos de tres o cuatro estudiantes. Las respuestas a cada actividad debían ser consensuadas entre los integrantes de cada equipo.

La lectura que se les propone al inicio de la clase tiene por objetivo presentar el problema y revelar su origen histórico.

Pitágoras de Samos (570 – 497 a. C.), si bien nació en Jonia, a los 40 años se traslada hacia la Italia Meridional, concretamente Crotona, donde establece su escuela. La escuela pitagórica, establecida al 530 a. C., además de ser una asociación religiosa, artística, filosófica y científica, también era política. Los pitagóricos fueron perseguidos y sus escuelas incendiadas, por lo que fueron cerradas en esta zona. Pero su difusión se extiende a toda Grecia por la emigración de sus seguidores.



Pitágoras de Samos (570 – 497 a. C.)

Es muy probable que Pitágoras no haya escrito nada, Aristóteles se refiere a los pitagóricos, sin nombrarlo directamente y no se conocen escritos de pitagóricos hasta Filolao (470 a. C.).

Nicómaco de Gerasa (alrededor del 100 d. C.) refiere que un día mientras Pitágoras paseaba escuchó unos golpes de martillos. Cuatro herreros trabajaban el metal hirviente y cada golpe emitía una nota afinada en consonancia de 4^{a} y 5^{a}. Pitágoras examinó los martillos y descubrió que tenían un peso en proporción al sonido que emitían. Se marchó a su casa y realizó un nuevo experimento; hizo colgar 4 hilos de longitudes idénticas a los que ató cuatro pesos diferentes y obtuvo otra vez una relación matemática entre dichos pesos y los sonidos emitidos. Así se establecieron las relaciones entre la longitud y tensión de una cuerda y las notas de la escala musical. Se trataba de un hallazgo que tuvo enormes consecuencias y que alimentó la creencia en que los fenómenos del mundo podrían ser explicados mediante los números.

(Molina y Ranz, 2000, pp. 32-33)

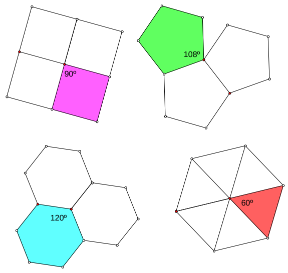
El descubrimiento pitagórico de que el tono de una nota depende de la longitud de la cuerda que la produce y de que los intervalos concordantes de la escala se deben a simples proporciones numéricas (2:1 octava, 3:2 quinta, 4:3 cuarta, etc.) constituyó la primera reducción de la calidad a la cantidad, el primer paso que se dio hacia la matematización de la experiencia humana y, por lo tanto, el comienzo de la ciencia.

(Koestler, 1981, p. 28)

En geometría los pitagóricos prestaron especial atención a los polígonos regulares, y se preguntaron sobre la posibilidad de recubrir (embaldosar) el plano con un solo tipo de polígonos regulares iguales.

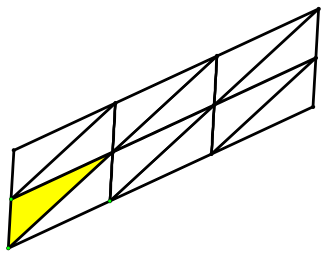
Luego de presentada la problemática planteada por los pitagóricos, el docente aclarará qué se entiende por embaldosar: cuando hablamos de que un tipo de polígono recubre el plano estamos diciendo que es posible acoplarlos entre sí, sin dejar huecos ni superposiciones. En este contexto consideraremos embaldosados con un solo tipo de polígonos por vez.

Como el problema original de recubrir el plano con polígonos regulares iguales ya fue trabajado previamente en el curso, el docente, utilizando una imagen previamente elaborada, anima a sus estudiantes a que justifiquen por qué existen solo tres polígonos regulares que recubren el plano.

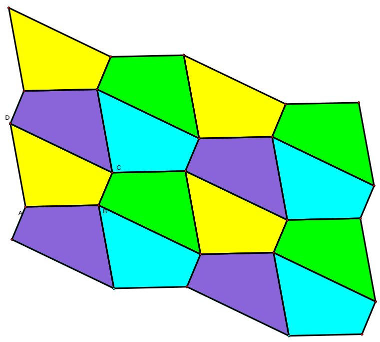


Polígonos regulares que recubren el plano

Luego el docente pregunta a sus estudiantes si es posible embaldosar una superficie plana ilimitada usando un triángulo cualquiera y por qué. Para que puedan arribar a una respuesta el docente les presenta una imagen dinámica de la situación como la que sigue:



Entre todos se explicitan los distintos argumentos que justifican la situación. Siguiendo esta misma dinámica se plantea a la clase si es posible embaldosar una superficie plana ilimitada usando un cuadrilátero cualquiera y por qué. La figura dinámica que se presenta en este caso es la siguiente:

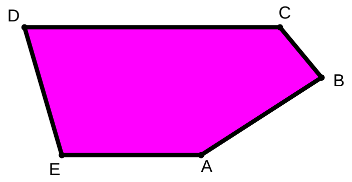


Nuevamente, entre todos, se explicitan los distintos argumentos que justifican la situación. El docente explícitamente acotará el problema a los cuadriláteros convexos, dado que la actividad siguiente se restringirá a pentágonos convexos. El docente hará una recapitulación de lo trabajado hasta el momento: todos los triángulos y todos los cuadriláteros convexos embaldosan el plano.

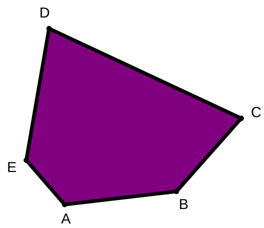
Actividad 1

¿Es posible embaldosar una superficie plana ilimitada usando un pentágono convexo no regular? ¿Por qué?

Se repartirán "pentágonos" de cartulina a los distintos equipos de estudiantes, uno con el que sea posible realizar un recubrimiento y otro con el que no sea posible. Para el caso en que sí recubre el plano se repartirá un pentágono considerado por Reinhardt en 1918.



Pentágono de Reinhardt



Pentágono que no es de Reinhardt

Podría pasar que:

- No pudieran embaldosar con ninguno.
- No pudieran embaldosar con el que sí se puede.

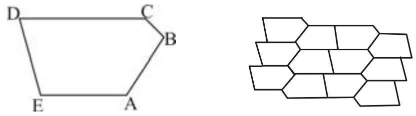
La conclusión buscada es que no es posible recubrir con cualquier pentágono aunque podría surgir que con ninguno.

No se espera ninguna prueba matemática, solo que los estudiantes expongan sus hallazgos. Se hace una puesta en común con lo realizado por los estudiantes y se pasa a la actividad 2.

Actividad 2

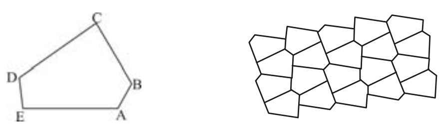
En 1918, Reinhardt, en su tesis doctoral identificó cinco tipos de pentágonos convexos que recubren el plano. Son los que aparecen a continuación.

Tipo 1



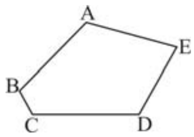
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360º$

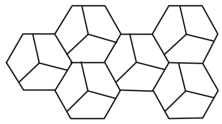
Tipo 2



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 360º$ y $\overline{EA} = \overline{CD}$

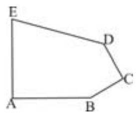
Tipo 3

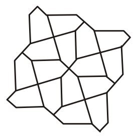




$\hat{A} = \hat{C} = \hat{D} = 120^o$, $\overline{EA} = \overline{AB}$ y $\overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DE}$

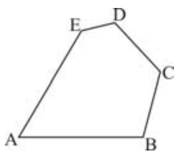
Tipo 4

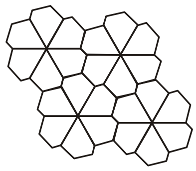




$\hat{A} = \hat{C} = 90^o$, $\overline{EA} = \overline{AB}$ y $\overline{BC} = \overline{CD}$

Tipo 5





$\hat{A} = 60^o$, $\hat{C} = 120^o$, $\overline{EA} = \overline{AB}$ y $\overline{BC} = \overline{CD}$

Verifica si los pentágonos con los que trabajaste pertenecen a alguna de las clases consideradas por Reinhardt.

Con cañón se proyectarán los pentágonos repartidos con las medidas de lados y ángulos y con el mismo color que los entregados a los equipos.

A los que les embaldosó con esta verificación se termina la tarea.
A los que no les embaldosó y sí era un pentágono de Reinhardt ahora se les mostrará el embaldosado dinámico.
A los que no les embaldosó y no era un pentágono de Reinhardt se verá que no cumplen ninguna de las cinco condiciones.

Conclusión: de los pentágonos trabajados, embaldosan los que cumplen alguna de las cinco condiciones, los que no cumplen ninguna de las cinco condiciones no embaldosan.

Se mostrarán las cinco familias dinámicas de los pentágonos de Reinhardt.

Intervención docente sugerida:
Mostrar que son tipos o familias de pentágonos con embaldosados dinámicos.

Síntesis a cargo del docente:

Reinhardt se propuso como problema, en su tesis doctoral, identificar los diferentes tipos de pentágonos convexos que recubren el plano. Como resultado de su trabajo encontró cinco tipos de pentágonos con la propiedad deseada. Es importante tener en cuenta que cada tipo de pentágono puede incluir distintos pentágonos, todos ellos con las mismas condiciones.

Actividad 3

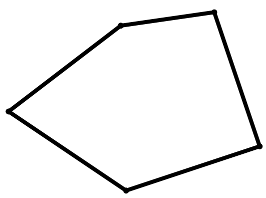
Pablo, un estudiante de primer año del IPA de Comunicación Visual, estaba trabajando en una tarea de expresión plástica cuyo objetivo era realizar un diseño original de baldosas. Con gran sorpresa, afirmó que pudo encontrar una baldosa con forma de pentágono convexo que recubre el piso sin problemas y no pertenece a ninguno de los tipos identificados por Reinhardt.

¿Puede ser? ¿Por qué?

Esta actividad se realiza en papel y se entrega al profesor.
El objetivo de esta actividad indagar acerca de las creencias de las creencias de los estudiantes acerca de la matemática y la “verdad” matemática.

Actividad 4

a) El pentágono siguiente, ¿sirve para embaldosar el plano?



Se entregan pentágonos de una de las familias de Kershner sin datos. Podría pasar que sí encontraran la forma de embaldosar o que no la hallaran. Cada equipo dirá si pudo embaldosar o no, y el profesor mostrará la forma de conseguirlo con un Power Point dinámico.

b) El pentágono anterior, ¿forma parte de alguna de las familias de Reinhardt?

Para esta parte de la actividad se proyectará el pentágono anterior con todos los datos de ángulos y lados para que puedan descartar la pertenencia a las familias de Reinhardt.

c) Con los datos que dispones, ¿puedes demostrar que este pentágono sirve para embaldosar el plano?

Se busca que los estudiantes elaboren una prueba que tenga en cuenta la información de las medidas de lados y ángulos, que vaya más allá de la comprobación empírica.

d) ¿Qué pasó? ¿A qué llegamos?

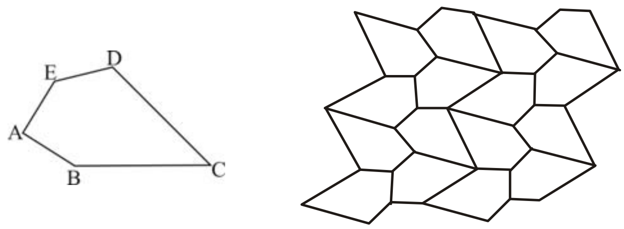
Se deja que los estudiantes contesten en equipo y se hace puesta en común recuperando lo que piensa cada equipo. Se retira la hoja.

Luego el docente hace una síntesis cronológica de los hechos hasta el momento.

Actividad 5

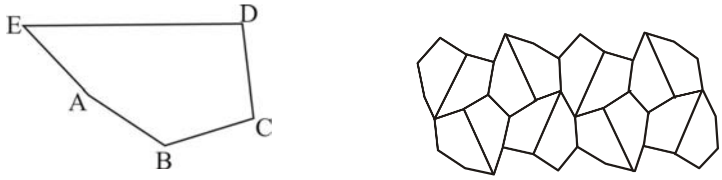
En un artículo de 1969, Kershner escribe sobre las fallas técnicas utilizadas por Reinhardt y exhibe tres tipos más de pentágonos teselantes. En sus palabras:
“Por razones que no me sería fácil explicar, este problema me ha tenido intrigado durante 35 años. Cada cinco o diez años he hecho alguna clase de tentativa para resolverlo. Hace cosa de un par de años descubrí finalmente un método más conveniente que el de Reinhardt para la clasificación de las posibilidades de los pentágonos, el cual proporcionaba una técnica que hacía humanamente posible (aunque a duras penas) llevar la tarea a conclusión. El resultado de esta investigación fue el descubrimiento de que existen exactamente otros tres tipos de pentágonos...capaces de pavimentar el plano. Las pavimentaciones que producen son totalmente sorprendentes. El descubrimiento de su existencia es fuente de considerable gratificación.” (Gardner, 1988, p. 169)

Tipo 6



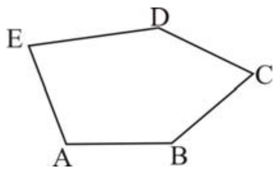
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}=360º$, $\hat{A}=2\hat{C}$, $\overline{EA}=\overline{AB}=\overline{DE}$ y $\overline{BC}=\overline{CD}$

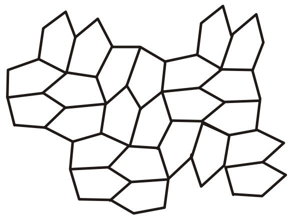
Tipo 7



$2\hat{B}+\hat{C}=2\hat{D}+\hat{A}=360º$ y $\overrightarrow{EA}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$

Tipo 8





$$2\hat{A} + \hat{B} + 2\hat{D} + \hat{C} = 360^{\circ} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{EA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$$

a) Verifica si el pentágono de la Actividad 4 pertenece a alguna de las clases consideradas por Kershner.

En el Power Point se proyectará el pentágono con los datos. El docente concluye junto a los alumnos que efectivamente el pentágono de la Actividad 4 parte a, que no era de Reinhardt, sí pertenece a una de las familias de Kershner.

b) ¿Qué pasó?

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes hagan una síntesis de lo descubierto hasta el momento. En las Actividades 4 y 5 se encontró un nuevo pentágono. Acá se analiza enmarcado en una clasificación producto de una investigación y se ve la presencia de dos familias de pentágonos más. El profesor enfatizará en que se cierra la lista.

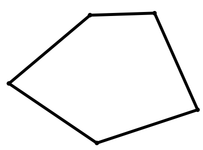
Actividad 6

En tu opinión, ¿es posible encontrar un pentágono convexo que cubra el plano y no pertenezca a ninguno de los ocho tipos que Kershner demostró que existían?

Se recoge la respuesta de los estudiantes a esta actividad.

Actividad 7

a) El siguiente pentágono, ¿sirve para embaldosar el plano?



Se entrega el pentágono sin datos.
Si ningún grupo logró embaldosar, el profesor mostrará cómo es posible hacerlo, utilizando para ello una presentación dinámica.

b) El pentágono anterior, ¿forma parte de alguna de las familias de Reinhardt o Kershner?

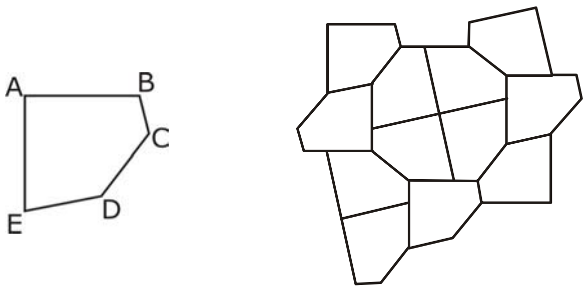
Se proyectará con el cañón el pentágono con los datos de ángulos y lados.

c) ¿Qué pasó?

Se considerará un solo tipo de pentágono hallado con posterioridad.
Se hace una recapitulación de lo sucedido hasta el momento.

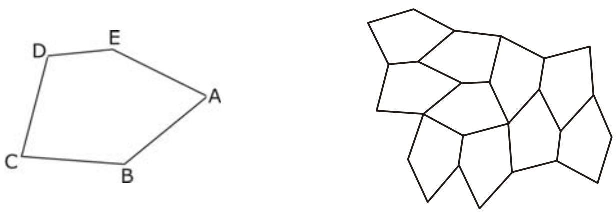
Actividad 8

En 1975, el analista Richard James encontró un tipo de pentágono que no pertenecía a ninguna de las clasificaciones conocidas.



$\hat{A} = 90º$, $\hat{C} + \hat{D} = 270º$, $2\hat{D} + \hat{E} = 2\hat{C} + \hat{B} = 360º$ y $\overline{EA} = \overline{AB} = \overline{BC} + \overline{DE}$

En 1976 un ama de casa, Marjorie Rice, descubrió varios tipos más que completaron una lista de trece. Te presentamos uno de ellos.



$2\hat{E} + \hat{B} = 360º$, $2\hat{D} + \hat{C} = 360º$ y $\overline{EA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

Marjorie Rice en 1976-1977.

En cada uno de los casos mencionados el pentágono cumple ciertas condiciones angulares y determinadas relaciones entre sus lados.

¿Qué vimos en la clase de hoy?

Esta actividad es para trabajar en forma oral con el docente.

Actividad final

El problema de la determinación de los pentágonos convexos que recubren el plano, es hoy, un problema abierto. Esto significa que no se conoce aún una lista definitiva de pentágonos con tal condición.

Escribe con tus palabras una síntesis del trabajo realizado por distintas personas con el objetivo de encontrar pentágonos convexos que recubren el plano.

A lo largo de la secuencia presentada a los estudiantes de geometría, se fueron mostrando distintos momentos en el abordaje del problema en cuestión y estos pudieron ver que dos matemáticos habían considerado el problema resuelto y “demostrado” y que luego esos resultados fueron refutados con la aparición de ejemplos que antes no habían sido considerados. Es entonces que, al solicitarles en la actividad 9 que hagan una síntesis del trabajo realizado para determinar pentágonos convexos que recubren el plano, pretendemos observar si los estudiantes van más allá de lo anecdótico y pueden reflexionar acerca de las verdades matemáticas y verlas como resultados que en determinada oportunidad pueden ser validadas por los matemáticos y que más adelante pueden ser revisadas y reformuladas.

5. Análisis de los resultados

5.1 Análisis de las respuestas al cuestionario

Primera pregunta

El cuestionario para explorar las creencias de los estudiantes incluía como primera pregunta la siguiente:

1. Si tuvieras que explicarle a un alumno qué es la matemática, ¿qué le dirías?

Al formular la pregunta ubicando al estudiante en su rol docente buscábamos eludir posibles respuestas estandarizadas y tener acceso a sus creencias de una forma más directa.

Para este estudio asumimos las tres visiones respecto de la naturaleza del conocimiento matemático que propone Ernest (1989): visión instrumentalista, visión platónica y visión dinámica, que ya desarrollamos en el marco teórico. Es a partir de estas tres visiones que analizamos las treinta respuestas de los estudiantes a esta primera interrogante del cuestionario exploratorio.

El sustantivo que más aparece en las respuestas de los estudiantes es *ciencia*. En cada uno de los grupos considerados alrededor de la mitad recurre a la palabra ciencia para explicar qué es la matemática (1°A Fundamentos de la Matemática: diez de diecisiete, 1°E Geometría I: tres de seis, 2°A Análisis Matemático I: tres de seis). La palabra ciencia aparece seguida, en la mayoría de los casos, de: formal, exacta, que estudia los números. En los restantes es seguida por expresiones como: que estudia los patrones, que estudia todas las relaciones entre objetos. Los otros sustantivos usados para definir matemática son disciplina y doctrina.

Una primera observación que puede hacerse es que al desarrollar la respuesta a la pregunta formulada, la mitad de los estudiantes hacen referencia a la estructura interna de la matemática, utilizando expresiones como "ciencia que tiene como método la demostración" (E1), "rama científica donde... se enuncian y demuestran teoremas, proposiciones, axiomas" (E2), "es un juego lógico entre símbolos" (E5).
Este tipo de respuesta evidencia que los estudiantes entrevistados tienen una visión platónica del conocimiento matemático pues resaltan la consistencia interna de dicho conocimiento.

También apreciamos una visión platónica en estudiantes que hacen referencia a la matemática como infinita en respuestas como: "cada año se puede descubrir algo nuevo de ella" (E7), "la Matemática está ahí, en el mundo que nos rodea, esperando ser descubierta" (E7), "doctrina donde se descubren cosas y se intentan otras" (E28). Para estos estudiantes la matemática existe en un mundo de ideas preexistente al hombre. La tarea de este último consistiría en descubrir esas ideas.

Un grupo menor de estudiantes, a la hora de definir matemática, utiliza expresiones como *fenómeno social* o *parte de la cultura*. Entre las respuestas que hacen referencia a lo social y colectivo encontramos expresiones como: "fenómeno social construido por el hombre y que tiene una coherencia para todos" (E16), “construcción humana, abstracta, basada en ideas” (E19). También aparece una respuesta en la que se sostiene que “la matemática no tiene definición”, que “no es un deporte para espectadores” y que “solo aquel que hace matemática puede saber qué es” (E20). Esta afirmación dirigida a una clase de enseñanza media, tal como está planteada la pregunta, remite a la actividad matemática como vía para conocer qué es la matemática.

Una respuesta de tenor similar es la dada por E4: “disciplina que utilizan los matemáticos para demostrar hechos que para ellos son nuevos y los cuales quieren explicar el por qué de su existencia”; esta respuesta, en esencia, dice que la matemática es lo que hacen los matemáticos.

En el caso de estudiantes que dieron este tipo de respuestas asumimos que tienen una visión dinámica de la matemática ya que en esta visión la matemática se concibe como un proceso de investigación a través del cual se obtienen resultados provisionales y no productos terminados, sus resultados están abiertos a la revisión y se ubican en un contexto social y cultural.

Un número considerable de respuestas hacen referencia a que “está en todas las cosas… la Matemática está ahí, en el mundo que nos rodea” (E7) o “está en todas las cosas que conforman el mundo” (E6), o “que lo vivimos en el día a día, está en la naturaleza, en la vida cotidiana, en los juegos” (E10), “está en todo lo cotidiano… no existiría mucho de lo que tenemos alrededor si no fuera por la matemática” (E12), “está en todos lados” (E14), “imprescindible para que existiera todo lo que conocemos hoy en día” (E15), “ocupa casi todos los aspectos de nuestras vidas” (E18), “disciplina presente en nuestras vidas, en cada cosa y en cada acto” (E22), “que se encuentra en todos lados” (E26), “que se encuentra en la naturaleza y lo que nosotros conocemos es una interpretación posible de ella” (E27).

Estas afirmaciones las asociamos a una visión dinámica de la matemática en la medida que el aspecto de la matemática que se pone de relieve tiene un vínculo directo con la realidad que se analiza. La realidad parecería ser fuente de inspiración para ciertas preguntas matemáticas y, a su vez, ciertos conceptos matemáticos permitirían concebir la realidad de una nueva manera. Esta interacción sería el motor del desarrollo de la matemática. También consideramos que tienen una visión dinámica de la matemática, aquellos estudiantes que se refieren a los orígenes de la matemática diciendo, por ejemplo, “que surgió con la necesidad del ser humano” (E29), “surgió con la necesidad que le generaba al ser humano en vivir el día a día, es decir, de medir terrenos, clasificar cantidades, etc.” (E9). En la visión dinámica de la matemática los resultados están abiertos a la revisión y se ubican en un contexto social y cultural.

Otras respuestas se refieren a la utilidad de la matemática en la comprensión cotidiana del mundo, algunos ejemplos de respuestas en este sentido son: “encontrarle sentido a cosas que sin la Matemática jamás podría” (E17), “que se utiliza para fundamentar el comportamiento de las cosas en este mundo” (E19), “utilizamos todos… para manejarse en la vida” (E11), “se usa en casi todos los ámbitos de la humanidad. Está a servicio para explicar muchos fenómenos que suceden en la realidad y otros que surgieron en la profundización de ésta, que todavía no se le ha encontrado su utilidad productiva” (E21), “sirve mucho para la vida cotidiana" (E26), "ayuda a entender el mundo que nos rodea" (E30), "el hombre trata de explicar las cosas que pasan en el mundo real, a través de un lenguaje matemático" (E28), "se ha desarrollado a tal efecto de ser sustento de todo lo que hacemos y conocemos" (E29), "por más que a veces no entendamos para que nos puede servir en la diaria los conceptos básicos de ella (como lo son sumar, restar, etc.), son útiles siempre" (E8), "se utiliza muy a menudo, tanto como el lenguaje. Lo aplicamos cuando vamos de compras, cuando medimos algo" (E23).

También aparece en las respuestas una utilidad más específica vinculada a la ciencia, en afirmaciones como: "su aplicación es común a casi todas las ciencias" (E22), "pero también tiene un uso específico: como herramienta en las ciencias" (E23), "sirve como herramienta para el resto de las ciencias" (E25). La ciencia en cuestión puede ser la misma matemática: "disciplina que utilizan los matemáticos para demostrar hechos que para ellos son nuevos y los cuales quieren explicar el por qué de su existencia" (E4).

Los aspectos resaltados antes, que podríamos sintetizar en "la matemática es útil para la vida cotidiana" y "la matemática es útil para la ciencia" reflejan una visión instrumentalista de la matemática ya que esta aparece como un cuerpo de conocimientos ya organizado y factible de ser aplicado, tanto en la vida cotidiana como en la ciencia.

Otro aspecto distinto de los mencionados previamente sobre la utilidad de la matemática está referido al desarrollo del pensamiento matemático de una persona: "te ayuda a desarrollar un pensamiento lógico-deductivo" (E25), "sirve para el pensamiento y la reflexión crítica" (E26), "Agiliza la capacidad de razonamiento" (E30), "ayuda a desarrollar la inteligencia abstracta especialmente" (E31), "una materia en donde todo el tiempo se estimula al alumno al razonamiento y la ejercitación" (E2). Tres de las cuatro respuestas que consideran este aspecto corresponden a estudiantes de segundo año.

Son cuatro estudiantes de treinta quienes se refieren a la matemática como un medio para desarrollar el pensamiento de un sujeto, en especial en lo que atañe al desarrollo de la capacidad de razonamiento y pensamiento abstracto. Asociamos estas respuestas a una visión dinámica de la matemática en la medida que hacen referencia al desarrollo del pensamiento de un estudiante y, por tanto, parecerían asumir que hay actividades más adecuadas que otras de acuerdo al contexto social y cultural de los estudiantes. También, los resultados matemáticos a los que se arribe estarán sujetos a revisión y ampliación atendiendo al estado de desarrollo del pensamiento en el que se encuentren los estudiantes.

Frente a la primera pregunta del cuestionario exploratorio vemos la presencia de las tres visiones de la matemática propuestas por Ernest. La visión platónica de la matemática se aprecia a través de la referencia de algunos estudiantes exclusivamente a la estructura interna de la matemática para definirla y a que la matemática se descubre. La visión instrumental de la matemática se aprecia a través de afirmaciones que podríamos resumir en "la matemática es útil para la vida cotidiana y para otras ciencias". La visión dinámica de la matemática se refleja en respuestas que tienen en cuenta el aspecto social y cultural de la matemática tanto en el presente como a través de la historia. También en que la matemática puede contribuir al desarrollo del pensamiento y, a su vez, que el desarrollo del pensamiento contribuye a ver la matemática de una nueva manera, es decir, al desarrollo dialéctico de pensamiento y matemática.

Segunda pregunta

A continuación analizaremos las respuestas a la pregunta dos del cuestionario:

2. Indica seis características del conocimiento matemático y explica qué significa cada una de ellas para ti.

De los 31 estudiantes considerados en los tres grupos estudiados, solo seis respondieron indicando seis características del conocimiento matemático, tal como se pedía. El número de características señaladas por los estudiantes restantes fueron: cinco características fueron dadas por dos estudiantes, cuatro características dadas por seis estudiantes, tres características dadas por cinco estudiantes, dos características dadas por cuatro estudiantes, una característica dada por un estudiante, y no responden o no responden lo solicitado siete estudiantes.

Para los 31 estudiantes considerados, al solicitar seis características esperábamos contar con 186 respuestas. A partir de las respuestas obtenidas contamos con 94 respuestas a características, es decir, la mitad de las respuestas esperadas.

Las respuestas dadas por los estudiantes permiten hacer un claro agrupamiento de las mismas. Hay características que son señaladas por la tercera parte de los estudiantes como exacta (once estudiantes), abstracta (once estudiantes), útil (diez estudiantes). Características como infinita (nueve estudiantes), demostrable (ocho estudiantes), racional (siete estudiantes) son indicadas por la cuarta parte de los estudiantes. Alrededor de la quinta parte de los estudiantes dan las características universal (seis estudiantes), organizada (seis estudiantes). Axiomática es una característica indicada por cuatro estudiantes. Las restantes características son dadas por uno o por dos estudiantes y entre ellas aparecen ciencia, amplia, creativa, antigua.

Cuando se refieren a la matemática como *exacta* es porque “no da lugar a errores” (E1), “no permite margen de error, está bien o está mal” (E15), “una propiedad es verdadera o falsa en su totalidad. No hay matices” (E23). Otros estudiantes fundamentan la exactitud de la matemática en la demostración matemática, así E5 dice “no se duda de lo que ha sido demostrado” y E9 expresa que “después de determinadas demostraciones se considera que es cierta”. Ciertos matices son señalados por E25 quien afirma que el conocimiento matemático “intenta ser exacto aunque, como toda construcción humana, puede no serlo” o E20 sostiene que “es preciso o tiende a la precisión”.

Lo abstracto de la matemática tiene significados asociados a lo no sensible, ya sea referido al tacto como “no se puede tocar” (E11) o “no lo podemos palpar” (E14) o “los números que sumamos, las figuras que medimos, son intangibles” (E23), como a la vista en afirmaciones como “no lo podemos ver” (E14) o “no se puede visualizar" (E9). Otros significados de lo abstracto del conocimiento matemático son asociados a ser "una construcción de la mente humana" (E17) o a "que los elementos en estudio son imaginarios" (E21) o a que la matemática "existe en el mundo de las ideas" (E21). Algunas respuestas señalan un cierto vínculo con la realidad sensible como E20 que afirma que la matemática "trata de entes abstractos, algunos abstraídos de la realidad" o E3 que sostiene que "muchos de los objetos que estudia la matemática no son reales", dejando entrever que la realidad material está en el origen de la matemática o, también, que los objetos matemáticos mismos pueden ser materiales.

El conocimiento matemático es concebido por los estudiantes como *útil*. Esta utilidad está vinculada a ser "utilizable por otras ciencias" (E22), "utilizable por cualquier ciencia o disciplina" (E20) o, en forma más general, porque "se utiliza en lo cotidiano" (E21) o porque "nos sirve en muchos aspectos de la vida" (E18) o dado que "se pueden encontrar muchísimos diferentes usos para la misma" (E7). La única referencia a la utilidad a lo largo de la historia la hace E18 al afirmar que "nos ha servido en toda nuestra historia". También hemos asociado a útil adjetivos como aplicable (E6), experimental (E27), práctica (E27), presentados por los estudiantes sin una explicación.

La caracterización de la matemática como *infinita* es sostenida con afirmaciones que tienen que ver con concebir la matemática como inacabada o en constante desarrollo. E20 sostiene "no todo está dicho y siempre aparecen cosas nuevas" o E17 dice "siempre pueden aparecer nuevos conocimientos". También E7 aporta, en el mismo sentido que los estudiantes antes mencionados, que "luego de que se van descubriendo cosas acerca de ella, se sigue avanzando desde ese punto y no se retrocede en ningún aspecto", con la diferencia de que E7 explicita cómo se da, según él, ese proceso de desarrollo al decir "o vemos que un teorema sea refutado, pero el conocimiento en sí, progresa". También E12 explica cómo puede darse ese proceso de desarrollo de la matemática: "puede quedar, una vez demostrado, más preguntas". También hemos asociado a infinita otros adjetivos que fueron presentados sin fundamentación como: dinámico (E6), inconcluso (E6), renovable (E6), constantemente actualizándose (E27).

Bajo el adjetivo *demostrable* aparecen afirmaciones como "para asumir algo como cierto debe ser demostrado" (E5) o "[el conocimiento matemático] es factible de demostración" (E22) o "podemos siempre, [...] demostrar un teorema que fundamenta alguna idea matemática" (E7). En el caso de E7 aparece en su afirmación una referencia a un aspecto axiomático de la matemática al decir "podemos siempre, excepto los que nos tomamos como axiomas, demostrar". También hemos incluido bajo este rótulo afirmaciones más generales como "todo debe ser comprobado" (E21).

La creencia de que el conocimiento matemático es *racional* se basa para E4 en que "requiere el uso de la razón para ser aplicado o comprendido". También hemos considerado afirmaciones que hacen referencia a la lógica como "lógica: los conocimientos, los procesos de un conocimiento se adquieren a través de lógica" (E19) o "lógica: no admite contradicciones" (E22) o también "razonamiento lógico: las demostraciones siguen reglas lógicas" (E5).

Bajo el adjetivo *universal* hemos agrupado las creencias de los estudiantes que hacen referencia al conocimiento matemático como “universalmente válido” (E3) o “común para todas las personas de este mundo” (E7). También incluimos bajo este adjetivo a las creencias que consideran el conocimiento matemático como único: “si dos personas realizan un mismo cálculo por caminos correctos, los resultados no se pueden contradecir” (E15) o “existe solo uno aunque puede definirse de varias formas” (E4).

Con el adjetivo *organizada* hemos reunido respuestas que hacen referencia, de distintas maneras, a la estructura de la matemática. Así E19 sostiene que “se formulan los conocimientos de manera formal, estructurada y fundamentada”, que el “conocimiento se expresa de forma concreta y concisa”, que el “conocimiento se formaliza a través de procesos” y que “no hay conocimiento “suelto” o independiente. Todo tiene relación y fundamentación”. Dice E20 que el conocimiento matemático “es ordenado: No es un conocimiento disperso. Está, en general, dado en conjuntos”.

El aspecto axiomático del conocimiento matemático aparece en cuatro de las respuestas. Según E3 la matemática “parte de supuestos que se toman como ciertos ya que no pueden ser demostrados”, de forma muy similar se expresa E16 “el conocimiento matemático parte de conceptos aceptados (primitivos) para seguir construyéndolo” y también E25 al afirmar “se parte de “cosas” que no se demuestran”. E24 agrega una caracterización de minimalidad a lo axiomático: “la matemática trata siempre de que haya la menor cantidad de axiomas”. Como se mencionó antes, también E7 hace una referencia a lo axiomático al decir que en matemática “podemos siempre, excepto los que nos tomamos como axiomas, demostrar”.

Las restantes características del conocimiento matemático son dadas por uno o dos estudiantes: como *ciencia* ya que “tiene un método y busca explicar y predecir” (E1), es *amplio* dado que todas las personas “han vivido o experimentado algún aspecto de la Matemática” (E7), es *progresiva* dado que “se aprende en forma evolutiva” (E22), es *creativa* ya que “nos hace revelar las mejores ideas” (E18), es *complejo*, *humano* ya que “es un conocimiento “situado”, depende del hombre y de su contexto”, antigua por ser una ciencia que viene siendo estudiada desde muchísimos años atrás”. Estas dos últimas respuestas son las únicas que hacen referencia al carácter histórico y social del conocimiento matemático.

Características del conocimiento matemático como *exacto* (once estudiantes), *abstracta* (once estudiantes), *demostrable* (ocho estudiantes), *racional* (siete estudiantes), *universal* (seis estudiantes), *organizada* (seis estudiantes), *axiomática* (cuatro estudiantes) hacen referencia exclusivamente a la estructura interna de la matemática. Estas características las asociamos a una visión platónica de la matemática en la que el conocimiento matemático es concebido como un cuerpo fuertemente estructurado y organizado.

La característica de *útil* (diez estudiantes) que refiere a que se utiliza en la vida cotidiana o en otras ciencias, la entendemos como indicio de una visión instrumentalista de la matemática. La matemática así concebida es una herramienta para aplicar en otros ámbitos.

Las respuestas que conciben el conocimiento matemático como infinito (nueve estudiantes), las asociamos a una visión dinámica de la matemática en la medida que los resultados se conciben como provisionales, factibles de ser refutados y de evolucionar.

Viendo las respuestas así agrupadas y asociadas a cada una de las tres visiones de la matemática sugeridas por Ernest, es contundente la primacía de la visión platónica sobre las visiones instrumentalista y dinámica.

La diferencia de estos resultados con respecto a los obtenidos en la primera pregunta del cuestionario exploratorio es notoria. Si bien en la primera pregunta la visión platónica tiene una presencia marcada, también aparecen respuestas ligadas a las visiones instrumentalista y dinámica. En la segunda pregunta podría decirse que la visión platónica ocupa todo el registro de respuestas, apareciendo las visiones dinámica y platónica en forma vestigial.

Los resultados de esta segunda pregunta señalan un aspecto que sería deseable trabajar en la formación de profesores de matemática para incidir en la construcción de otra visión de la matemática por parte de los estudiantes, posibilitando que una visión dinámica del conocimiento matemático tenga mayor presencia en su formación.

Tercera pregunta

Analizaremos a continuación las respuestas de los estudiantes a la tercera cuestión:

3. ¿Cómo se origina el conocimiento matemático?

Como ya señalamos, a través de esta pregunta buscamos detectar si el origen del conocimiento matemático se encuentra vinculado al hombre, a contextos sociales y culturales o si más bien se cree en la matemática como cuerpo de conocimientos que nos es dado a partir de las obras matemáticas que pueden ser conocidas por los estudiantes.

De los 29 estudiantes que respondieron esta pregunta, detectamos que en trece respuestas se hace mención al hombre, al ser humano, a las comunidades o a la civilización para ponerlos en directa relación con el origen de la matemática. Algunos ejemplos de estas respuestas son:

(E1): “Se origina por la necesidad que tuvieron algunas comunidades de explicar ciertos fenómenos y de darles nombres a aquellas cosas que conocían y que seguían un patrón de alguna manera. (Por ejemplo: los pasos. Empezar a contarlos e identificarlos con un número. La noción de distancia.)”.

(E4): “El conocimiento matemático se origina en la antigüedad cuando el ser humano empieza a querer repartir cosas, explicar situaciones del día a día mediante los números”.

(E5): “El conocimiento matemático se origina en las primeras civilizaciones donde el hombre necesitaba ciertas herramientas que le permitieran contabilizar, medir, etc.”

(E11): “El conocimiento matemático se origina cuando el hombre comienza a dividir las tierras para trabajarlas y sobrevivir mediante ellas”.

(E28): “Se origina inventando y descubriendo a través de una necesidad de los hombres de darle una explicación a ciertas cosas” (E28).

Un aspecto a destacar en las respuestas de los estudiantes es que estas muestran la *función* que da origen a la matemática: la función explicativa o la función de herramienta. Los cinco ejemplos presentados anteriormente dan cuenta de estas funciones. En nueve respuestas aparece la *función explicativa* de la matemática. Esto es, una disciplina que aporta al entendimiento o comprensión de los fenómenos del mundo que nos rodea. En dieciséis respuestas aparece la *función de herramienta*, esto es, la matemática que sirve a algún fin, que es útil para resolver problemas de la vida cotidiana: contar, medir, repartir, dividir, comprar, vender, intercambiar, construir. Es importante señalar que estas acciones refieren (aún cuando los estudiantes no lo hagan explícito) a actividades humanas.

No obstante, debemos mencionar que más de la mitad de los estudiantes entrevistados no ligan al hombre con la creación del conocimiento matemático en forma explícita aunque sí lo proponen de forma impersonal, tal como lo mencionamos en el párrafo anterior: “Surge de la necesidad de explicar y demostrar ciertos hechos” (E2).

Solamente en dos respuestas aparecen los orígenes de la matemática asociados a *procesos de estudio*:

(E18): “El conocimiento matemático se origina mediante mucho estudio y ejercicios. Pero igual, todos poseemos conocimientos matemáticos desde antes de comenzar la escuela. Conocimientos sencillos que la vida te proporciona para poder realizar ciertos problemas cotidianos”.

(E30): “Se origina en la época de Pitágoras. En su escuela hacía énfasis en el estudio de relaciones que tenían carácter importante para el desarrollo de los estudiantes en la educación. Si bien se tenían ciertas ideas antes de esta época, se hizo un estudio formal en la escuela pitagórica”.

En el caso del E18 el origen de la matemática es asociado al estudio y la resolución de ejercicios. Esto nos lleva más bien a pensar que el estudiante se refiere a cómo él cree que se aprende la matemática o a lo que permitiría un conocimiento profundo sobre la disciplina, ya que como él mismo aclara, todos tenemos conocimientos matemáticos sencillos desde antes de comenzar la escuela, pero es el proceso de estudio el que contribuye a su refinamiento.

Si bien el E30 hace mención a un proceso histórico pues hace referencia a la escuela pitagórica, sus palabras hacen más hincapié en lo que se estudia en dicha escuela y lo que implica en el desarrollo de las capacidades de los estudiantes que participan de tal estudio, que en enmarcar el desarrollo de la matemática en un proceso evolutivo.

En síntesis, un poco más de la mitad de los estudiantes no relacionan en forma explícita el origen de la matemática al hombre. No obstante es importante destacar que una amplia mayoría de las respuestas atan el desarrollo de la matemática con actividades humanas, con problemas cotidianos a resolver y con la necesidad de explicar fenómenos del mundo que nos rodea. Como ya expusimos en el marco teórico, Ernest distingue tres visiones respecto de la naturaleza de la matemática: una visión instrumentalista, una platónica y una visión dinámica. Desde la perspectiva instrumentalista, la matemática es un conjunto de hechos, reglas y métodos, concebidos como entidades separadas. La visión platónica es estática y concibe a la matemática como un cuerpo consistente de conocimientos. La visión dinámica de la matemática la concibe como un proceso de investigación a través del cual se obtienen resultados provisionales y no productos terminados, sus resultados están abiertos a la revisión y se ubican en un contexto social y cultural. Es esta última visión la que entendemos que queda ampliamente reflejada en las respuestas de los estudiantes. Consideramos entonces que las creencias acerca de cómo se origina el conocimiento matemático, que fueron reveladas en las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario, suponen un interesante punto de partida, altamente positivo, sobre el cual construir la formación de los futuros profesores de matemática.

5.2. Análisis de las reacciones de los estudiantes a posteriori de las clases en las que se aplicaron las secuencias

Con el fin de recabar las reacciones inmediatas de los estudiantes de profesorado respecto de la clase atendida en cada caso, se elaboró un cuestionario final que, para los estudiantes, formaba parte de la propia secuencia. Como cada secuencia fue elaborada en base a temas diferentes y tiene un objetivo distinto el cuestionario final fue diseñado acorde al tema y los objetivos.
A continuación realizamos un análisis de las reacciones de los estudiantes, discriminadas por asignatura.

FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

La secuencia propuesta a los estudiantes que asistieron a la clase observada tenía por objetivo dar significado a la resolución de la ecuación de segundo grado utilizando a la historia de la matemática como recurso didáctico. El recurso utilizado consistió en presentar cómo diferentes culturas resolvían situaciones que involucraban a dicha ecuación y las motivaciones y justificaciones que estas culturas daban a la misma.
Recordemos la actividad final que se presentó a estos estudiantes:

> Actividad 4
> a) ¿Para qué utilizamos la interpretación geométrica?
> b) ¿Conocían esta interpretación en relación a la resolución de las ecuaciones de segundo grado?
> c) Si tuvieran que trabajar con alumnos de enseñanza media, ¿trabajarían con la interpretación geométrica? ¿Por qué?

Cabe aclarar que el trabajo de los estudiantes en la actividad 4 se hizo en equipos, por lo que antes de responder hubo una discusión a la interna de cada equipo y se tuvo que llegar a un acuerdo.

Analizaremos a continuación las respuestas de los estudiantes a las preguntas de la actividad 4 en la clase de Fundamentos de la Matemática observada.

Todos los equipos, sin excepción, ante la primera pregunta advirtieron la importancia de la representación geométrica en la medida que les ayuda a visualizar relaciones y les permite entender las transformaciones. Esto se puede apreciar en los siguientes comentarios:

(E1, E2 y E3): "Para poder visualizar, entender y llegar a una resolución algebraica."

(E9 y E10): "Lo utilizamos como apoyo visual, para entender mejor el procedimiento."

(E14, E15, E16 y E17): "Para ayudarnos a visualizar el problema y llegar más fácilmente a la solución."

Algunos equipos van más allá de la mera visualización y logran comprender que la representación geométrica de la situación tiene su correlativo con la representación algebraica, que es la que conocían antes de participar de esta clase. Esto es un paso fundamental hacia la comprensión y la dotación de significado a los procesos algebraicos que permiten obtener la fórmula resolvente, en la medida que pueden verlo desde dos registros y detectar los vínculos entre uno y otro. Esto lo observamos en las respuestas siguientes:

(E4, E5 y E 6): "Para una mejor visualización de las transformaciones, y para verificar que el procedimiento algebraico realizado es correcto."

(E11, E12 y E13): "Utilizamos la interpretación geométrica de apoyo para obtener la interpretación algebraica."

A la pregunta b) todos los equipos responden que no conocían esta interpretación de la resolución de una ecuación de segundo grado, aspecto que, como ya se dijo, era esperable.

En referencia a la pregunta c) todos los equipos dijeron que trabajarían en secundaria con la interpretación geométrica de la resolución de la ecuación de segundo grado recurriendo a argumentos similares a los que utilizaron para responder la pregunta a), a saber, los beneficios de trabajar con una imagen que ayuda al razonamiento y a la comprensión. En muchos casos argumentan que esta forma de trabajar ayudaría al estudiante de enseñanza media en aspectos que ellos consideran abstractos y, por lo tanto, difíciles de comprender y conceptualizar. Ejemplos de esto último se pueden observar en las respuestas de algunos equipos que transcribimos a continuación:

(E4, E5 y E6): “Sí, porque los ayudaría a comprender de manera gráfica algo que de otra forma quedaría solo en el plano abstracto.”

(E7 y E8): “Sería una forma concreta de demostrarlo y no algo abstracto como en la forma en que se suele demostrar.”

(E14, E16 y E17): “Sí porque en primaria hacen muy presente la geometría y al enseñar un tema que es muy abstracto lograrían interpretarlo mejor porque lo estarían visualizando. Cualquier método que incluya una imagen o algún dibujo ayuda a entender fácilmente y así no serían los ejercicios tan abstractos.”

Ante esta pregunta que posiciona a los estudiantes de profesorado de matemática en el rol de docente de enseñanza media, algunos equipos parecen profundizar algunos aspectos que en la pregunta a) no habían tenido en cuenta, como ser la relación que se establece entre ambos registros de representación y el significado que aporta la representación geométrica al entendimiento. Por ejemplo, los integrantes del equipo formado por los estudiantes 1, 2 y 3 dicen:

“Sí, porque a nuestro entender, para un alumno de enseñanza media es más inmediata la interpretación visual y por medio de la misma todos los pasos de la demostración quedan justificados.”

Síntesis

Creemos que en líneas generales se cumplió con el propósito de la secuencia planteada a los estudiantes del curso Fundamentos de la Matemática pues lograron dar significado a las diferentes transformaciones que permiten obtener la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado. La oportunidad de conocer las justificaciones dadas por la cultura árabe a través del trabajo de al-Khwarizmi les permite tener otra mirada sobre la enseñanza de este tópico, aspecto que parecen capitalizar a la hora de posicionarse en el rol de profesor de matemática de enseñanza media.

En las respuestas dadas por los equipos parece vislumbrarse una concepción de la matemática que ya no es concebida como un conjunto de reglas, métodos y procedimientos concebidos como entidades separadas -visión instrumentalista- sino que se trata de una matemática que puede ser construida dando significado a esos procedimientos a través de diferentes miradas –visión dinámica-.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

La secuencia propuesta a los estudiantes que asistieron a la clase observada tenía por objetivo, a partir del concepto de máximo relativo estricto, que los estudiantes reconocieran el devenir de la definición del concepto mencionado a lo largo de la historia y que pudieran concebir a las definiciones matemáticas actuales como resultante de una evolución en la que incidieron los distintos contextos históricos e intramatemáticos.

Recordemos la actividad final que se presentó a estos estudiantes:

Actividad 3

a) Si fueras profesor de enseñanza media y tuvieras que definir máximo relativo estricto, ¿trabajarías con alguna(s) de las definiciones vistas en la clase de hoy?

En caso afirmativo indica con cuál o cuáles trabajarías y por qué.

En caso negativo explica por qué no optarías por ninguna de ellas.

b) La siguiente definición de máximo relativo estricto fue extraída de Funciones reales. Matemática A para 6º año de Eduardo Giovannini:

> Una función **f** tiene un máximo relativo o local en sentido **estricto** en **a**, cuyo valor es f(a), **si existe un entorno reducido de centro a** tal que f(a) es mayor que los valores funcionales obtenidos para todos los puntos **x** de dicho entorno reducido.
> Es decir: si existe $\delta > 0$ tal que: $f(x) < f(a)$ si $x \in E^*(a, \delta)$

i) Esta definición, ¿es similar a alguna de las que trabajaste en la clase de hoy? En caso afirmativo indica a cuál de ellas.

ii) ¿Por qué crees que el autor del texto eligió esta definición y no otras elaboradas por grandes matemáticos como por ejemplo las que viste en la clase de hoy?

c) ¿Son correctas las definiciones elaboradas por Kepler, Fermat y L´Hospital? ¿Por qué?

Analizamos a continuación las respuestas de los estudiantes a las preguntas de la actividad 3. Esta actividad fue trabajada en la clase de Análisis Matemático I observada. Cabe aclarar que esta actividad fue realizada en forma individual.

Frente a la pregunta a) varios estudiantes consideran que en secundaria trabajarían con una definición que no fuera "tan abstracta" como la consensuada en la clase. Valoran algunas de las definiciones de los grandes matemáticos por contener aspectos geométricos que ayudan a la visualización del concepto. Estos aspectos se pueden apreciar en las siguientes respuestas:

(E24): "No utilizaría una definición tan abstracta como la consensuada... Buscaría una manera más tirada hacia la percepción de los estudiantes que vincule la definición consensuada."

(E25): "Sí, es interesante ver la evolución histórica para el mejor entendimiento del concepto. Creo que trabajaría con la de Fermat, ya que me parece más "geométrica" en contraposición con la de Kepler que es más "analítica"."

La casi totalidad de los estudiantes al responder esta pregunta se posicionan de forma conciente en el rol de profesor, teniendo presente que la definición está dirigida a estudiantes de enseñanza media señalando algunos beneficios de determinadas definiciones, las dificultades que pueden ocasionar otras y la forma de trabajar con ellas en la clase. Lo podemos apreciar en las siguientes respuestas:
(E29): "¿Trabajaría de la misma forma que en clase, comparando definiciones hasta "construir" una? Si es esa la pregunta, tal vez sí, pero no tantas definiciones pues

creo que es “demasiada” información para un alumno de secundaria que lo ve por primera vez.”

(E30): “Trabajaría con el cuadro comparativo de los tres autores y una hecha por los alumnos, de forma consensuada.”

(E26): “Sí trabajaría con la consensuada, creo que es la definición que visualizarían mejor los alumnos. “No es muy difícil de entender”.”

Con respecto a la pregunta b), en general los estudiantes valoran la definición dada por el autor pues abarca mayor cantidad de casos en contraposición a las más antiguas que refieren a algunas funciones particulares. Los estudiantes parecen advertir que la definición depende de lo aceptado en un momento histórico determinado. Por ejemplo:

(E32): “Porque es la más fácil de visualizar, y se adecua a la idea de máximo relativo que tenemos hoy en día.”

(E30): “Porque es la más actual y abarca más casos porque quita toda ambigüedad.”

En la pregunta c), de los doce estudiantes que trabajan en la actividad 3, diez de ellos dan cuenta de la relatividad de las definiciones admitiendo que las definiciones dadas por los grandes matemáticos eran correctas en su momento histórico. También se deja entrever que las definiciones van variando en la medida que se amplían los conocimientos y los objetos con los que se trabaja. Los dos estudiantes restantes dicen que no pueden afirmar si son correctas o no. Veamos algunas de las respuestas.

(E25): “Sí, en su época eran correctas. Hoy en día se encuentran desactualizadas ya que las definiciones de función se han modificado.”

(E32): “Sí, son correctas pero de acuerdo a la definición que tenían en aquel entonces de máximo relativo. Para hoy en día esas definiciones no son aplicables es decir, no se cumplen en todos los casos ya que la idea de máximo relativo ha cambiado.”

(E33): “La validez o no de las definiciones está sujeta a nuestra perspectiva. Si pensamos en el tiempo histórico que fueron creadas, podemos decir que son correctas. Ahora bien, con los desarrollos teóricos actuales, las definiciones no resultan totalmente contemplativas.”

Síntesis

Del análisis de las respuestas de los estudiantes a esta actividad se puede apreciar que, luego de realizada la secuencia, se fortalece, en la mayoría de los casos, la visión dinámica de la matemática frente a la instrumentalista pues los estudiantes consideran que la ampliación de los conceptos produce cambios en la definición de los mismos y además consideran la idea del trabajo en el aula como una construcción que podría tener en cuenta diferentes registros. Todo esto a partir de lo visto en la secuencia. Se aprecia una valoración de que la matemática está influenciada por los conocimientos previos que se tienen en las distintas épocas. La secuencia permite que los estudiantes incluyan el contexto histórico en su visión de la matemática. No obstante, un estudiante parecería concebir la existencia de una matemática última que ya no es factible de cambiar, matemática esta a la que se iría aproximando la matemática en su desarrollo histórico: (E26): “A medida que fue avanzando el tiempo, la definición se fue asemejando a la realidad y fue abarcando más funciones que las definiciones anteriores no la abarcaban.”

GEOMETRÍA

La secuencia propuesta a los estudiantes que asistieron a la clase observada tenía por objetivo enfrentar al estudiante a un problema abierto hoy en día en la matemática. Para esto se trabajó en torno al recubrimiento del plano con polígonos convexos iguales. Este problema fue considerado resuelto varias veces a lo largo de la historia y hoy es considerado un problema abierto, por lo que pretendemos que los estudiantes puedan ver a la matemática como una ciencia en construcción y en evolución y no algo acabado.

Recordemos la actividad final que se presentó a estos estudiantes:

> Actividad 9
> El problema de la determinación de los pentágonos convexos que recubren el plano, es hoy, un problema abierto. Esto significa que no se conoce aún una lista definitiva de pentágonos con tal condición.
>
> Escribe con tus palabras una síntesis del trabajo realizado por distintas personas con el objetivo de encontrar pentágonos convexos que recubren el plano.

Analizamos a continuación las respuestas de los estudiantes a la actividad 9, en la clase de Geometría que fue observada. Cabe aclarar que esta actividad fue realizada en forma individual, siendo siete los estudiantes presentes en la clase.

Todos los estudiantes entrevistados hicieron un relato cronológico del trabajo que distintos matemáticos y no matemáticos realizaron para determinar familias de pentágonos convexos que recubren el plano. Tres de los siete estudiantes se limitaron al plano anecdótico sin profundizar ni reflexionar sobre el devenir histórico y las implicancias de este en las verdades matemáticas. Proponemos el siguiente relato como ejemplo de lo anterior.

(E20): “En una primera instancia un matemático presentó en su tesis de doctorado 5 pentágonos convexos con los cuales se podrían recubrir el plano; en una segunda instancia otro matemático afirmó que 8 eran tales pentágonos y no habría más; más adelante un diseñador gráfico descubrió otros dos mientras que una ama de casa descubrió los tres restantes que al día de hoy se conocen y lo hizo simplemente tejiendo.”
En las respuestas de los cuatro estudiantes restantes vemos que, además del relato, se reflexiona sobre el problema desde distintos puntos de vista. Veamos a qué nos referimos.

(E18): “Por eso puede ser que en un futuro se puedan encontrar más casos que hasta hoy no han sido descubiertos.”

(E23): “… pero viendo lo trabajado en clase nada indica que sean los únicos y que en un futuro esa cantidad de tipos aumente.”

Estos dos estudiantes visualizan claramente el hecho de que se trata de un problema abierto destacando la posibilidad de seguir trabajando en el problema. No hacen referencia alguna al hecho de que las demostraciones pueden ser revisadas y dependen de los conocimientos de cada momento histórico.

Solo dos de los estudiantes, además de reconocer que estamos frente a un problema abierto, reflexionan sobre las demostraciones. Por ejemplo el E37 afirma:

“Pienso que este problema seguirá abierto por más tiempo aún, hasta que se pueda afirmar alguna demostración definitiva.”

Las reflexiones de este estudiante dejan entrever que tiene una concepción de la matemática como una ciencia que, a la larga, puede dar solución a todos los problemas y que hay una verdad que de momento no se ha podido vislumbrar pero que alguien descubrirá. Esto nos puede estar mostrando una visión platónica de la matemática.

Con respecto al otro estudiante, E19, que reflexiona acerca de las demostraciones, podemos apreciar que la realización de la secuencia no parece haberlo afectado en la medida que no reconoce el contexto histórico en que se desarrollan las demostraciones y solo hace referencia a lo correcto o incorrecto de las afirmaciones de los matemáticos desde la actualidad.

(E19): “En primer caso Reinhardt en una tesis de doctorado planteó su teoría de que existen cinco tipos distintos de pentágonos convexos que recubren el plano, luego Kershner aproximadamente 50 años después, escribió un artículo donde afirmaba que Reinhardt estaba equivocado, ya que él encontró tres tipos más de pentágonos que cumplen las mismas condiciones, y este afirmó que eran en total únicamente esos ocho, cosa que en realidad no es correcta, ya que Reinhardt no dijo que eran solo esos cinco, sino que existían los mismos, lo cual no es erróneo.’

Síntesis

De acuerdo a las respuestas y al análisis antes realizado, observamos que la secuencia no tuvo un gran impacto en estos estudiantes en la medida que no se percibe una reflexión profunda acerca del devenir de las proposiciones matemáticas. Los estudiantes pueden describir los acontecimientos que se dieron en la determinación de los pentágonos convexos que recubren el plano, acontecimientos que dan cuenta de una matemática que por medio de la investigación provee resultados provisionales y no productos acabados –visión dinámica-. Las respuestas de los estudiantes no dan cuenta de que hayan logrado hacer consciente este hecho. Los pocos comentarios que salen del relato de los acontecimientos parecen mostrar que su visión acerca de la matemática sigue siendo platónica.

6. Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo nos propusimos indagar las creencias acerca de qué es la matemática y cuáles son sus orígenes en tres grupos de primer y segundo año de estudiantes de profesorado de matemática. En relación a qué es la matemática, detectamos una tendencia muy marcada hacia una visión platónica de la matemática, entendiéndola como una ciencia, disciplina o doctrina que está en todas partes esperando a ser descubierta. Para definirla, los estudiantes aluden a su estructura interna o a los procesos de validación que le son característicos, reconociéndola como una ciencia formal, exacta, que estudia diferentes tipos de relaciones. También fueron detectadas la visión instrumental de la matemática y la visión dinámica aunque en menor proporción. La primera se apreció a través de referencias a la matemática como aquella disciplina útil para la vida cotidiana y para otras ciencias. La visión dinámica quedó en evidencia en respuestas que aludían a la matemática vinculándola a los contextos socioculturales en que esta se desarrolla.

Al solicitarle a los estudiantes que presentaran características del conocimiento matemático aportaron expresiones que denotan una visión predominantemente platónica: exacto, abstracto, demostrable, racional, universal, organizado, axiomático. Las visiones instrumentalista (el conocimiento matemático es útil) y dinámica (el conocimiento matemático es infinito) aparecen, como ya se dijo, en forma vestigial.

Cuando a los estudiantes se les pidió que explicaran cómo se origina el conocimiento matemático se observó que una amplia mayoría de las respuestas liga el conocimiento matemático a la actividad humana, con problemas cotidianos a resolver y con la necesidad de explicar fenómenos del mundo que nos rodea. Entendemos que en esta pregunta los estudiantes evidenciaron una visión dinámica de la matemática concibiéndola como un proceso de investigación a través del cual se obtienen resultados que se ubican en un contexto social y cultural.

Las creencias de los estudiantes acerca de cómo se originó el conocimiento matemático resultan inconsistentes con las creencias acerca de la matemática y las características del conocimiento matemático. En este sentido observamos una tensión entre la presencia de lo humano ligado a los orígenes y la ausencia de este factor cuando se trata de explicar qué es la matemática. Si bien las creencias no tienen por qué ser consistentes pues su característica es la de ser conocimientos subjetivos no sustentados desde la racionalidad, nos interesó dejar asentada esta observación ya que nos muestra aspectos específicos a trabajar con los futuros profesores si es que privilegiamos una visión dinámica de la matemática con vistas a su enseñanza.

En este trabajo pusimos especial atención a las reacciones de los estudiantes frente a situaciones de aprendizaje en las que estuvo presente la falibilidad del conocimiento matemático y su naturaleza sociocultural utilizando como medio la historia de la matemática.

En la clase de Fundamentos de la Matemática se trabajó con los aportes de la matemática árabe, particularmente con algunos procedimientos de al-Khwarizmi. Si bien estos procedimientos, hoy en día, podrían ser juzgados como “poco exactos” o “poco matemáticos” fueron muy bien recibidos por parte de los estudiantes para su futura práctica como docentes pues valoraron el entendimiento que facilitan los elementos visuales a la hora de comprender un procedimiento. Entendemos que los estudiantes jerarquizan la comprensión de los conceptos por encima de su mera aplicabilidad desprovista de sentido si bien eficaz. Ya no es solo la eficacia de un procedimiento lo que el estudiante está valorando sino el sentido que este tiene. Apreciamos aquí un giro de la visión instrumentalista a la visión dinámica de la matemática.

En las reacciones inmediatas a la clase de Geometría I, en la que se pretendió mostrar la idea de conocimiento falible a través de un caso concreto referido al número de pentágonos convexos que recubren el plano, observamos que la secuencia no tuvo un gran impacto en estos estudiantes en la medida que no se percibe una reflexión profunda acerca del devenir de las proposiciones matemáticas.

En la clase de Análisis Matemático I los alumnos pudieron vivenciar la evolución de una definición matemática a partir de la presentación de un concepto en diferentes momentos de la historia de su desarrollo. En el cuestionario posterior a la clase los estudiantes reflejaron haber comprendido que los conceptos matemáticos que manejamos actualmente son producto de refinamientos sucesivos y que la racionalidad de una definición en un determinado tiempo se ampara en el registro y naturaleza de los objetos matemáticos de ese tiempo. Según ellos mismos explican, la clase les fue útil para valorar los diferentes registros de representación que pueden utilizarse para facilitar la comprensión de las ideas y para tomar conciencia de la relación existente entre los conocimientos previos de los estudiantes y la naturaleza del concepto en juego que construyen.

Utilizar la historia de la matemática en secuencias de enseñanza en la formación de profesores se perfila como una herramienta útil para favorecer visiones dinámicas de la matemática y para que los futuros profesores extraigan algunas elementos para las prácticas de enseñanza como por ejemplo aquellos que favorecen la comprensión de las ideas, en este caso, el uso de diversos registros de representación o la posibilidad de utilizar aproximaciones a los conceptos en lugar de presentar los conceptos en su forma más depurada, tal como los conocemos hoy en día.

La falibilidad del conocimiento matemático se mostró como una característica difícil de reconocer. Si bien los estudiantes captaron, a través de las secuencias de aprendizaje, la evolución de un determinado concepto o procedimiento, no estuvieron tan disponibles al momento de reportar la idea de conocimiento matemático erróneo o equivocado en cierto tiempo. En consecuencia, este aspecto se convierte en un asunto a tener en cuenta en la formación de profesores, haciéndolo explícito siempre que sea posible. Como varios estudiantes expresaron como características del conocimiento matemático el ser exacto y demostrable, y para definir a la matemática mencionaron, como ya se dijo, a los procesos de validación que le son característicos, quizás el ámbito para presentar la falibilidad del conocimiento matemático, sea el que justamente los alumnos tienen más fortalecido: el de una proposición verdadera y su demostración. Con esto nos referimos a que al trabajar con la demostración matemática, no solo debería abordarse la demostración de proposiciones bien conocidas sino también la exploración e indagación del valor de verdad de proposiciones poco conocidas o no evidentes.

En este trabajo detectamos fundamentalmente creencias platónicas hacia la matemática. Sin embargo, como ya discutimos, al momento de expresar las creencias en relación a los orígenes del conocimiento matemático, la mayor parte de los estudiantes lo ligaron de una u otra forma a "lo humano". Entendemos que este dato nos brinda información muy importante para trabajar hacia la construcción de una visión dinámica de la matemática en la formación de profesores. Si al enseñar matemática en este nivel de formación privilegiamos su presentación ligada a sus orígenes, estaremos capitalizando la posibilidad de verla en contextos sociales, de jerarquizar su origen inminentemente humano para luego llegar a los conceptos tal como los estudiamos hoy en día. Es habitual que en las clases de la formación de profesores, se presenten definiciones o procedimientos matemáticos totalmente refinados, tal como aparecen en los manuales que es habitual utilizar. A veces los profesores apoyan este proceso de estudio con alguna referencia a la historia de la matemática, que se centra fundamentalmente, en menciones a aspectos biográficos de algún matemático (Spivak, 1992). Esto es, trabajan desde lo platónico o instrumental y soslayadamente hacen referencia a lo dinámico. Lo que este estudio sugiere es un trabajo en un sentido totalmente opuesto. Aprovechar la creencia de los alumnos que liga el origen de la matemática a la civilización y lo humano, para presentarla en ese contexto y luego, a través de sucesivos refinamientos, llegar a los conceptos tal como los conocemos hoy en día. Consideramos entonces que las creencias acerca de cómo se origina el conocimiento matemático constituyen un foco de atención, que valoramos a priori de gran potencial, sobre el cual construir la formación de los futuros profesores de matemática.

7. Referencias

Abric, J. C. (2003). L'analyse structurale des représentations. En S. Moscovici (ed.), *Méthodologie des sciences sociales*. Paris: PUF.

Albert, A. (1998). *Introducción a la epistemología en Matemática Educativa*. México: Escuela Normal Superior Veracruzana Dr. Manuel Suárez Trujillo.

Arcavi, A. e Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 111–129. Special issue on the history of mathematics in mathematics education.

Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one´s own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. In A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 365-402). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Barbin, E. (1994). Het belang van de geschiedenis van de wiskunde voor de wiskundige vorming. *Uitwiskeling, 10*, 1–7.

Barbin, E. (1996). The role of problems in the history and teaching of mathematics. En R. Calinger (ed.), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching* (pp. 17–25). Washington: MAA.

Barbin, E. (1997). Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique. *Repères IREM*, *27*, 63–80.

Blanco, L. J. (1996). Aprender a enseñar Matemáticas. Tipos de conocimientos. En J. Giménez, S. Llinares y M. Sánchez (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación* matemática (pp. 199-221). Granada: Comares.

Blanco, L. y Borrallho, A. (1999). Aportaciones a la formación del profesorado desde la investigación en educación matemática. En L. C. Contreras y N. Climent (eds.), *La formación de profesores de matemáticas. Estado de la cuestión y líneas generales* (pp. 131-174). España: Universidad de Huelva.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *13*(1), 59–66.

Clarke, D. y Hollingsworth, H. (1994). Reconceptualising teacher change. En G. Bell, B. Wright, N. Leeson y J. Geake (eds.), *Challenges in Mathematics Education: Constraints on Construction*. *Proceedings of the Seventeenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Volumen I* (pp. 153 – 164). Australia: Southern Cross University.

Charalambous, C., Panaoura, A. y Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes:

insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 161–180.

Conference Board on Mathematical Sciences (CBMS) (2001). *The mathematical education of teachers*. Washington, DC: Author.

Da Cunha Fragoso, W. (2000). Uma abordagem histórica da equaçao do 2º grau. *Revista do Profesor de Matemática, 43*, 20-25.

Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olave, M. (2008). Los estudiantes del primer año de la especialidad matemática: un estudio de sus creencias sobre la matemática y su enseñanza. *Anales del Instituto de Profesores Artigas*, 2ª época, Vol. 2, 349-358. Montevideo: DF y PD.

Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olave, M. (2010). *Una mirada a las prácticas de los formadores de la especialidad matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza*. Investigación en el marco del llamado a docentes investigadores del IPES-DF y PD (no publicado). Montevideo: DF y PD.

De Guzmán, M. (1993). Enseñanza de la matemática. En D. Gil y M. De Guzmán, *Enseñanza de las ciencias y la matemática* (pp. 93-136). España: Editorial Popular.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, *15*(1), 13-33.

Ernest, P. (1994). The history of mathematics and the learning of mathematics: psychological issues. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Volumen I (pp. 117–120). Portugal: University of Lisbon.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3–6.

Fauvel, J. y van Maanen, J. (2000) (eds). *History in Mathematics Education: The ICMI study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fowler, D. (1991). Perils and pitfalls of history. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 15–16.

Fraser, B. y Koop, A. (1978). Teachers' opinion about some teaching material involving history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 9(2), 147–151.

Fried, M. (2008). History of mathematics and the future of matematics education. *Mathematics Education: an ICMI perspective (WG5)*.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 31*(1), 43-51.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 131–143.

Furió, C. (1994). Tendencias actuales en la formación del profesorado de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, *12*(2), 188-199.

García, M., Escudero, I., Llinares, S. y Sánchez, V. (1994). Aprender a enseñar matemáticas. Una experiencia en la formación matemática de los profesores de Primaria*. Épsilon*, *30*, 11-26.

Gardner, M. (1988). *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. Barcelona: Labor.

Gómez, P. (2009). Procesos de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7* (1), 471-498.

Graça, M., Moreira, M., Caballero, C. (2004). Representações sobre a matemática, seu ensino e aprendizagem: um estudo exploratório. *Investigações em Ensino de Ciências, 9*(1), 37-93.

Grattan-Guinness, I. (1973). Not from nowhere, history and philosophy behind mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 4*, 421–453.

Grupo Cero de Valencia (1987). *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas*. Valencia: Mestral Libros.

Gulikers, I. y Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 223–258.

Hildebrandt, S. y Tromba, A. (1990). *Matemática y formas óptimas*. España: Scientific American.

Ho, W. K. (2008). Using history of mathematics in teaching and learning of mathematics in Singapore. *Proceedings of the 1st Raffles International Conference on Education (RICE 2008), 1*, 1-38.

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. España: Nivola.

Koestler, A. (1981). *Los sonámbulos*. México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Larsen S. y Zandieh M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 205-216.

L'Hospital, Marqués de (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México: UNAM.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID-Universidad de Sevilla.

Marcelo, C. (1994). Investigaciones sobre prácticas en los últimos años: qué nos aportan para la mejora cualitativa de las prácticas. *Ponencia presentada al III Symposium Internacional sobre Prácticas Escolares*, Poio.

Meavilla Seguí, V. (2001). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales*. España: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Mellado, V. (1996). Concepciones y prácticas de aula de profesores de ciencias, en formación inicial de primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, *14*(3), 289-302.

Molina, R. y Ranz, D. (2000). *La idea del cosmos*. Barcelona: Paidós.

Moreno, R. (2002). *Omar Jayyam. Poeta y matemático.* España: Nivola.

Moreno, M. y Azcárate, P. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(2), 265-280.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Niccoló Fontana Tartaglia (s. f.). En Wikipedia. Recuperado desde http://es.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia el 5 de diciembre de 2011

Ochoviet, C. y Olave, M. (2009). Los modelos docentes en la formación de profesores de matemática: elementos para repensar los ambientes didácticos. Fondos concursables (no publicado). Montevideo: DFyPD.

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(1), 69-90.

Philippou, G. y Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 189–206.

Pitombeira, J. (2000). Brazil: The concept of function in in-service training. En J. Fauvel y J. Van Maanen (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 137-140). Dordrecht: Kluwer.

Tartaglia, N. (1998). *La Nueva Ciencia*. México: UNAM.

Torrecillas, B. (1999). *Fermat. El mago de los números*. España: Nivola.

Schubring, G. (1988). Historische Begriffsentwicklung und Lernprozeß aus der Sicht neuerer mathematikdidaktischer Konzeptionen (Fehler, 'Obstacles', Transposition). *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *4*(2), 138–148.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Siu, F. K. y Siu, M. K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *10*(4), 561–567.

Solaeche, M. (1993). La controversia L'Hospital-Bernoulli. *Divulgaciones Matemáticas, 1(1)*, 99-104.

Spivak, M. (1992). *Calculus. Cálculo Infinitesimal*. Barcelona: Reverté.

Swafford, J. (1995). Teachers preparation. In I. M. Carl (ed.), *Prospects for school mathematics* (pp. 157-174). Reston, VA: NCTM.

Tzanakis, C. y Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. En J. Fauvel y J. van Maanen (eds.), *History in mathematics education*: *The ICMI Study* (pp. 201–240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Waldegg, G. (1997). Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en Didactique. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 43–46.

ISBN (en línea): 978-9974-91-715-6