Un estudio de los esquemas de argumentación en estudiantes de primer año de profesorado de matemática

Mario Dalcín | Mónica Olave

Departamento de Matemática
Consejo de Formación en Educación

ISBN (en línea): 978-9974-8577-6-6

Primera edición: 2017

Responsables de la edición: Mario Dalcín, Mónica Olave

Diseño de tapa: Cristina Ochoviet

Por consultas o sugerencias: depdematematica@gmail.com

UN ESTUDIO DE LOS ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN EN ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA

Mario Dalcín - Mónica Olave

Departamento de Matemática

Consejo de Formación en Educación

Esta investigación fue desarrollada en el marco del Art. 75.3 del Estatuto del Funcionario Docente (Año Sabático) y aprobado por el CFE en el Acta nº 9, Res. Nº 42, Exp. 5/14626/14.

Índice

1. Introducción

En el ámbito de la matemática la forma de establecer la validez de una proposición es mediante una demostración, entendida esta como una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de enunciados previos (Balacheff, 1998). Esto implica que la demostración es una herramienta central en la construcción de la matemática y motiva la presencia de la demostración como tópico en la enseñanza de esta asignatura tanto a nivel de la enseñanza media como a nivel terciario, en particular en la formación inicial de un docente de matemática de enseñanza media.

Así es recogido en varios de los programas de las asignaturas específicas del currículo del profesorado de matemática. Tomaremos como ejemplo los aspectos referentes a la demostración que son presentados en los programas de las asignaturas específicas de primer año del Profesorado de Matemática[1] público de Uruguay, ya que en esta investigación pondremos nuestro foco de atención en las producciones de los estudiantes que ingresan a esa carrera. Tanto en la fundamentación como en los objetivos de los programas de las asignaturas *Fundamentos de la Matemática* y *Geometría* se puede apreciar la preocupación por este tema, en la medida que se propone:

> Brindar [al estudiante] fundamentos que favorezcan el abordaje y la comprensión de otros conocimientos posteriores y el uso de un lenguaje matemático adecuado, así como también promover y desarrollar capacidades de razonamiento lógico deductivo. (DF y PD, 2008, p. 6)

> …[que los estudiantes] se inicien en la formalización algebraica, y se familiaricen con el método axiomático y la demostración rigurosa. (DF y PD, 2008, p. 6)

[1] El Profesorado de Matemática público en Uruguay tiene alcance nacional, se rige bajo un mismo plan que está vigente desde el año 2008 y se desarrolla en la órbita del Consejo de Formación en Educación.

> … [que el estudiante] incorpore procesos propios del quehacer matemático como la resolución de problemas, el reconocimiento de invariantes, el razonamiento inductivo, analógico y en especial el deductivo, la formulación de definiciones, la elaboración de pruebas y demostraciones, la generalización, la comunicación. (DF y PD, 2008, p. 11)

> …[que los estudiantes] logren usar apropiadamente algunos de los hechos básicos de la teoría de conjuntos y de lógica para la formulación y la demostración de las propiedades más importantes de los sistemas numéricos. (DF y PD, 2008, p. 6)

Consideramos entonces que es necesario conocer cuál es la situación de los estudiantes que ingresan al profesorado para tener elementos en los que basar el diseño de una enseñanza que promueva la concreción de los objetivos que se plantean para estas asignaturas en torno a la demostración.

Por otro lado, la enseñanza de la demostración matemática ocupa un lugar destacado en la investigación en matemática educativa[2] a nivel mundial. En particular, la enseñanza de la geometría euclidiana en bachillerato y de la demostración geométrica han sido objeto de numerosos estudios a nivel internacional. Esta preocupación creciente ha sido motivada (Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2000) por tres razones fundamentales: el fracaso en la enseñanza de la demostración, el reconocimiento de que la actividad de demostrar debe tener en cuenta las ideas de los estudiantes y la aparición de programas computacionales de geometría dinámica.

Si, como lo sugieren los estudios actuales en torno al aprendizaje y enseñanza de la demostración (Hanna y de Villiers, 2012), a la hora de enseñar y aprender la demostración se deben tener en cuenta las ideas de los

---

[2] Tal es así que, desde el año 1996 (ICME 8) se ha mantenido en ICME el grupo de trabajo en torno a la demostración. En Niss (1999) se reconoce a la demostración como uno de los cinco tópicos más relevantes para la investigación en ese momento. Otro indicio de la importancia de la temática podría ser la inclusión de la demostración como tópico independiente en los *Standards and Principles for School Mathematics* (NCTM, 2000). Para hacerse una idea de lo prolífico que ha resultado el campo de estudio basta consultar el *International Newsletter on the Teaching and the Learning of Mathematcial Proof "Proof, Preuve, Prueba"* (www.lettredelapreuve.it/).

estudiantes, se hace necesario conocer cuáles son las ideas que estos manejan en torno al tema y qué tipo de argumentaciones dan frente a actividades de validación matemática.

Proponemos entonces realizar una investigación en torno a la argumentación matemática (aquí pasamos de hablar de demostración a argumentación matemática; estos y otros términos se retoman y precisan más adelante) con estudiantes del primer año de profesorado de matemática que involucren algunos tópicos vinculados a las asignaturas *Fundamentos de la Matemática* y *Geometría*.

Más en específico, nos interesa indagar las producciones de los estudiantes en torno a actividades matemáticas en las que estos se vean en la necesidad de poner en juego sus propios argumentos frente a las actividades propuestas y también explicitar qué argumentos les resultan convincentes a la hora de analizar producciones realizadas por otros estudiantes.

2. Antecedentes

Con el objetivo de precisar los límites y alcances del problema de investigación reportaremos algunos trabajos que por sus objetivos de investigación, metodología empleada o conclusiones a las que arriban, guardan relación con la temática que nos proponemos abordar. Esto nos brindará un panorama general de lo que se ha investigado en torno a este tema en Matemática Educativa y nos permitirá ubicar nuestro proyecto en relación a las investigaciones reportadas y destacar los aportes que pretendemos realizar en el campo.

En la revisión bibliográfica hemos tenido en cuenta investigaciones que involucran estudiantes tanto de bachillerato como de nivel terciario. Esto se debe a que los estudiantes con los que trabajamos, si bien están realizando cursos de nivel terciario, son en general recién egresados de bachillerato. Pensamos que la forma de trabajo de estos se basa mayoritariamente en su experiencia en ese nivel. Otro aspecto que hemos tenido en cuenta para reportar los trabajos es el tipo de actividades propuestas considerando tanto actividades en las que los estudiantes tengan que elaborar argumentos para convencer como aquellas en las que deben reconocer si un argumento presentado les resulta válido o no.

Muchos estudios se han realizado acerca de las concepciones de los estudiantes acerca de cómo se establece la validez de los resultados matemáticos y de la presencia en los estudiantes de esquemas de argumentación externos, empíricos y deductivos. Reportaremos a continuación los que consideramos más relevantes.

Los trabajos de De Villiers (1992) y Mudaly y De Villiers (2000) muestran que más de la mitad de los estudiantes de Bachillerato basan sus conocimientos matemáticos en criterios autoritarios (es cierto porque lo dijo el profesor o porque aparece en el libro) más que en la convicción personal.

Fischbein (1982) investigando cómo los estudiantes distinguían entre demostración empírica y formal, encontró que solo un 14,5% de los estudiantes encuestados fueron capaces de aceptar una demostración desarrollada de acuerdo con un razonamiento estrictamente lógico, sin necesidad de comprobaciones empíricas adicionales.

Martín y Harel (1989), en una investigación sobre esquemas personales de demostración matemática realizada con alumnos de magisterio, encontraron que "... más de la mitad de los estudiantes aceptaban un argumento empírico-inductivo como demostración matemática válida" (p. 41).

Para cada proposición, más de la mitad de los 101 estudiantes aceptaron un argumento inductivo como una prueba matemática válida. El 38% aceptó un argumento deductivo incorrecto como si fuera matemáticamente correcto para la propiedad familiar. Para la propiedad no familiar el 52% aceptó un argumento deductivo incorrecto como si fuera matemáticamente correcto. Alrededor de la tercera parte de los estudiantes aceptó simultáneamente argumentos inductivos y deductivos como argumentos matemáticamente válidos.

Williams (1979, citado en Sekiguchi, 1996), en un estudio hecho con estudiantes canadienses de 16-17 años, encontró que al menos 70% no distingue entre razonamiento inductivo y deductivo y por tanto no comprenden que la inducción no siempre es adecuada para fundamentar las generalizaciones matemáticas; casi 80% no entiende el concepto de contraejemplo; y no encontró evidencia de que distinguieran que una afirmación y su recíproco no son equivalentes.

Por otro lado, los estudiantes no reconocen la necesidad de demostrar lo que consideran obvio (Gonobolin, 1954, citado en De Villiers, 1993; Williams, 1979, citado en Sekiguchi, 1996), en especial si son teoremas que pueden establecerse empíricamente o les resultan visualmente inmediatos. Estudiantes con poco o ningún significado de la demostración son más propensos a considerar argumentos empíricos (Healy y Hoyles, 1999).

En Ibáñez (2002) se reporta una investigación realizada en el ámbito del bachillerato que busca responder, entre otras preguntas, ¿Qué clase de pruebas convencen a nuestros alumnos? ¿Reconocen los alumnos las demostraciones matemáticas?

Tomando el trabajo de Harel y Sowder como marco general adaptan la clasificación de estos a sus necesidades, eliminando las categorías innecesarias e incorporando nuevas de acuerdo a su conveniencia para el estudio. En la investigación se observa que *lo que constituye comprobación y convencimiento* para los alumnos de bachillerato que participaron del estudio no es algo fijo y determinado, sino variable. La variedad se manifiesta en la amplia gama de esquemas de prueba exhibidos por los alumnos, en la abundancia de respuestas, de una misma persona, que presentan rasgos de distintos esquemas de prueba y en el escaso número de alumnos que repiten el mismo esquema de prueba para resolver distintos problemas.
Ibáñez (2002) concluye:

> Los alumnos de este nivel se encuentran en un estado de transición bajo la influencia de distintos esquemas, no siendo plenamente conscientes ni de sus diferencias ni de sus limitaciones; y, por consiguiente, utilizan uno u otro según las peculiaridades de lo que se les propone o, incluso, emplean varios al mismo tiempo. En consecuencia, no parece conveniente –en principio- hablar del esquema de prueba de tal alumno, sino del esquema que ha *utilizado* para resolver un problema determinado. (p. 16)

Fischbein y Kedem (1982, citado en Martin y Harel, 1989) hallaron que muchos estudiantes de bachillerato que estaban convencidos por pruebas deductivas aún necesitaban verificación empírica adicional. Esto sugiere que la activación de los marcos deductivo e inductivo puede ser requerida por parte de los estudiantes para creer una proposición determinada.

Guerrero (2015) realiza un estudio cualitativo con seis estudiantes del segundo semestre de la licenciatura de matemáticas (Universidad de Zacatecas, México) que empezaban el curso de Geometría Moderna en donde las primeras semanas se abordaba la Geometría Euclidiana. Busca analizar la racionalidad de los estudiantes, en particular dar cuenta de lo que ellos valoran al construir su conocimiento, en particular, en lo relativo a los procesos de validación en geometría en situaciones de conflicto cognitivo (este ocurre cuando los estudiantes se confrontan con datos u opiniones que contradicen sus argumentos iniciales).

Sobre las preferencias y formas de proceder respecto a las figuras geométricas de los estudiantes en situaciones de validación, obtuvo los siguientes resultados:

- Los estudiantes conseguían realizar cierta manipulación sobre la figura. Por ejemplo, establecían trazos auxiliares e incluso realizaban ciertas configuraciones sobre la figura. Sin embargo, sus respuestas se apoyaban en las propiedades ostensivas de la figura.
- Los estudiantes recurrían al análisis de casos particulares para validar su respuesta. Por ejemplo, al análisis de las propiedades ostensivas del ejemplo prototipo.
- Los estudiantes lograban construir una cadena deductiva de argumentos, sin embargo en ocasiones se apoyaban en propiedades ostensivas de la figura.

Los estudiantes al enfrentarse al conflicto cognitivo anteponían propiedades ostensivas sobre las propiedades matemáticas y en ocasiones evadían al conflicto debido, entre otras cosas, a que es inusual tanto la situación como la expectativa de que sea resuelta por ellos. Sin embargo, durante los distintos problemas que presentaban conflicto cognitivo, se observó que algunos alumnos comenzaron a realizar nuevas manipulaciones a las figuras.

En Arellano (2013) se reporta una investigación sobre la problemática que enfrentan estudiantes de bachillerato para exponer argumentos que validen sus procesos de razonamiento y solución al resolver un problema matemático. El objetivo de la investigación es identificar y describir los esquemas de prueba presentes en los estudiantes a partir de sus respuestas. Entre las conclusiones a las que arriba destaca que la mayoría de los estudiantes esperan la aprobación del docente ante cada procedimiento que hacen y perciben los problemas como algo para resolver y no para justificar. Aventura que esto es consecuencia de las prácticas escolares. Mayoritariamente no trabajan con generalidades y recurren a casos para validar sus respuestas, bastándoles en muchas oportunidades con un solo caso. Muchos estudiantes no establecen una estrategia general para resolver el problema. Afirma que han aprendido a ir trabajando por pasos resolviendo lo que ven que se puede resolver y, en caso de obtener datos

nuevos a través de ese proceso los dejan de lado o los guardan para ver si más adelante tienen alguna utilidad.
En cuanto a los esquemas de prueba presentes en los estudiantes, el autor detectó los esquemas externo, empírico y deductivo, siendo el externo el que menos aparece. En las dos actividades planteadas se evidencia, en general, distintos esquemas de prueba e incluso sucede lo mismo en una misma actividad.

Martínez Recio (2002) realiza un estudio con 429 estudiantes de primer año de universidad, con alguna asignatura de Matemáticas en el currículum. Como resultado de ese estudio, identifica cuatro tipos básicos de esquemas personales de demostración matemática: argumentación explicativa, argumentación empírico-inductiva, prueba deductiva informal y demostración deductiva formal.

De acuerdo a este estudio un porcentaje importante de estudiantes acude espontáneamente a argumentaciones empírico-inductivas para hacer demostraciones matemáticas. Es decir, como sistema de demostración acude a una comprobación del enunciado en varios casos particulares, con intención de confirmar su cumplimiento de una forma generalizada.

Martínez Recio maneja como hipótesis que la mayoría de estudiantes de nivel universitario puede llegar a aceptar, a partir de las explicaciones del profesor, las demostraciones deductivas formales como formas más elaboradas de demostración, pero en situaciones problemáticas nuevas, en las que tienen que poner en funcionamiento sus modos argumentativos espontáneos, una proporción importante de estudiantes, recurre a esquemas empírico-inductivos.

El porcentaje de estudiantes que resolvieron correctamente cada uno de los dos problemas que les fueron propuestos no alcanzó el 50%. Ese porcentaje se redujo hasta el 32,9 cuando se cuantificaron las respuestas conjuntas de los dos problemas.

Martin y Harel (1989) realizan un estudio con estudiantes de magisterio, en su segundo curso de matemática, donde estos deben juzgar la exactitud de verificaciones inductivas y deductivas de propiedades familiares y no familiares.

Para cada proposición, más de la mitad de los 101 estudiantes aceptaron un argumento inductivo como una prueba matemática válida. El 38% aceptó un argumento deductivo incorrecto como si fuera matemáticamente correcto para la propiedad familiar. Para la propiedad no familiar el 52% aceptó un argumento deductivo incorrecto como si fuera matemáticamente correcto. Alrededor de la tercera parte de los estudiantes aceptó simultáneamente argumentos inductivos y deductivos como argumentos matemáticamente válidos.

Refiriéndose a los argumentos inductivos y deductivos, señalan que la aceptación de argumentos inductivos y deductivos como demostraciones matemáticas se encontró que no eran mutuamente excluyentes. Esto sugiere que el marco inductivo, que se construyó en una etapa anterior al marco deductivo, no es eliminado de la memoria cuando los estudiantes adquieren el marco deductivo. Por otra parte, la experiencia cotidiana de formarse y evaluar situaciones mediante el uso de evidencia para fundamentarlas o refutarlas sirve para fortalecer el marco inductivo. De esta manera, como nuestros resultados lo indican es que los marcos inductivos y deductivos coexisten en muchos estudiantes.

Flores (2007) presenta los resultados de un estudio sobre las prácticas argumentativas de profesores de bachillerato en México, cuando se enfrentan a actividades geométricas de construcción y validación en un ambiente de geometría dinámica. El estudio se hizo a través de un experimento de enseñanza y muestra el desarrollo de dos de los profesores participantes en cuanto a sus esquemas de argumentación y sus prácticas argumentativas. En el experimento de enseñanza se evidencia un uso deficiente del razonamiento deductivo.

En el estudio detecta y propone un *esquema de argumentación fáctico* en el que el profesor hace un recuento de lo que hizo o repite los hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado. A menudo, el profesor expone una serie de pasos como si fueran un algoritmo.

También amplía el *esquema de argumentación simbólico*, donde se utilizan conceptos poco claros o inventados que dan la apariencia de conocimiento con la intención de acercarse a los conocimientos y definiciones que han olvidado.

Los profesores no presentaron esquemas de argumentación autoritarios. Esto se pudo deber a que las actividades del curso estuvieron encaminadas a formar conjeturas y buscar su validación.

En general, los esquemas de argumentación que muestran los profesores, son una combinación de diferentes esquemas; esto muestra que todavía no hay estabilidad, por lo menos en este punto, en los tipos de validación que adoptan los profesores y que tienden a hacerse analíticos.

2.1. A modo de síntesis

Hemos encontrado que en ambos niveles el esquema de argumentación que predomina en los estudiantes es empírico (Fischbein, 1982; Martín y Harel, 1989; Fischbein y Kedem, 1982; Guerrero, 2015; Martínez Recio, 2002). En base a esto pensamos que es muy factible que este esquema esté presente en los estudiantes con los que trabajaremos. También hemos visto que en las investigaciones de Martín y Harel (1989), Ibañez (2002), Arellano (2013) y Flores (2007) se detectaron una variedad de esquemas en los estudiantes tanto cuando trabajan en un mismo problema como cuando lo hacen en distintos problemas. Esto nos puede ser útil a la hora de precisar los esquemas de argumentación en que nos basaremos para nuestro análisis.

Todas las investigaciones reportadas fueron realizadas en otros países y nos aportan un marco de referencia general acerca de los esquemas de argumentación presentes en estudiantes en sus últimos años de bachillerato o primeros años de estudios de nivel terciario.

Si partimos de la base de que entre los objetivos de la enseñanza de la matemática, presentes en los programas de las asignaturas específicas del profesorado de matemática, se plantea acercar a los estudiantes a las formas de hacer, comunicar y validar en matemática, debemos conocer cómo es concebida por nuestros estudiantes para poder, a partir de esa información, generar estrategias de trabajo que hagan posible la ampliación de dicho conocimiento.

Nuestra investigación aportará conocimiento acerca de los esquemas de argumentación presentes en los estudiantes que ingresan al profesorado de matemática. Consideramos que este conocimiento servirá de insumo al colectivo docente de formadores de profesores para tomar decisiones acerca de los cambios a promover en la formación inicial de profesores de matemática de Uruguay.

3. Objetivo

Si entre los objetivos de las asignaturas específicas del profesorado de matemática está el involucrar a los estudiantes en las actividades propias del quehacer matemático, entre las que se encuentran las actividades de argumentar y demostrar, a la hora de enseñar y aprender la demostración se deben tener en cuenta las ideas de los estudiantes. Es así que consideramos se hace necesario conocer cuáles son las ideas que manejan en torno al tema y qué tipo de argumentos pueden ofrecer frente a actividades de validación matemática y qué tipo de argumentos les resultan convincentes a la hora de analizar pruebas realizadas por otros.

Por lo antes expuesto el objetivo de la presente investigación es conocer los *esquemas de argumentación* presentes en estudiantes de primer año de profesorado de matemática del Instituto de Profesores Artigas.

4. Consideraciones teóricas

En este apartado presentamos los referentes teóricos que tendremos en cuenta para esta investigación y el diseño del marco teórico que nos permitirá analizar las producciones de los estudiantes de profesorado de matemática con los que trabajamos y así poder alcanzar nuestro objetivo.

4.1. Precisando términos

La Matemática Educativa, en el abordaje de la problemática en torno a la demostración, ha recurrido a términos como prueba, argumentación, fundamentación, validación, explicación, justificación, razonamiento, razonamiento deductivo, etcétera. De esta manera se amplió la mirada sobre una problemática que bajo el término *demostración* hacía referencia exclusivamente a cuestiones matemáticas.

> Procesos tales como explicar, razonar, argumentar, justificar, validar, inferir, fundamentar, probar, demostrar y sus correspondientes productos: explicaciones, razonamientos, argumentaciones, justificaciones, validaciones, inferencias, fundamentaciones, pruebas y demostraciones representan un vasto conjunto de expresiones utilizadas en la investigación sobre la producción de conocimiento en matemática. (Duarte, 2010, p. 44)

Sumado a esta diversidad de términos, ideas y conceptos a los que ha recurrido o generado la Matemática Educativa, y que posibilitan ciertos solapamientos entre ellos, debemos tener en cuenta los corrimientos y dificultades en la precisión de cada término debidos a la traducción de un idioma a otro.

Precisamos a continuación algunos términos que utilizaremos en la presente investigación.

Balacheff (1998, 2000) entiende explicación, prueba y demostración de la siguiente manera:

Explicación es definida como las razones dadas para los "por qué" y dice que en las explicaciones es la propia racionalidad del sujeto la que establece y garantiza la validez de una proposición.

Prueba es definida como una explicación cuyo fin es establecer la veracidad de un enunciado y que es reconocida y aceptada por un colectivo determinado en un momento dado. "Es una explicación que ha evolucionado mediante un proceso social, trascendiendo al sujeto" (p. 12). Esta puede evolucionar o cambiar con el tiempo y puede ser aceptada por un colectivo y no por otro.

Demostración es una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de enunciados previos. "Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas" (2000, p. 13). La demostración es entendida así como un tipo especial de prueba específica en el campo del conocimiento matemático.

Duval, por su parte, entiende la argumentación de la siguiente manera:

La *argumentación* es la producción de razones que den sustento a una afirmación. Es "una forma de razonamiento natural que no se deja describir ni evaluar según los criterios lógicos clásicos" (Duval, 1999, p. 3). "Es más bien un razonamiento ligado al uso del lenguaje natural que obedece a vínculos de pertinencia y tiene como objetivo el convencimiento de los demás o de sí mismo, siendo por tanto muy cercano a las prácticas discursivas espontáneas" (Arellano, 2013, pp. 12-13).

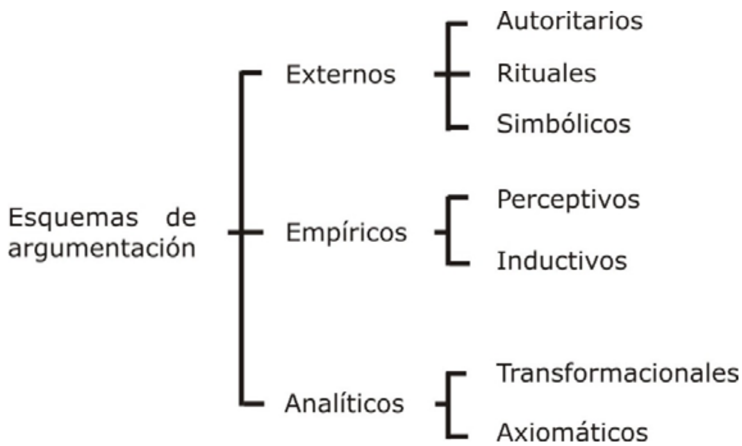
Entendemos que la noción de explicación de Balacheff y la de argumentación de Duval son equivalentes.

4.2. Esquemas de argumentación

Sowder y Harel (1996, 1998) proponen una estructura con la cual pensar sobre las justificaciones de los estudiantes. Introducen el concepto de *esquema de* *argumentación (proof scheme) de una persona* como “lo que constituye el autoconvencimiento y la persuasión para esa persona” (Sowder y Harel, 1998, p. 670). Entendemos que esta noción es equivalente a la de explicación de Balacheff y a la de argumentación de Duval. Es por este motivo que *proof scheme* lo tradujimos como esquema de argumentación y no como esquema de prueba o esquema de demostración. La demostración es el instrumento matemático usado para validar una afirmación y el esquema de argumentación de una persona refiere a la forma que toma el pensamiento de esa persona a la hora de fundamentar una afirmación matemática.

Las distintas categorías de esquemas de argumentación que identifican estos autores representan un estadio cognitivo, una habilidad intelectual en el desarrollo matemático de los estudiantes y son derivadas de las acciones realizadas por los estudiantes en procesos de validación de proposiciones matemáticas. Los esquemas de argumentación son una interpretación sobre estructuras cognitivas de pensamiento desarrolladas por las personas en la dirección de elaborar una demostración. La demostración de una proposición matemática puede pensarse como una serie de pasos lógicos; sin embargo, si pensamos en una persona intentando elaborar una demostración tomamos conciencia que intervienen otros factores más allá de los estrictamente lógicos: averiguar, indagar, convencerse a sí mismo y persuadir.

Estos autores organizan los esquemas de argumentación en tres categorías: esquemas de argumentación externos, esquemas de argumentación empíricos y esquemas de argumentación analíticos, con subcategorías para cada uno, como se puede observar en el siguiente esquema.



Cuadro tomado de Sowder y Harel (1998, p. 671)

Esquemas de argumentación externos. En los esquemas de argumentación externos, tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante puede ofrecer para persuadir a otros tiene una procedencia exterior.

Esquema autoritario. Los estudiantes muestran un esquema de argumentación externo autoritario cuando creen que pueden confiar solo en un libro, una afirmación del profesor, o quizás la confirmación de un compañero de clase más avanzado, para justificar un resultado.

Esquema ritual. Se juzga la exactitud de un argumento solo por la forma del argumento más que por la exactitud del razonamiento involucrado.

Esquema simbólico. Se da cuando los estudiantes consideran los símbolos como teniendo una vida independiente de significado o sin ninguna relación con las situaciones en que surgen.

Esquemas de argumentación empíricos. Los esquemas de argumentación empíricos se dan cuando las justificaciones son hechas solo en base a ejemplos.

Esquema perceptivo. Cuando los estudiantes llegan a conclusiones basados en sus percepciones de uno solo u ocasionalmente varios bosquejos. También se aprecia este esquema de argumentación perceptivo cuando un estudiante trata de convencer a otro mostrándole un dibujo, algo muy frecuente al trabajar en geometría.

Esquema inductivo. Cuando los estudiantes buscan convencerse a sí mismos y a otros evaluando una conjetura a través de uno o más ejemplos.

Esquemas de argumentación teóricos (o analíticos). Estos se dan cuando la justificación está basada en deducciones lógicas.

Esquema de transformación. En la justificación hay una preocupación por los aspectos generales de una situación y se observa un encadenamiento de proposiciones que permiten establecer la conjetura en general.

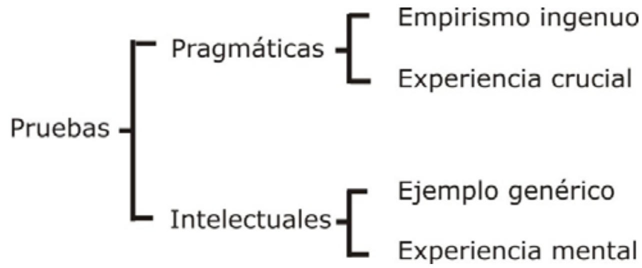
Esquema axiomático. La justificación está hecha en base a cadenas deductivas apoyadas en los elementos de un sistema axiomático.

4.3. Tipos de pruebas

Balacheff (1998, 2000) introduce la noción de *prueba* diferenciándola de la noción de demostración. Concibe a la prueba como una explicación cuyo fin es establecer la veracidad de un enunciado y que es reconocida y aceptada por un colectivo. Esta puede evolucionar o cambiar con el tiempo y puede ser aceptada por un colectivo y no por otro. Utiliza el término *demostración* para hacer referencia a una prueba con una forma particular: una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de los enunciados mencionados. Balacheff propone estudiar la demostración desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los estudiantes en el salón de clase centrando la atención "en cómo llegan los estudiantes a la convicción de la validez de la solución propuesta" (Balacheff, 2000, p. 7).

A partir de un estudio empírico Balacheff (2000) propone una teoría sobre qué deberíamos considerar válido en la clase de matemática, qué pruebas considerar válidas aunque no sean deductivas.

Hace una distinción entre pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales, identificando dos tipos en cada caso.



Cuadro con los tipos de pruebas propuestos por Balacheff (2000) (elaboración propia)

Pruebas pragmáticas. Se basan en el uso de ejemplos, en una acción o en mostrar algo.

Empirismo ingenuo. Consiste en asegurar la validez de un resultado basándose para su verificación en algunos casos. Este tipo de prueba puede ser vista como una forma inicial de generalización.

Experiencia crucial. Basa la validez de un resultado en la verificación de un caso especialmente elegido. Hay un avance en la generalización con respecto al empirismo ingenuo en la medida que esta es reconocida y puesta a prueba en un caso que se reconoce como general o extraño.

Pruebas intelectuales. Se basan en formulaciones abstractas de las propiedades involucradas y en sus relaciones.

Ejemplo genérico. La justificación se basa en operaciones o transformaciones realizadas sobre un ejemplo que es considerado como representante de una clase. Las operaciones o transformaciones se hacen sobre un ejemplo pero entendiendo que se podrían hacer sobre cualquier elemento de la clase.

Experiencia mental. La explicación de las razones que fundamentan la validez de la proposición se basa en un análisis de las propiedades de los objetos en juego. Estas propiedades no pueden ser testificadas por medio de sus representantes sino que deben ser formuladas en su generalidad.

Las acciones son internalizadas y separadas de los ejemplos específicos considerados.

4.4. Una puntualización necesaria

Si bien los trabajos antes mencionados de Sowder y Harel (1996, 1998) y Balacheff (1998, 2000) son iniciáticos y señeros en el sentido de incorporar las producciones de los estudiantes sobre la demostración al ámbito de la Matemática Educativa, debemos tener en cuenta que son de naturaleza distinta: los trabajos de Harel y Sowder "se mantienen dentro de una problemática de la psicología aplicada: atribuyen las respuestas de los alumnos al funcionamiento de esquemas generales de la cognición cuya diferenciación se proponen comprender" (Herbst, 2000, p. 193), mientras que los trabajos de Balacheff son

> una teorización que busca los orígenes cognitivos de la demostración pero que, sin embargo, entiende lo cognitivo no tanto en relación a la cognición individual sino más bien en relación a las prácticas humanas asociadas con el funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la clase. (Herbst, 2000, p. 193)

Consideramos que para el rediseño de la enseñanza de la demostración el trabajo de Balacheff (2000) es insoslayable en la medida que viabiliza una propuesta alternativa a la reducción psicológica o lógica del aprendizaje de la demostración, centrando la atención en las prácticas que se dan en el salón de clase.

> Lo que distingue a estos dos sistemas es el hecho de que el sistema de Balacheff implica una secuencia genética mientras que el de Harel y Sowder no parece estar interesado en dicha secuencia; su punto de vista es más de coexistencia o incluso de competencia entre concepciones de demostraciones y argumentaciones en varios campos de la vida humana (vida cotidiana y otras ciencias). (Cabassut, Conner, İşçimen, Furinghetti, Jahnke, Morselli, 2012, p. 169)

Otra diferencia a destacar en los trabajos de los autores antes mencionados es que los primeros, al realizar su estudio con estudiantes universitarios, desarrollan más los esquemas deductivos, dándole menos importancia a los esquemas empíricos, mientras que Balacheff (2000) presta mayor atención a las pruebas empíricas en la medida que su estudio fue realizado con estudiantes de enseñanza media.

Nuestro estudio, en la medida que no va a observar el funcionamiento de una parte de un curso, ni siquiera de una clase, en torno a actividades matemáticas de demostrar, se orienta en la línea de trabajo de los estudios de Harel y Sowder (1998). Del estudio de Balacheff (2000) nos limitaremos a tener en cuenta la definición de prueba y las características de algunos de sus tipos de pruebas.

4.5. Marco teórico

En el intento de analizar las producciones de los estudiantes es que buscamos unificar las categorías propuestas por Sowder y Harel (1996, 1998) y Balacheff (1998, 2000).

Entendimos que este camino de demarcación de un marco teórico era pertinente en la media que:

Sowder y Harel (1998, en Flores, 2007, p. 69) aclaran el carácter no definitivo de su estudio: "Caracterizamos los resultados de esta investigación como exploratorios. El sistema de esquemas de argumentación descrito aquí debe ser validado por otros investigadores a través de múltiples experimentos de enseñanza realizados por instructores en diferentes instituciones."

Debemos tener en cuenta que los esquemas de argumentación propuestos por Sowder y Harel (1998) son el resultado de un estudio realizado con estudiantes universitarios y las proposiciones que tienen que fundamentar corresponden muchas veces a cursos de álgebra lineal, álgebra abstracta, cálculo, análisis matemático. En el caso de Balacheff (1998, 2000), trabajando con estudiantes de enseñanza media, su estudio se basa en la actividad de establecer un vínculo entre la cantidad de lados de un polígono y el número de diagonales. En ambos casos las observaciones se hacen sobre el desarrollo de cursos.

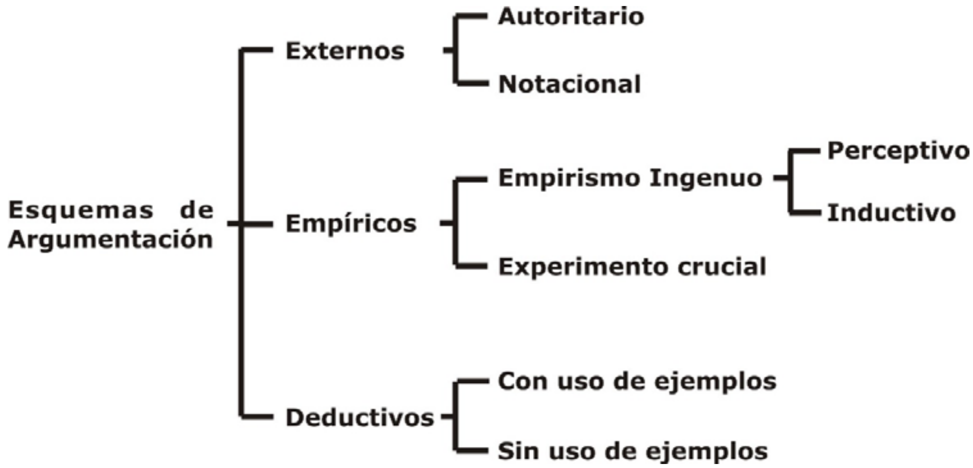
Nuestro estudio difiere en tres aspectos básicos con respecto a los estudios recién mencionados:
i) los estudiantes considerados recién inician su formación como profesores de matemática;
ii) los temas sobre los que se les propusieron actividades están referidos a geometría y aritmética, y
iii) no observamos las producciones de los estudiantes en situación de clase sino en dos momentos puntuales y trabajando individualmente.

Investigaciones como las de Ibáñes (2002) y Marrades y Gutiérrez (2000) reestructuran las clasificaciones de esquemas de argumentación (Sowder y Harel, 1998) y de tipos de pruebas (Balacheff, 1998) de acuerdo a las necesidades y particularidades de sus estudios.

Estas reestructuraciones de las categorías de estos referentes teóricos parecería ser una práctica habitual en la Matemática Educativa como sostienen Cabassut et al. (2012, p. 174): "Los sistemas de categorías tanto de Balacheff (1988) como de Harel y Sowder (1998) han sido aplicados con algunas modificaciones en una serie de estudios empíricos".

Ibañes (2002, p. 13) sostiene que "Por un lado, no precisamos todas las subclases que describen Harel y Sowder, por lo que se suprimen las innecesarias. Y, por otro lado, nos conviene definir nuevas subcategorías…".

De acuerdo a las consideraciones hechas en este capítulo y a las características de nuestro trabajo de investigación, proponemos una clasificación de los esquemas de argumentación, basada en tres categorías básicas –externos, empíricos y deductivos- y sus respectivas subcategorías. Estas se pueden observar en el siguiente esquema:



Cuadro con esquemas de argumentación usados en este estudio (elaboración propia)

La descripción de cada categoría y subcategoría está basada en muchos aspectos de los referentes teóricos descritos en los numerales anteriores. Llegamos a estas categorías y subcategorías luego de un análisis preliminar de las producciones de los estudiantes.

Esquemas de Argumentación Externos

En los esquemas de argumentación externos, tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante puede ofrecer para persuadir a otros tiene una procedencia exterior siendo esta fuente externa el único camino que tienen para justificar un resultado. Esta clase de esquema puede ser causado por el tipo de enseñanza que privilegia los productos acabados y no los procesos que llevan a ese producto. En estos casos es el docente el que tiene un conocimiento para enseñar y presenta a sus estudiantes un conocimiento acabado, el que figura en los libros y el estudiante solo tiene que aprender a reproducirlo de tal forma que se parezca lo más posible a lo que sus docentes les proponen.

Autoritario

En los esquemas de argumentación externos autoritarios los estudiantes confían en lo que dicen los libros, el profesor, un compañero más avanzado o en su memoria. Este esquema lo podemos reconocer en estudiantes que piden que se les diga cómo se hace la actividad que tienen que resolver y no se dan la oportunidad de involucrarse en la tarea. Conciben a la matemática como un conjunto de verdades y muestran poco interés por el origen de esas verdades, parecen no ver la diferencia entre intentar probarlo ellos o que les digan cómo hacerlo. Ante una actividad tratan de buscar en sus apuntes si hay una similar y no se ven a sí mismos como posibles productores de argumentos. Pueden reclamar porque "el método visto en clase no funcionó" o pedir ayuda antes de intentar abordar una actividad. Otros estudiantes pueden intentar involucrarse en una actividad mientras esta no sea declarada teorema por el profesor. Una vez etiquetado como tal, los estudiantes lo ven como una fórmula, algo a lo que hay que obedecer. Otra forma en que se manifiesta este esquema es cuando los estudiantes reformulan con otras palabras lo que hay que demostrar pero sin ir más allá.

Notacional

Los estudiantes confían en la forma de la argumentación más que en la exactitud de la misma y llegan a aceptar pruebas falsas por su apariencia, por su forma. Por ejemplo, estudiantes que preguntan si algo es una prueba o no y dicen "me convence pero tengo dudas de si lo es porque no se parece a una prueba".

Dentro de este esquema también consideraremos las validaciones que se sustentan en la forma simbólica de los argumentos. Los estudiantes consideran a los símbolos con "vida propia", carentes de significado o sin relación con el problema. Usan símbolos sin entender bien su significado. Su principal preocupación es dar una respuesta aunque no entiendan bien de qué se trata.

También se puede reconocer este esquema ante situaciones en las que los estudiantes apenas leen la letra de la propuesta y empiezan a manipular la expresión simbólica involucrada en el problema sin saber hacia dónde van.

También se puede observar en estudiantes que pueden argumentar correctamente la validez de una prueba pero no la consideran tal porque su explicación "no incluye ninguna expresión simbólica", lo que les hace dudar de si es prueba o no. En argumentaciones orales correctas dicen "no sé cómo escribirlo".

Esquemas de Argumentación Empíricos

Este esquema está caracterizado por el uso de ejemplos como el principal elemento de convicción. Los estudiantes conjeturan después de haber observado regularidades en uno o más ejemplos. Utilizan los ejemplos o relaciones observadas en ellos, para justificar la verdad de su conjetura. Cuando la conjetura está incluida en el enunciado de un problema los estudiantes solo tienen que construir ejemplos para comprobar la conjetura y justificarla.

Dentro de las argumentaciones empíricas distinguimos dos clases dependiendo de la forma en que los estudiantes seleccionan los ejemplos: empirismo ingenuo y experimento crucial.

Empirismo Ingenuo

La conjetura se justifica mostrando que es verdadera en uno o varios ejemplos que, por lo general, son elegidos sin un criterio específico. La comprobación puede implicar solamente la percepción visual o medición con instrumentos de ejemplos (*perceptual*) o también puede implicar el uso de elementos matemáticos o relaciones encontradas en el o los ejemplos (*inductivo*).

Experimento Crucial

Dentro de este esquema encontramos aquellas conclusiones que surgen a partir de un caso que el estudiante reconoce tan poco particular como le es posible. La conjetura se justifica al mostrar que es cierta en un ejemplo especialmente elegido por ser un caso extremo. Los estudiantes son concientes de la necesidad de generalización por lo que optan por un ejemplo lo más excéntrico como sea posible aunque no lo consideran como representante de ningún otro caso. Asumen que la conjetura siempre es cierta si se cumple en este ejemplo, la justificación se compone de verificación experimental de la conjetura en el ejemplo seleccionado.

Esquemas de Argumentación Deductivos

Están caracterizados por la descontextualización de los argumentos utilizados. Se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y razonamientos deductivos, todos con el objetivo validar la conjetura de una manera general.

En caso de utilizar ejemplos, estos sirven de ayuda para organizar los argumentos pero las características particulares del ejemplo no se consideran en la justificación.

Dentro de los esquemas de argumentación deductivos, basándonos en si hay selección de ejemplos o no, distinguimos dos subcategorías: deductivos con uso de ejemplos y deductivos sin uso de ejemplos.

Deductivos con uso de ejemplos

Es cuando se utiliza un ejemplo específico para ayudar a organizar la justificación. Por ejemplo, es el caso en que las justificaciones se basan en operaciones mentales que producen una transformación del problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever qué transformaciones son convenientes. Las transformaciones pueden basarse en las imágenes mentales espaciales, las manipulaciones simbólicas o la construcción de objetos. Las justificaciones son secuencias de razonamientos deductivos derivadas de los datos del problema y axiomas, definiciones o teoremas aceptados. El papel de los ejemplos es para ayudar a organizar los pasos de dichas deducciones. También consideramos dentro de este esquema a aquellos razonamientos en los que la justificación se basa en un ejemplo específico visto como un representante característico de su clase, y la justificación incluye hacer explícitas razones abstractas para validar una conjetura por medio de operaciones o transformaciones en el ejemplo. La justificación refiere a propiedades abstractas y elementos o propiedades de la clase representada por el ejemplo. Este tipo de esquema lo podemos ver en el trabajo de Al-Warizmi donde para fundamentar la resolución de un tipo de ecuaciones de segundo grado recurre a una ecuación particular y hace las transformaciones sobre ella pero sobreentendiendo que es aplicable a toda la familia (Moreno Castillo, 2002).

Deductivos sin uso de ejemplos

Es cuando la justificación se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos, solo se mencionan los aspectos genéricos del problema en cuestión. La explicación de las razones que fundamentan la validez de la proposición se basa en un análisis de las propiedades de los objetos en juego. Estas propiedades no pueden ser testificadas por medio de sus representantes sino que deben ser formuladas en su generalidad. Las acciones son internalizadas y separadas de los ejemplos específicos considerados.

5. Consideraciones metodológicas

En este capítulo describimos las acciones realizadas para concretar el objetivo planteado en la investigación. Haremos una descripción de cómo se recolectaron los datos y de los diseños finales de los cuestionarios propuestos. También describiremos con qué estudiantes trabajamos, en qué condiciones fueron propuestos los cuestionarios y el análisis a priori de los mismos.

5.1. Descripción general

Para poder recabar información acerca de qué esquemas de argumentación tienen los estudiantes de primer año de profesorado de matemática realizamos una serie de acciones que pasamos a describir.

1) Explicitamos algunas ideas rectoras para la elaboración de actividades.

2) Elaboramos un primer cuestionario de actividades con intención de involucrar al estudiante en las tareas de conjeturar y argumentar. Este cuestionario fue propuesto en un grupo de primer año –que designaremos grupo B-, en dos horas reloj que nos cedió el profesor de Fundamentos de la Matemática. El número de estudiantes que habían asistido a la clase ese día, a principios de junio, fue 24. El cuestionario fue entregado en formato papel y las producciones de los estudiantes fueron hechas en forma escrita. Al entregar la propuesta se explicó en qué consistía y se les pidió expresamente que dejaran registrado todo lo que habían pensado incluyendo los intentos fallidos. Se dejó claro que la propuesta no tenía fines evaluatorios y que el interés radicaba en observar lo que realmente pensaban respecto de cada una de las actividades.

3) Se realizó un primer análisis de las producciones de los estudiantes, referidas al primer cuestionario. A partir de este primer análisis detectamos que el marco teórico que habíamos considerado no era el más propicio para determinar los esquemas de argumentación de los estudiantes. Teniendo en cuenta lo anterior adecuamos el marco teórico.

4) Elaboramos un segundo cuestionario con dos actividades con la intención de que el estudiante analizara diferentes pruebas referidas a un enunciado y decidiera cuál o cuáles de ellas lo convencían o no.

El cuestionario fue propuesto al grupo B en horas cedidas por el docente de Geometría, en el mes de agosto. De los 24 estudiantes que habían respondido al primer cuestionario solo 12 estaban presentes. Según el docente, muchos estudiantes del grupo habían dejado de concurrir luego de los resultados del primer parcial que había sido realizado en el mes de julio. El cuestionario fue entregado en formato papel y las producciones de los estudiantes fueron realizadas en forma escrita e individual.

Consideramos que las respuestas de los estudiantes a este nuevo cuestionario nos proporcionarían una mirada complementaria del fenómeno que nos permitiría tener una idea más profunda de cómo piensan en referencia a la prueba en matemática. En la medida que un esquema de argumentación de una persona es "lo que constituye el autoconvencimiento y la persuasión para esa persona" (Sowder y Harel, 1998, p. 670), buscamos tener una visión complementaria a la que nos brinda el primer cuestionario, que nos informa acerca de los argumentos de persuasión a través de lo que el estudiante puede ofrecer para convencer a otros. Este segundo cuestionario fue propuesto con el objetivo de detectar qué argumentos convencen al estudiante.

5) Realizamos, en el mes de setiembre, entrevistas a la mayoría de los estudiantes que habían trabajado en los dos cuestionarios antes mencionados. Dichas entrevistas fueron audio-grabadas. Para realizar dichas entrevistas no se estableció un protocolo específico general ya que dependía de lo que cada estudiante había hecho en ambos cuestionarios. El objetivo de las mismas fue el aclarar algunos aspectos que no nos quedaban claros ya sea por tratarse de argumentos incompletos, o ausencia de argumentos o explicaciones contradictorias, entre otras. Por lo tanto para cada estudiante que fue entrevistado se realizó un cuestionario específico pero no estructurado, dejando abierta la posibilidad de preguntas que surgieran del diálogo que se estableciera.

6) La investigación realizada consiste en un estudio de casos y para interpretar los casos se trianguló la información obtenida a través de los diferentes instrumentos elaborados que se detallarán en este capítulo –primer cuestionario, segundo cuestionario y entrevista-. Para cada estudiante que participó en esta investigación se tuvieron en cuenta todos los datos recogidos cruzando la información e interpretándola a la luz del marco teórico.

Una vez analizados en base al marco teórico los datos obtenidos a partir del primer cuestionario, del segundo cuestionario y de la entrevista, creemos que tendremos una visión robusta acerca de las prácticas de los estudiantes a la hora de generar los argumentos a través de las cuales pretenden persuadir a otros y aquellos que convencen a dichos estudiantes al momento de analizar pruebas realizadas por otros. Esta información nos permitirá inferir el o los esquemas de argumentación presentes en cada estudiante de los seleccionados para realizar el estudio de casos.

5.2. Ideas rectoras para la elaboración de actividades

A la hora de diseñar las actividades tuvimos en cuenta las ideas rectoras que mencionamos a continuación.

Nos adscribimos a la concepción de la matemática propuesta por Lakatos (1994) en *Pruebas y refutaciones*:

> … las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones. (p. 20)

Asumimos así que la matemática no es un cuerpo estable de conocimientos sino que evoluciona mediante la tríada conjeturas-pruebas-refutaciones. En la matemática profesional lo central de la atención está puesto en la díada pruebas-refutaciones (Lakatos lo ejemplifica en su libro a través del desarrollo de la relación entre caras, vértices y aristas en un poliedro). Consideramos que el desarrollo de la matemática escolar también puede concebirse mediante la tríada propuesta por Lakatos, pero haciendo hincapié en la díada conjetura-prueba.

> Demostrar es contrastar, poner a prueba los productos de nuestra intuición... Es obvio que no poseemos y probablemente nunca poseeremos ningún criterio de demostración que sea independiente del tiempo, de la cosa que ha de demostrarse o de la persona o escuela de pensamiento que lo emplea. En estas condiciones, lo sensato parece ser el admitir que no hay, generalmente, eso que se llama absoluta verdad (demostración) en matemáticas, piense lo que piense el público. (Wilder, 1944, en Sáenz Castro, 2002, p. 48)

En esta visión de la matemática y de la matemática escolar (que es lo que nos interesa) pasan a jugar un rol importante las intuiciones de los estudiantes, sus propias ideas al enfrentarse a una conjetura y sus propias formas de entender lo que es fundamentar matemáticamente una conjetura.

Todas las actividades diseñadas y propuestas a los estudiantes con los que realizaremos el estudio están planteadas en forma de pregunta. Esto fue hecho así con el objetivo de enfrentarlos a una situación en la que inicialmente tuvieran que tomar una decisión y a posteriori explicitaran los motivos por los cuales dicha decisión había sido tomada.

> Las investigaciones experimentales (Boero et al. 1996; Garuti et al. 1996, 1998; Mariotti, 2008) muestran que la prueba es más "accesible" a los estudiantes si se desarrollan actividades de argumentación para la construcción de una conjetura... Una consecuencia didáctica de este estudio es que los problemas abiertos adecuados (Arsac et al., 1991) que requieren una conjetura podrían ser utilizados para introducir el aprendizaje de la demostración. (Pedemonte, 2007, p. 25)

Este tipo de actividades son explícitamente contrapuestas a las de "Probar que…" tan frecuentes en los textos de matemática usados en formación docente y donde "la enseñanza de la matemática, despoja a los estudiantes de la responsabilidad de considerar la verdad de sus afirmaciones" (Balacheff, 2000, p. 5). "La enseñanza de la demostración basada principalmente en un aprendizaje 'reproductivo' (las demostraciones son simplemente presentadas a los estudiantes, ellos no tienen que construirlas) parece ser infructuosa" (Pedemonte, 2007, p. 25).

En el caso de las actividades de la primera serie propusimos actividades donde formular una conjetura fuera un proceso ineludible antes de pasar a la fundamentación de la misma. Consideramos que este tipo de actividades son más acordes al desarrollo de la matemática como disciplina a lo largo de la historia, donde un resultado antes de ser demostrado necesariamente debió ser conjeturado. La formulación de conjeturas en la enseñanza de la matemática es un proceso que valoramos va junto y de forma inseparable con la elaboración de pruebas: se elabora una prueba para dar razones que fundamenten la certeza o falsedad de una conjetura. Concibiendo así la conjetura y la prueba creemos que cada estudiante tiene la posibilidad de 'hacer matemática' en el mismo sentido que la comunidad matemática, y más en general como la comunidad científica hace ciencia.

En el segundo cuestionario, si bien los estudiantes no tienen que conjeturar, el enunciado de las actividades mantiene el carácter incierto de las mismas dado que tienen que resolver si las pruebas que se les proponen son efectivamente pruebas de las proposiciones o no.

No desconocemos el carácter social de la construcción de los conocimientos y en especial de los conocimientos matemáticos, pero en la medida que nuestro estudio busca detectar los esquemas personales de argumentación de los estudiantes, los enfrentamos a abordar las actividades en forma individual.

Nuestro interés es detectar 'lo que constituye el autoconvencimiento y persuasión' para los estudiantes que ingresan al profesorado de matemática en el Instituto de Profesores Artigas. Para ello optamos por diseñar actividades que colocaran a los estudiantes en una incertidumbre inicial, que el punto de partida de la actividad matemática fuera una situación frente a la cual tuvieran que tomar una decisión y que explicitaran las razones de su decisión.

Otra característica común a las actividades elaboradas es que son actividades relativamente breves, es decir que frente a una argumentación deductiva no tuviera un número muy elevado de pasos deductivos (como en la actividad del pentágono) ni que habilitara a respuestas de un solo paso (como en los casos del lugar de Tales o de la aplicación de Bháskara). En ambos casos las actividades no nos permitirían asegurar producciones de los estudiantes acordes a lo que queremos ver, como sucedió en varias de las actividades que reseñamos en el cuestionario exploratorio. La brevedad en las actividades también fue buscada para que los estudiantes pudieran trabajar sobre las cuatro actividades en la instancia en que se las propusimos.

Las cuestiones propuestas, que se referían a geometría y aritmética, buscamos que no incluyeran resultados cuyas pruebas los estudiantes pudieran conocer de su vida escolar. Con esto buscamos minimizar la presencia de esquemas de argumentación externos autoritarios y obtener respuestas del tipo 'no recuerdo cómo era la demostración'. Si bien podría ser de interés detectar la presencia de este tipo de respuestas, preferimos indagar sobre las fundamentaciones que pudieran hacer los estudiantes por sus propios medios. Esto podría ser de mayor interés a la hora de diseñar futuras tareas en los cursos de Geometría y Fundamentos de la Matemática.

5.3. El primer cuestionario y su análisis a priori

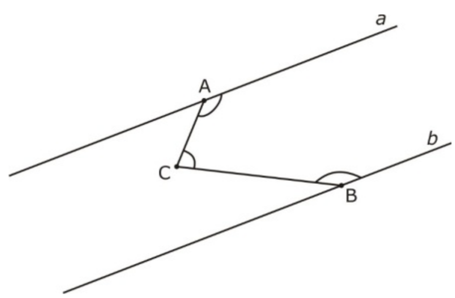
Para el diseño de las actividades incluidas en este primer cuestionario se tuvieron en cuenta los diferentes esquemas de argumentación presentados en el marco teórico en la medida que cada actividad admite una variedad de pruebas que representan dichos esquemas. Por otro lado se pensó en proposiciones que fueran adecuadas a los conocimientos previos de los estudiantes y que, presumiblemente, no se demostraron en los cursos de las asignaturas específicas de primer año. Además se cuidó en la redacción de las actividades no pedir directamente una demostración ni que se presente una prueba de las proposiciones. De esta forma los estudiantes pueden poner en juego sus conocimientos, creencias e intuiciones a la hora de conjeturar y argumentar. Pensamos que esto nos permitirá reconocer los esquemas de argumentación de los estudiantes al enfrentarse a tareas que implican conjeturar y validar dichas conjeturas.

Este cuestionario constó de cuatro preguntas, dos referidas a temas de geometría y dos a temas de aritmética.

Cuestionario 1

Actividad 1
¿Se puede afirmar que "$7n^2 + 3n + 4$ es par" para todo n natural? Fundamenta tu respuesta.

Actividad 2
Las rectas a y b son paralelas. El punto A varía en la recta a, el punto B varía en la recta b y el punto C varía en la franja comprendida entre las rectas a y b.
¿Es constante la suma de los ángulos marcados en la figura al variar los puntos A, B y C?



Actividad 3
$4^2 - 3^2 =$ _____
$5^2 - 4^2 =$ _____
¿Puedes establecer una relación entre cada resultado y las bases de las potencias respectivas? ¿Es una coincidencia?

Actividad 4
¿Existe un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales y con todos sus ángulos distintos? ¿Por qué?

A continuación presentamos el análisis a priori de las actividades contenidas en el cuestionario.

Actividad 1

¿Se puede afirmar que "$7n^2 + 3n + 4$ es par" para todo n natural? Fundamenta tu respuesta.

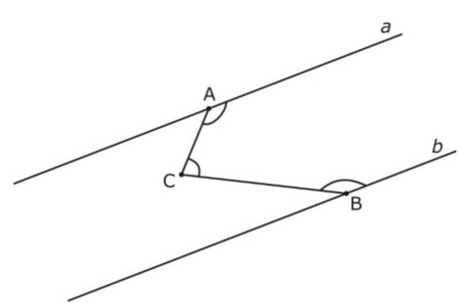
Esta actividad fue propuesta ya que puede ser resuelta de diferentes formas y así dar evidencia del esquema de argumentación de cada estudiante. Además puede implicar una primera instancia de elaboración de una conjetura: ¿es par o no? Puede ser resuelta reelaborando el enunciado planteando y luego utilizar el método de Inducción Completa. En este caso el estudiante estaría presentando un esquema de argumentación deductivo o uno externo de acuerdo a las explicaciones que el estudiante presente. En caso de duda está previsto aclarar la situación en una entrevista. Otra forma de aproximarse a la solución puede ser dando valores a *n* y verificando que el resultado es par. Si los valores elegidos no presentan algún criterio se trataría de un esquema empírico ingenuo –perceptivo o inductivo- y si se elige cuidadosamente el valor se trataría de un esquema empírico experimento crucial.

También se puede abordar distinguiendo entre *n* par o impar y ahí, a partir de propiedades bien conocidas por los estudiantes, concluir la paridad o no del resultado. En este caso estaríamos frente a un esquema deductivo.

Actividad 2

Las rectas *a* y *b* son paralelas. El punto A varía en la recta *a*, el punto B varía en la recta *b* y el punto C varía en la franja comprendida entre las rectas *a* y *b*.

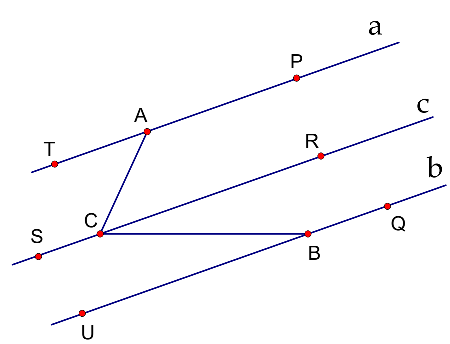
¿Es constante la suma de los ángulos marcados en la figura al variar los puntos A, B y C?



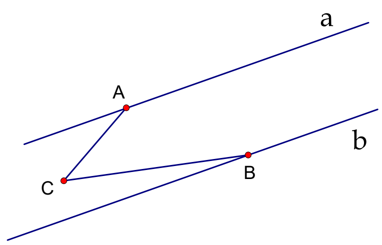
Propusimos esta actividad pues consideramos que podía ser respondida de muchas maneras distintas y eso nos permitiría inferir el esquema de argumentación de cada estudiante frente a esta actividad. Una prueba posible puede consistir en medir los ángulos A, B, C mediante semicírculo y sumarlos.

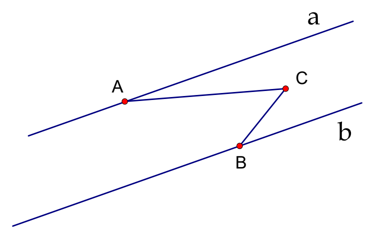
Esta medición puede repetirse para otras posiciones de los puntos A, B y C. Estaríamos así ante un esquema de argumentación empírico inductivo.

Otra posible prueba: trazando una recta *c* paralela a las rectas *a* y *b* por el punto C se puede recurrir a que los ángulos PAC y ACS son iguales por ser alternos internos entre paralelas, en forma análoga establecer la igualdad de los ángulos QBC y SCB. De esta manera A + B + C = ACS + SCB + C = 360º. También recurriendo a la paralela c se puede establecer la igualdad de los ángulos TAC y ACR, CBU y BCR por ser alternos internos entre paralelas. De esta manera A + B + C = A + B + ACR + RCB = = A + TAC + B + CBU = 180º + 180º = 360º. También puede recurrirse a que PAC y ACR, así como RCB y CBQ son conjugados internos entre paralelas y por lo tanto suman 180º y de esta manera concluir que A + B + C suma 360º. Cualquiera de estas tres pruebas revelaría un esquema de argumentación deductivo. Asumimos que el esquema de argumentación del estudiante será deductivo si recurre a estas ideas sin nombrar nuevos puntos para nombrar los ángulos y los deja marcados en la figura y explica los motivos en forma coloquial.

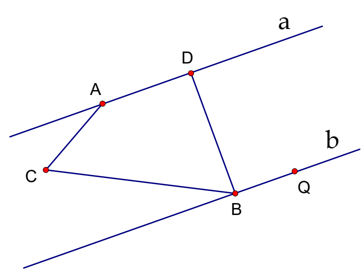


Otra posible prueba puede consistir en aproximar las rectas *a* y *b*, manteniéndolas paralelas, y de esta manera observar que los ángulos A y B tienden a ser llanos (o nulos) y que el ángulo C tiende a ser nulo (o 360º). Estas pruebas mostrarían un esquema de argumentación empírico perceptual.

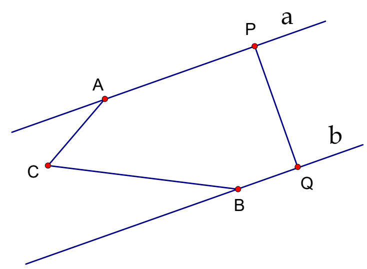




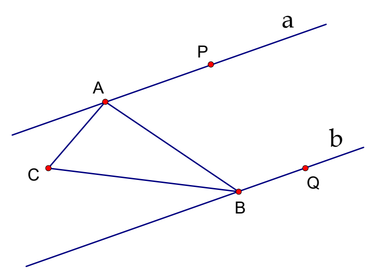
Trazando BD perpendicular a las rectas *a* y *b* se puede observar que los ángulos ADB y DBQ son iguales por ser alternos internos entre paralelas. De esa forma la suma de los ángulos A, B y C es igual a la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD, es decir 360º. Si BD no es perpendicular a *a* y *b* el argumento se mantiene intacto pero suponemos más factible que los estudiantes recurran a considera el caso en que sí es perpendicular en la medida que les resulte más claro ver de esta manera la igualdad de los ángulos alternos internos y también porque la perpendicular ha sido muy usada por ellos en su vida escolar y por tanto es fuente de seguridad, de situación conocida, manejable, imaginable. Estas pruebas, como las siguientes, mostrarían un esquema de argumentación deductivo.



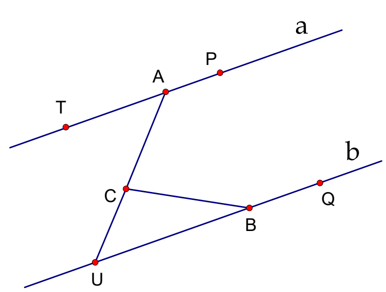
Otra posibilidad de prueba es considerando una perpendicular (u oblicua) PQ de manera que se forme un pentágono ACBQP, cuya suma de ángulos interiores es constante y como la suma de los ángulos P y Q es constante, entonces tendrá que serlo la suma de los ángulos A, B y C. En esta prueba se puede obtener el valor de la suma de los ángulos o probar que dicha suma es constante sin obtener un valor para la suma.



Otra prueba posible es trazando el segmento AB y considerando por un lado la suma de los ángulos interiores del triángulo ABC y por otro la suma de los ángulos PAB y ABQ que son conjugados internos entre paralelas.

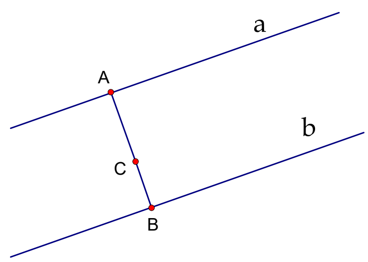


Si se prolonga AC hasta cortar a *b* en U, se forma un triángulo CUB donde la suma de los ángulos CUB y UBC es igual al ángulo C y el ángulo CUB es igual al TAC. TAC + A = 180º, UBC + B = 180º por lo que A + B + C = TAC + A + UBC + B = 360º. Una prueba análoga podría obtenerse prolongando BC.



Estudiantes que elaboraran algunas de estas pruebas revelarían un esquema de argumentación deductivo frente a la actividad.

Considerando A, B, C alineados en una perpendicular a las rectas *a* y *b* puede concluirse que la suma de los ángulos A, B y C es la suma de dos ángulos rectos y uno llano. A partir de esto puede sostenerse que siempre será así. Un estudiante que elabore una prueba como esta estaría reflejando un esquema de argumentación empírico experimento crucial.



Actividad 3

$4^2 - 3^2 =$ _____

$5^2 - 4^2 =$ _____

¿Puedes establecer una relación entre cada resultado y las bases de las potencias respectivas? ¿Es una coincidencia?

Esta actividad implica necesariamente una instancia de formulación de una conjetura. Al hacer los cálculos ($4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$ y $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$) se pueden pensar en distintas conjeturas: los resultados son impares consecutivos, la suma de las bases es el resultado, las bases son naturales consecutivos, entre otras. De acuerdo a las propuestas de conjeturas podemos inferir si se interpretó o no la consigna, qué aspectos son relevantes para cada estudiante, etc. En el caso que la argumentación se base solo en ejemplos y de acuerdo a la forma en que se seleccionen los ejemplos, puede tratarse de un esquema empírico ingenuo o experimento crucial.

Si a partir de los ejemplos se plantea la conjetura en forma simbólica, esto es, $(a + 1)^2 - a^2 = a + 1 + a$ y se realizan transformaciones algebraicas estaríamos frente a un esquema deductivo con uso de ejemplo.

También estaríamos frente a un esquema deductivo si se plantea la igualdad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - \mathrm{b})$, con a mayor que b y consecutivos obteniéndose $a^2 - b^2 = a + b$.

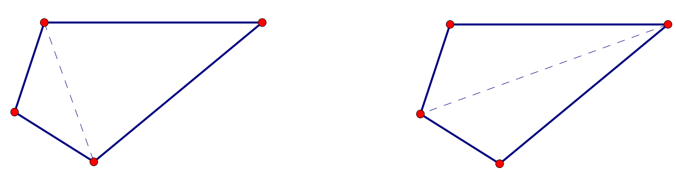
Actividad 4

¿Existe un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales y con todos sus ángulos distintos? ¿Por qué?

Esta actividad fue propuesta teniendo en cuenta que al afirmarse "cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales" habilitaba a más de una interpretación según se considerara que los lados podían repetirse o no. En caso que se interpretara como lados que no se repiten, las pruebas que consideramos podían elaborar los estudiantes fueron las siguientes:

Construir un cuadrilátero teniendo en cuenta la igualdad de los lados y medir con el semicírculo los ángulos y constatar que son iguales. Esta prueba reflejaría un esquema de argumentación empírico.

Dibujar un cuadrilátero teniendo en cuenta la igualdad de los lados, trazar la diagonal que une los vértices de los ángulos iguales y a partir de ahí, usando que triángulos con lados iguales tienen ángulos iguales, concluir que el cuadrilátero tiene un par de ángulos opuestos iguales.

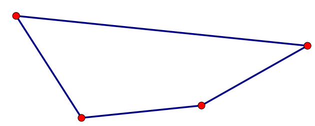


También partiendo de un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales trazar la diagonal que une los vértices comunes de los lados iguales y mediante el tercer criterio de congruencia de triángulos concluir que dos ángulos opuestos son iguales. Estas pruebas reflejarían un esquema de argumentación deductivo.

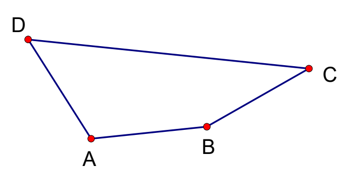
En caso que se interpretara la letra como lados que pueden repetirse consideramos que podrían surgir las siguientes pruebas:

Que se dibujara un cuadrado, un rombo, o ambos y a partir de ello se dijera que tal cuadrilátero no existe en la medida que va a tener cuatro ángulos iguales o dos pares de ángulos opuestos iguales. Esto reflejaría un esquema de argumentación empírico perceptivo.

Otra posibilidad es que se construyera un cuadrilátero con sólo tres lados iguales y basándose en la figura se dijera que los ángulos son distintos porque así se ven. En este caso el esquema de argumentación sería empírico perceptivo. Y si los mide con un semicírculo sería esquema de argumentación perceptivo.



En caso de construir el cuadrilátero indicando los pasos seguidos para conseguirlo, por ejemplo: construir DA, construir el ángulo DAB con una medida prevista, ubicar B de forma que AB = DA, construir el ángulo ABC con una medida prevista, ubicar C de forma que CB = AB, consideraremos responde a un esquema de argumentación deductivo.



5.4. El segundo cuestionario y su análisis a priori

Este segundo cuestionario fue diseñado con el propósito de complementar la visión que nos habíamos ido formando a partir de las producciones de los estudiantes frente al primer cuestionario. Aquí no se trata de enfrentarlos directamente a una actividad matemática para que produzcan argumentos sino de presentarles distintas pruebas de una misma proposición para que las analicen y expliciten cuál o cuáles los convencen y cuáles no. Las diferentes pruebas que se les proponen corresponden a distintas formas de fundamentar que son frecuentes en los estudiantes o que pueden resultarles convincentes. Buscan ser un abanico amplio de pruebas que responden a distintos esquemas de argumentación. Este segundo cuestionario nos brinda la posibilidad de incluir argumentos falsos con una apariencia de demostración matemática acorde a lo que suponemos han visto los estudiantes en su experiencia escolar. También nos permiten incluir demostraciones perfectamente deductivas con una presentación inusual. Consideramos que esto nos permitirá observar si la forma de un argumento influye en su reconocimiento por parte de los estudiantes a la hora de decidir la veracidad o no del argumento.

De las dos proposiciones planteadas en esta ocasión una de ellas había sido propuesta en la primera secuencia. Tomamos esta decisión para ver si esto introducía alguna diferencia en las respuestas de los estudiantes.

Es de resaltar que en este segundo cuestionario se optó por proponerles a los estudiantes que analizaran pruebas elaboradas por otros estudiantes donde se dejaba claro que las proposiciones podían ser verdaderas o falsas ya que en el enunciado se pedía que "fundamentaran sobre el valor de verdad de dos proposiciones".

Cuestionario 2

A un grupo de estudiantes se les pidió que fundamentaran sobre el valor de verdad de dos proposiciones. Para cada una de ellas te presentamos algunas pruebas elaboradas por dichos estudiantes.

Te proponemos que las analices y nos digas:
a) cuál o cuáles de ellas te convencen
b) cuál o cuáles de ellas no te convencen

Explica, en cada caso, por qué realizaste la correspondiente elección.

Proposición 1

La suma de dos números naturales impares es un número par.

Prueba 1

a y b son impares $\Rightarrow$ $a = 2n+1$ y $b = 2n+1$ con $n \in$ N

$$a + b = 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 2 \underset{distributiva}{=} 2\left(2n + 1\right) \Rightarrow a + b \text{ es par}$$

Prueba 2

$$\left.\begin{array}{l} 3+5=8 \\ 7+11=18 \\ 41+23=64 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la suma de dos números impares es siempre par} \ .$$

Prueba 3

15+9 = 14+1 + 8+1 = 14+8+2 = 24
A todo número impar lo podemos escribir como un par más uno. Así tendremos la suma de dos números pares más dos veces uno y el resultado es siempre par.

Prueba 4
Todos los números impares terminan en 1, 3, 5, 7 o 9. Al sumar dos impares, cualquier combinación entre sus últimas cifras dará par. Entonces tendremos como resultado un número que termina en cifra par. Por lo tanto el número resultante es par.

Prueba 5
a y b son impares

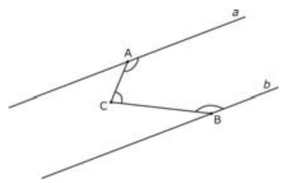
$$a + b = x \Rightarrow \begin{cases} a = x - b \\ b = x - a \end{cases}$$

$$a+b = x-b + x-a = 2x-a-b = 2x - (a+b)$$

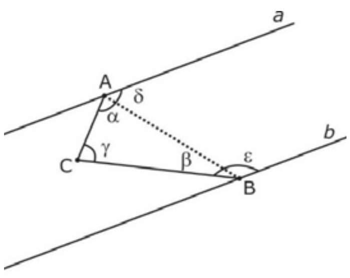
$$\left.\begin{array}{l} 2x - (a + b) \text{ es par} \\ 2x \text{ es par} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \text{ es par}$$

Proposición 2

Las rectas *a* y *b* son paralelas. El punto A varía en la recta *a*, el punto B varía en la recta *b* y el punto C varía en la franja comprendida entre las rectas *a* y *b*.
La suma de los ángulos marcados en la figura, al variar los puntos A, B y C, es constante.



Prueba 1



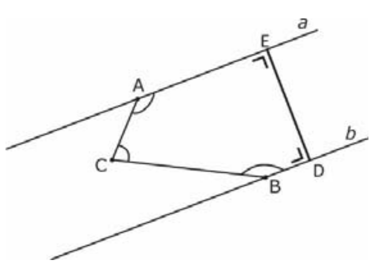
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=(\alpha+\delta)+(\beta+\varepsilon)+\gamma\\ \delta=\beta+\gamma \textit{ por ángulo externo de } \overset{\triangle}{ABC}\\ \varepsilon=\alpha+\gamma \textit{ por ángulo externo de } \overset{\triangle}{ABC}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\alpha+\underbrace{(\beta+\gamma)}_{=\delta}+\beta+\underbrace{(\alpha+\gamma)}_{=\varepsilon}+\gamma=$$

$$=\underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{\substack{=180^\circ \textit{ por ángulos} \\ \textit{interiores de } \overset{\triangle}{ABC}}}+\underbrace{(\beta+\alpha+\gamma)}_{=180^\circ}+\gamma=360^\circ+\gamma$$

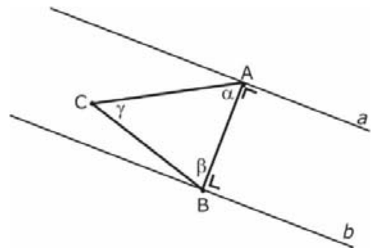
La suma de los ángulos A, B y C no es constante ya que es $360^\circ + \gamma$ y γ es variable.

Prueba 2



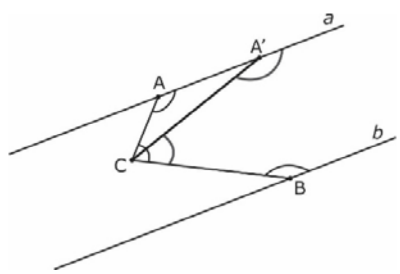
Trazo el segmento ED perpendicular a las rectas a y b. De esta manera se forma el pentágono ACBDE. La suma de los ángulos interiores de los pentágonos es constante y como la suma de los ángulos D y E es constante, puedo concluir que la suma de los ángulos A, B y C es constante.

Prueba 3



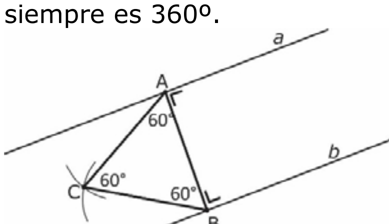
Como los puntos A, B y C son variables puedo considerar A y B de forma que el segmento AB sea perpendicular a las rectas *a* y *b*.
La suma de los ángulos A, B y C es 90º + 90º + (α + β + γ) y como α + β + γ = 180º por ser los ángulos interiores del triángulo ABC, tengo que la suma de los ángulos A, B y C es 360º.

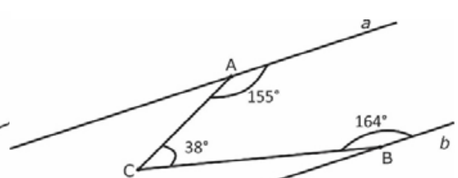
Prueba 4



Dejo fijos los puntos B y C y muevo el punto A.
El ángulo A crece proporcionalmente a lo que decrece el ángulo C. Por lo tanto la suma de los ángulos A, B y C es constante.

Prueba 5
Mido los ángulos A, B y C y me dan 155º, 164º y 38º. Al sumarlos me da 357º lo que me lleva a pensar que mis mediciones deben tener un pequeño error y que la suma de los tres ángulos debe ser 360º. Me construyo la siguiente figura donde confirmo que lo que pensaba era cierto. Así que la suma de los ángulos A, B y C siempre es 360º.





Realizamos ahora el análisis de las cinco pruebas presentadas para la proposición 1:

La suma de dos números naturales impares es un número par.

Prueba 1

a y b son impares $a = 2n+1$ y $b = 2n+1$ con $n \in$ N

$$a + b = 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 2 \underset{distributiva}{=} 2(2n + 1) \Rightarrow a + b \text{ es par}$$

Esta prueba fue incluida con la finalidad de indagar si los estudiantes reconocían en ella una demostración matemática solo por el aspecto que tiene –es decir, incluir notación simbólica y no recurrir a la lengua natural- o si eran capaces de comprender que si bien contemplaba infinitos casos no era una demostración general de la proposición. En el primer caso estaríamos frente a un esquema de argumentación externo y en el segundo a uno deductivo.

Prueba 2

$$\left.\begin{array}{l} 3+5=8 \\ 7+11=18 \\ 41+23=64 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la suma de dos números impares es siempre par}$$

Con la aceptación de esta prueba por parte de alguno o algunos estudiantes pretendíamos identificar un esquema de argumentación empírico inductivo.

Prueba 3

15 + 9 = 14 + 1 + 8 + 1 = 14 + 8 + 2 = 24

A todo número impar lo podemos escribir como un par más uno. Así tendremos la suma de dos números pares más dos veces uno y el resultado es siempre par.

Esta prueba combina la presencia de una serie de igualdades escritas con números y la lengua natural dando cuenta de una generalización de lo que se ejemplifica mediante las igualdades previas. Se busca de esta manera indagar si esta prueba convence o no en su conjunto o si la presencia de un aspecto interfiere en el otro aspecto.

Prueba 4

Todos los números impares terminan en 1, 3, 5, 7 o 9. Al sumar dos impares, cualquier combinación entre sus últimas cifras dará par. Entonces tendremos como resultado un número que termina en cifra par. Por lo tanto el número resultante es par.

Esta prueba, que es una demostración de la proposición donde no interviene notación simbólica, se incluyó para indagar si el lenguaje natural era un factor que influía en su aceptación. Su rechazo nos daría indicios de un esquema de argumentación externo.

Prueba 5

a y *b* son impares

$$a + b = x \Rightarrow \begin{cases} a = x - b \\ b = x - a \end{cases}$$

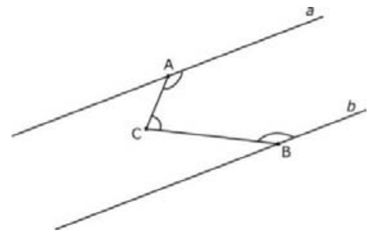
$$a + b = x - b + x - a = 2x - a - b = 2x - (a+b)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - (a + b) \text{ es par} \\ 2x \text{ es par} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \text{ es par}$$

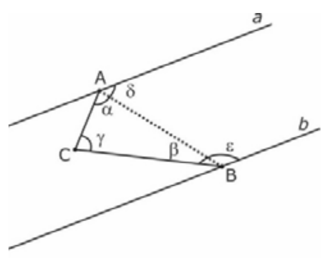
Esta prueba, que usa exclusivamente notación simbólica pero en cadenas sin sentido o siguiendo un camino circular, fue propuesta para averiguar si lo que convence al estudiante es la presencia de la notación simbólica o si un análisis de la misma llevaría a ser considerada no convincente debido a su argumento no concluyente.

Análisis de las cinco pruebas presentadas para la proposición 2:

> Las rectas *a* y *b* son paralelas. El punto A varía en la recta *a*, el punto B varía en la recta *b* y el punto C varía en la franja comprendida entre las rectas *a* y *b*.
> La suma de los ángulos marcados en la figura, al variar los puntos A, B y C, es constante.



Prueba 1



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=(\alpha+\delta)+(\beta+\varepsilon)+\gamma\\ \delta=\beta+\gamma \textit{ por ángulo externo de } \overset{\triangle}{ABC}\\ \varepsilon=\alpha+\gamma \textit{ por ángulo externo de } \overset{\triangle}{ABC}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

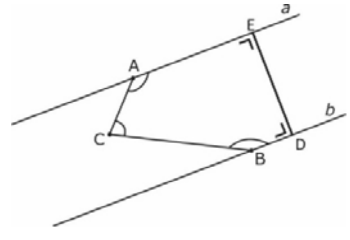
$$\Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\alpha+\underbrace{(\beta+\gamma)}_{=\delta}+\beta+\underbrace{(\alpha+\gamma)}_{=\varepsilon}+\gamma=$$

$$=\underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{\substack{=180^\circ \textit{ por ángulos}\\ \textit{interiores de } \overset{\triangle}{ABC}}}+\underbrace{(\beta+\alpha+\gamma)}_{=180^\circ}+\gamma=360^\circ+\gamma$$

La suma de los ángulos A, B y C no es constante ya que es 360° + γ y γ es variable.

Esta prueba fue propuesta con la intención de indagar si los estudiantes la aceptaban por su apariencia en la medida que incluye notación matemática pero se basa en proposiciones falsas. Esto nos daría indicio de un esquema de argumentación externo. Si un estudiante es capaz de reconocer alguna(s) de las proposiciones falsas en que se basa la prueba sería indicio de un esquema de argumentación deductivo.

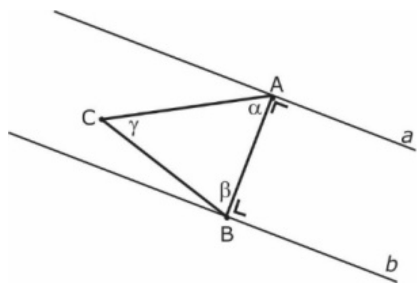
Prueba 2



Trazo el segmento ED perpendicular a las rectas *a* y *b*. De esta manera se forma el pentágono ACBDE. La suma de los ángulos interiores de los pentágonos es constante y como la suma de los ángulos D y E es constante, puedo concluir que la suma de los ángulos A, B y C es constante.

Se incluyó esta prueba, que es una demostración de que la suma de los ángulos A, B y C es constante sin dar el valor de la suma, escrita exclusivamente en lengua natural para ver si esto afectaba su aceptación por parte de los estudiantes.

Prueba 3

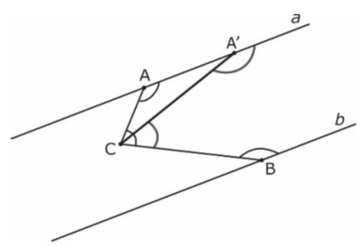


Como los puntos A, B y C son variables puedo considerar A y B de forma que el segmento AB sea perpendicular a las rectas a y b.

La suma de los ángulos A, B y C es 90º + 90º + $(\alpha+\beta+\gamma)$ y como $\alpha+\beta+\gamma$ = 180º por ser los ángulos interiores del triángulo ABC, tengo que la suma de los ángulos A, B y C es 360º.

Esta prueba tiene aspectos generales combinados con aspectos particulares. Lo general está referido a que el triángulo ACB puede ser cualquiera, lo particular se debe a que AB es perpendicular a las rectas *a* y *b*. Su escritura también fue hecha combinando algunos símbolos matemáticos con lengua natural. ¿Convencería como una prueba general? ¿Sería vista como un caso particular? Dependiendo de cuál fuera la respuesta estaríamos ante un esquema de argumentación empírico o deductivo.

Prueba 4

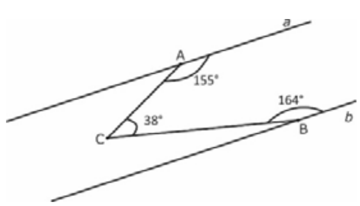


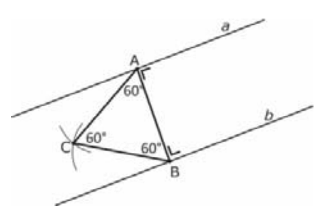
Dejo fijos los puntos B y C y muevo el punto A. El ángulo A crece proporcionalmente a lo que decrece el ángulo C. Por lo tanto la suma de los ángulos A, B y C es constante.

Esta prueba se incluyó con la intención de identificar esquemas de argumentación empíricos perceptivos.

Prueba 5

Mido los ángulos A, B y C y me dan 155º, 164º y 38º. Al sumarlos me da 357º lo que me lleva a pensar que mis mediciones deben tener un pequeño error y que la suma de los tres ángulos debe ser 360º. Me construyo la siguiente figura donde confirmo que lo que pensaba era cierto. Así que la suma de los ángulos A, B y C siempre es 360º.





Esta prueba se propuso con la finalidad de identificar estudiantes con un esquema de argumentación empírico ingenuo.

En el capítulo siguiente describimos los resultados obtenidos del análisis de cada uno de los instrumentos de recolección de datos presentados en este capítulo para cada uno de los estudiantes que formaron parte del estudio, a la luz del marco teórico y metodológico desarrollado.

6. Análisis de los resultados

En este apartado presentamos el análisis de los casos correspondiente a los doce estudiantes que participaron en este trabajo.

6.1. Análisis de casos por estudiante

Alumno 1

Este estudiante está cursando por primera vez Fundamentos y Geometría. El año anterior cursó Cálculo I en Facultad de Ingeniería.

De las cuatro actividades del primer cuestionario solo realiza las actividades 2 y 3. Esto se debe a que llegó tarde el día de la aplicación de este cuestionario.

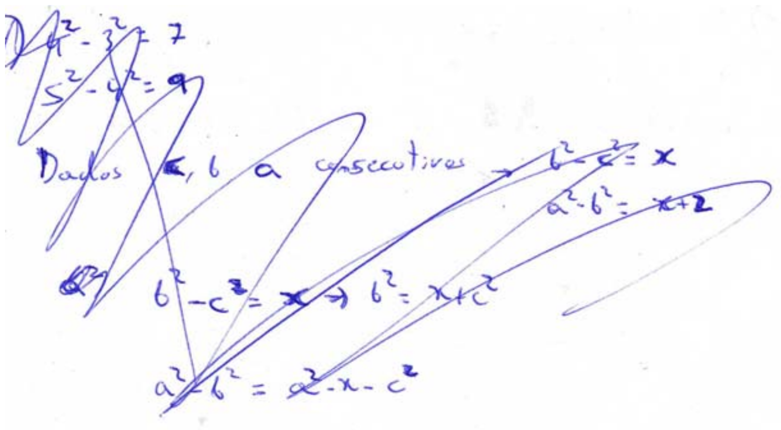
En la actividad 2 los argumentos usados son genéricos y deductivos. Transforma la imagen inicial agregando información –traza un segmento auxiliar, nombra puntos y ángulos- que le permite guiar su cadena de razonamientos. Utiliza propiedades y definiciones explicitando en la mayoría de los casos. La demostración que escribe es clara.

Surge la interrogante si el estudiante ya tenía una respuesta a la pregunta que se le planteaba en el momento de iniciar la demostración. En la entrevista se aclara:

A1: *No tenía idea del resultado. Hice unas figuras en otra hoja [que no entrega] para ver con qué datos contaba.*

Como vemos hay un proceso de buscar clarificar la situación que no se incluye en lo que entrega. Esto parecería indicar que para este estudiante el proceso de aclarar ideas y buscar algunas certezas no forma parte del quehacer matemático, no al menos a la hora de presentar los resultados.

En la actividad 3 ve la relación entre un resultado y el siguiente (difieren en 2) y la relación entre las bases de los primeros miembros (dos números consecutivos). A partir de estas observaciones plantea una serie de expresiones algebraicas que luego manipula pero no llega a elaborar una prueba. Descarta su propio razonamiento ya que lo tacha.



En la entrevista se le pregunta por esta actividad:

A1: *No hice nada*.

E: *¿Cómo que no hiciste nada? Hiciste algo y tachaste. Contanos qué hiciste*.

A1: *Hice las dos cuentas planteadas para ver si llegaba a una relación y después ver si se cumplía en general.*

E: *Lo que planteaste, ¿responde la pregunta que se te hace?*

El estudiante lee la pregunta y dice:

A1: *Ahora veo que la suma de las bases es el resultado.*

En base a lo escrito y lo que dice en la entrevista parecería que el estudiante procede a buscar una relación general sin tener claro qué es lo que se le está preguntando.

E: *Entonces, ¿es una coincidencia?*

A1: *Supongo que no es una coincidencia, pero no lo pude demostrar.*

E: *Ta, no importa. Te lo preguntamos ahora. ¿Desconfiás que es una coincidencia o que no?*

A1: *Bueno, para saber si es una coincidencia o no tendría que hacer un par de ejemplos más y si me da el mismo resultado y trataría de probarlo.*

En la entrevista reconoce que el considerar más ejemplos le daría una idea más clara de lo que está sucediendo. Este no fue su proceder cuando abordó la actividad. ¿Es la visión deductiva de la matemática que lo lleva a descartar el considerar más ejemplos? Su proceder de no considerar más ejemplos ¿estará influenciado por el mandato de los profesores: "los ejemplos no prueban nada"?

E: *¿Por qué tachaste todo?*
A1*: Llegué un poco tarde y no me quedaba claro hasta dónde había que justificar y como no llegué a nada lo taché.*

A pesar de no saber "hasta dónde había que justificar" el estudiante se inclina por mostrar solo lo que está bien y completo, que es seguro será aceptado por cualquiera. Su reclamo nos lleva a tomar conciencia que lo más o menos detallado de una justificación es un acuerdo que se establece en cada curso y con cada profesor. Como el cuestionario fue propuesto al margen de los acuerdos de clase, es comprensible que el estudiante no supiera a qué normas, a qué criterios, atenerse y optara por un criterio exigente.

Destacamos tres aspectos de su proceder: 1) en la actividad 2 si bien recurre a figuras auxiliares para buscar una respuesta a la pregunta que se le formula opta por no incluir dichas figuras en la respuesta, 2) en la actividad 3 no recurre a considerar más ejemplos para obtener una respuesta, 3) en la actividad 3 rechaza todas las ideas que plantea ya que no pudo completar la prueba diciendo "no hice nada".

Esto podría entenderse como una desvalorización del proceso de búsqueda de clarificación y elaboración de conjeturas frente a las pruebas finales elaboradas o por elaborar.

Con respecto al punto 3), si bien entendemos que el estudiante se encontraba en una situación donde podría haberse sentido evaluado, nos preguntamos si esta negación de argumentos que son válidos no puede influir en su criterio para validar y potenciar los argumentos que esgriman sus futuros estudiantes cuando esté al frente de una clase.

De acuerdo al análisis realizado hasta aquí podemos decir que el estudiante A1, frente a la actividad 2 presenta un esquema deductivo sin uso de ejemplos y frente a la actividad 3 el esquema es deductivo sin uso de ejemplos y externo autoritario.

En la entrevista se le preguntó por la prueba 3 de la proposición 1 del cuestionario 2, ya que, por un lado decía que era convincente y, por otro, reclamaba precisión en el lenguaje. Se observó que el estudiante comprende perfectamente el argumento de la prueba y ahora, al explicar qué quiso decir agrega:

A1: *Me convence, entiendo lo que está haciendo si bien no es un punto de vista matemático formal. [...] No pondría esa argumentación en una prueba, en un parcial porque no me parece matemático.*
E: *¿Qué sería un argumento matemático? ¿Cómo te lo imaginás?*
A1: *Si puedo partir de que par más par es par, si puedo asumir eso, puedo escribir un impar como un par más o menos 1, y al otro impar también. Y si sumo par más par me da par y si sumo 1 con 1 me da 2.*
E: *¿Y cómo lo escribirías?*
A1: *Con símbolos... Bah, con símbolos o sin símbolos, si dice lo mismo...*

Aquí deja bien claro que concibe que, a la hora de escribir una prueba, esta debe mantener un formato que necesariamente incluye símbolos, que es el que generalmente se trabaja en las clases de matemática de formación docente y posiblemente en las clases a las que asistió en la Enseñanza Media. Recién al final de la entrevista parecería que el estudiante se percata que el argumento puede ser adecuado ya sea presentado en forma simbólica como verbal.

Si tenemos en cuenta algunos aspectos de lo analizado hasta el momento, podemos percibir que, cuando se trata de presentar una prueba, su visión deductiva también incluye la desvalorización de aspectos que hacen al quehacer matemático: las imágenes y trazados que lo ayudan a razonar y conjeturar, los argumentos que quedan a medio camino, los argumentos escritos en lenguaje coloquial.

Con los nuevos elementos que agrega la entrevista, consideramos que este estudiante tiene un esquema de argumentación deductivo y externo en lo que refiere a la elaboración de pruebas.

Frente al cuestionario 2 el estudiante analiza cada una de las pruebas presentadas para cada proposición catalogándolas de correctas o incorrectas y argumentando por qué, a pesar de que fue otra cosa lo que se le preguntó: si lo convencían o no.

Frente a la proposición 1, no lo convence la prueba 1 porque "parte de dos números naturales impares que en verdad es el mismo", tampoco la prueba 2 porque "no es, en sí, una prueba, sino una generalización", ni la prueba 5 porque en la misma se utiliza como cierto lo que se quiere probar.
Las pruebas que lo convencen (3 y 4) son las que están sustentadas por un razonamiento deductivo, aunque este esté expresado en lenguaje coloquial. En cada una de ellas, más allá de que le resulten convincentes, reclama que es necesario hacer algunas precisiones que hacen a lo esencial de una deducción: que todo esté bien fundamentado y bien definido. En la prueba 3 señala que la misma "obvia la explicación de por qué la suma de dos números pares es par" y en la prueba 4 aclara que "no explica a qué se refiere con decir combinación de sus últimas cifras".
Frente a la proposición 2 lo convence la prueba 2 que se sustenta en un razonamiento deductivo expresado en lenguaje coloquial. No lo convencen las restantes cuatro pruebas ya sea por tratarse de casos particulares o por contener algún paso que considera incorrecto.

En todo este cuestionario parecería que, en general, la forma en que aparecen escritas las pruebas no influye en su consideración acerca de si lo convencen o no. A este estudiante parecen convencerle las pruebas deductivas sin uso de ejemplos, aunque estén presentadas en lenguaje coloquial.

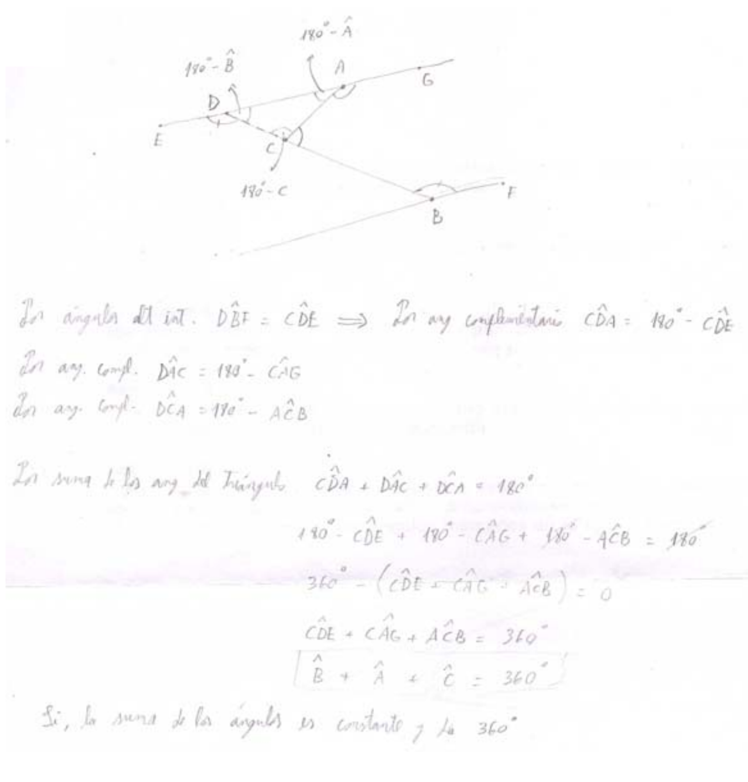
El análisis del segundo cuestionario, cuando se trata de analizar las producciones hechas por otros, este estudiante tiene un esquema de argumentación deductivo.

El esquema de argumentación de este estudiante es deductivo sin uso de ejemplos y hay visos de un esquema de argumentación externo autoritario o notacional.

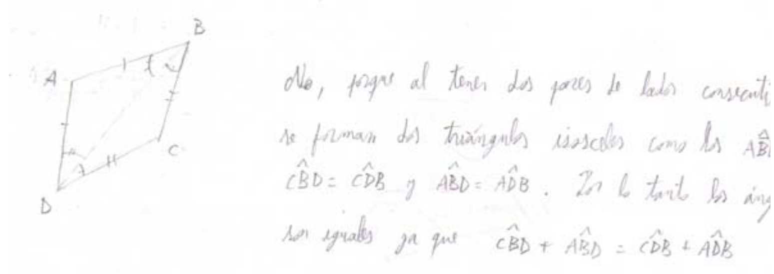
Alumno 2

Cursa ambas asignaturas por primera vez.

En el cuestionario 1 trabaja solo en las actividades 2 y 4 que son las referidas a geometría. En la actividad 2 no conjetura y los argumentos que usa en la demostración son genéricos y deductivos. Transforma la imagen inicial prolongando BC agregando información que le permiten guiar su cadena de razonamientos. Justifica a partir de la información del problema y por medio de propiedades previas que hace explícitas, como podemos ver en la siguiente figura:



En la actividad 4 agrega una diagonal y trabaja con dos triángulos isósceles y realiza una prueba deductiva.



En las actividades 1 y 3, referidas a aritmética, hace intentos que borra. Le preguntamos sobre esto en la entrevista.

A2: *Borré porque probé con algunos números pero no se me ocurrió una demostración.*

E: *¿Y por qué no dejaste escrito lo que habías hecho si lo pedimos explícitamente antes de que empezaran a escribir?*

A2: *Porque los ejemplos no sirven de nada… no demuestran.*

E: *¿Por qué decís que los ejemplos no sirven de nada?*

A2: *Porque hay que demostrar que siempre es así… y a mí no se me ocurrió una demostración.*

E: *Mirá la actividad 3. Los ejemplos que borraste, ¿no te hubieran servido para establecer una relación entre cada resultado y las bases de las potencias?*

A2: *Sí, claro… yo llegué a ver que la suma de estos [señala las bases de las potencias] me daba el resultado pero ¿después qué hacía?*

Para este estudiante solo tiene sentido dejar escrito una demostración completa y parece despreciar la consideración de casos particulares que pueden contribuir a hacerse una idea más clara de la pregunta que busca responder, de la formulación de una conjetura que puede dar paso luego a la elaboración de una prueba o incluso una demostración. Tiene claro qué es y qué no es una demostración deductiva en la medida que es capaz de elaborar dos demostraciones y descartar como no demostraciones los ejemplos que había usado. No obstante, esta claridad parece hacerle ver todo blanco o negro, es demostración o nada, lo que no le permite valorar adecuadamente la consideración de ejemplos como un posible preámbulo productivo a tener en cuenta como parte del trabajo matemático. La visión que tiene incorporada, asumida, este estudiante de la demostración, si bien no parece tener una procedencia externa, sí está influyendo en su accionar frente a una actividad matemática.

Frente a este cuestionario 1 el estudiante presenta un esquema de argumentación deductivo sin uso de ejemplos.

En el cuestionario 2, en las pruebas presentadas para ambas proposiciones no le convencen las pruebas basadas en ejemplos o casos particulares, por ese motivo. Por eso rechaza la prueba 2 de la proposición 1 y las pruebas 3 y 5 de la proposición 2.

No se deja llevar a engaño por la apariencia general y de notación de las pruebas 1 de la proposición 1 y de la prueba 1 de la proposición 2, identificando dónde está el fallo en cada una.

No se expide sobre las pruebas basadas en un argumento deductivo de ambas proposiciones, por lo que le preguntamos sobre esto en la entrevista.

A2: *Esta [señalando la prueba 4 de la proposición 1] me pareció que estaba bien lo que decía pero como no demostraba…*

E: *¿Por qué decís que no demuestra?*

A2: *Porque solo te cuenta.*

E: *Y el cuento, ¿te convence o no?*

A2: *Sí, pero… lo que dice está bien pero no es matemático…*

E: *¿Cómo sería algo matemático?*

A2: *Algo como esta [señala la prueba 1 de la proposición 1] pero con los números distintos.*

E: *Tampoco dijiste nada sobre la prueba 2 de la proposición 2.*

A2: *También… explica pero con palabras, es como el otro [refiriéndose a la prueba 4 de la proposición 1]*

Como vemos no reconoce aquellas pruebas sustentadas en un razonamiento deductivo dadas en lenguaje coloquial. Esto se debe a que no tienen el formato tradicional, ya sea el que aparece en la mayoría de los libros de texto y en la mayoría de las clases de matemática.

Frente a este segundo cuestionario su esquema de razonamiento es deductivo sin uso de ejemplos y externo notacional.

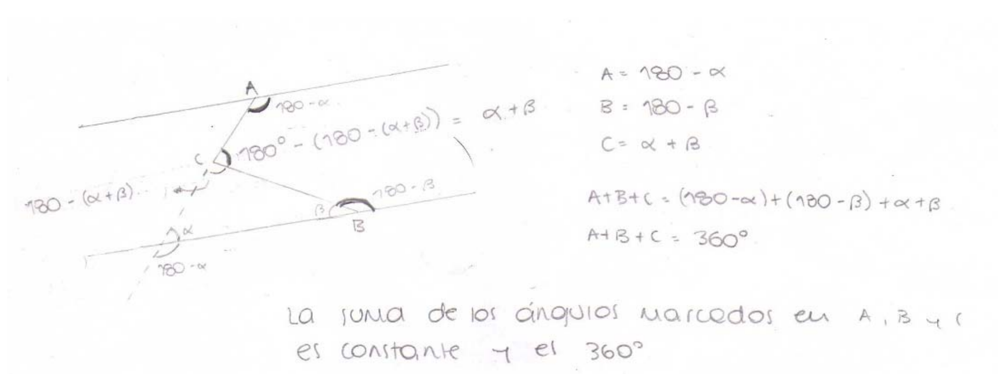
El esquema de argumentación de este estudiante es deductivo sin uso de ejemplos y hay visos de un esquema de argumentación externo notacional.

Alumno 3

Esta estudiante cursa Geometría y Fundamentos por primera vez.

De las cuatro actividades del cuestionario 1 trabaja en la 2, 3 y 4.

En la actividad 2 transforma la imagen inicial prolongando el segmento AC hasta cortar con la recta *b* y formando de esa manera un triángulo. Asigna medidas genéricas a dos de los ángulos formados y calcula los restantes en función de ellos. Esto le permite obtener deductivamente –sin explicitar las propiedades que usa- una respuesta para la actividad.



En la entrevista se le preguntó si antes de comenzar a demostrar sabía si la suma era constante o no y responde:

A3: *No sabía… empecé haciendo eso porque en clase habíamos hecho un ejercicio similar.*

El proceso de hacer la demostración y contestar la pregunta, son simultáneos. La pregunta se responde al finalizar la demostración. El proceso de elaborar la demostración es de alguna manera indagatorio ya que solo al final del proceso, cuando suma los ángulos A, B y C puede obtener una respuesta acerca de si su suma es constante o no.

¿Qué motiva a esta estudiante a prolongar AC? El haber trabajado en clase un problema similar. Este prolongar AC es el punto de partida que le permite la paradójica situación de complejizar la figura y así incorporar nuevos ángulos y esto le permite considerar igualdades entre ángulos correspondientes por ejemplo y así iniciar una serie de deducciones. El agregar algún trazado, en esta actividad, es una condición imprescindible para poder elaborar una prueba deductiva.

Frente a la actividad 3 escribe el resultado de los dos ejemplos que se le proporcionan y a partir de ahí escribe la igualdad $n^2 - (n\text{-}1)^2 = n + n - 1$.

Como no había respondido la pregunta, en la entrevista le preguntamos:

E: *¿Es una coincidencia?*

A3: *Creo que no probé con ninguno más… que no probé con otros números… que hice las cuentas para esos dos casos y observé que la suma de las bases era el resultado.*

E: *Si tuvieras que contestar si es una coincidencia o no, ¿qué dirías?*

A3: *Si pruebo con otros dos números consecutivos y no me dan, entonces es coincidencia. Si demuestro con estos enes [señala la expresión genérica que había escrito en la hoja] que yo planteé entonces no es una coincidencia.*

E: *¿Probarías con los siguientes, es decir con 6 y 5?*

A3: *O con cualquier otro… con 30 y 29 por ejemplo.*

E: *¿Y si se cumple con 30 y 29?*

A3: *No estaría… si se cumple en varios casos tendría que plantear una demostración.*

E: *Y cuando decís “hacer una demostración”, ¿pensás en algo en concreto?*

A3: *... No sé... no sabría cómo hacerlo... bueno, sí, capaz que si haciendo las cuentas... no sé a qué llegaría...*

A partir de la entrevista vemos que la estudiante parece tener claro en qué consiste la actividad de fundamentar en matemática: que alcanza un ejemplo para probar que una proposición es falsa y que es necesario una demostración para sostener matemáticamente que una proposición es verdadera. Lo que explicita es que no se le ocurre en qué podría consistir esa demostración. Todo esto nos confirma además que la expresión que indujo a partir de los ejemplos fue una generalización de lo que observó en los dos casos que se le daban pero que esta expresión algebraica no fue hecha con fines de hacer una demostración sino solo de captar en una expresión todos los casos que sugería la pregunta.

A pesar de que tiene claro qué es y qué no es una demostración, lo que mejor puede ofrecer por sus propios medios es una generalización. Concluimos que frente a esta actividad la estudiante presenta un esquema de argumentación empírico inductivo.

Frente a la actividad 4 escribe: "Si tiene dos pares de lados consecutivos iguales, entonces los cuatro lados van a ser iguales, por lo tanto va a tener dos pares de ángulos opuestos iguales."

La respuesta pone en evidencia que la estudiante está razonando en base a dos figuras que aparecen en su mente como las que cumplen las condiciones dadas en el problema: rombo y cuadrado. No está considerando otras posibles configuraciones que cumplan las condiciones del problema. Las propiedades de los dos cuadriláteros que considera, ¿son tan obvias y evidentes que no ameritan una justificación? Llama la atención que la estudiante redacta su respuesta siguiendo un formato "si… entonces…" pero no se ve en la necesidad de dar más justificación para ello que su propia respuesta. ¿Se deberá esto a lo obvio de la situación en el caso del rombo y del cuadrado?

Frente a esta actividad consideramos que presenta un esquema de argumentación empírico perceptivo.

A la hora de elaborar fundamentaciones presenta un esquema de argumentación empírico perceptivo e inductivo y deductivo sin uso de ejemplos.

En el cuestionario 2, frente a la proposición 1, la convencen los argumentos esgrimidos en las pruebas 3 y 4, pero le resulta "más fácil de ver" la tercera prueba. Reconoce a las otras pruebas como falsas ya sea por tratarse de casos particulares (pruebas 1 y 2) o por falta de justificación (prueba 5). Las pruebas que la convencen, a pesar de estar escritas en lenguaje coloquial –que no suele ser lo habitual en clase-son las deductivas.

Frente a la proposición 2, no la convence la prueba 1 ya que "no busca demostrar que la proposición es verdadera, por lo tanto debería haber mostrado un ejemplo en donde no se cumpliera…". Ante esta afirmación parece creer que para probar que algo es falso la única manera de hacerlo es mostrar un contraejemplo. Nos preguntamos si este argumento responde a una exigencia externa. Por tal motivo en la entrevista le preguntamos:

E: *¿Por qué para demostrar que es falso hay que mostrar un contraejemplo?*
A3: *Si no era cierta tenía que haber puesto un ejemplo que no se cumpliera… con eso hemos trabajado siempre, que si es falso ponés un contraejemplo y si es verdadero lo demostrás… Si iba a poner que no, tenía que poner un ejemplo…*
E: *¿De dónde sacaste eso?*
A3: *En clase nos dicen…*
E: *En el momento que respondías el cuestionario, ¿llegaste a leer bien toda la prueba 1?*
A3: *Sí, leí, y no entendí mucho, pero cuando llegué al final ví que llegaba a que la suma no es constante y me dije ¿para qué leí todo esto si tenía que haber puesto un contraejemplo? No busca demostrar que es verdadero.*
E: *¿Por qué tiene que demostrar que es verdadero?*
A3: *Lo que se le pide es ver si la suma de los tres ángulos es constante o no. La forma en que demuestra que no es, no es la que debe ser.*

Queda confirmado que esta estudiante tiene incorporada la creencia que la única manera de demostrar que una proposición es falsa es mediante un contraejemplo. También queda explicitado que la creencia de esta estudiante responde a una exigencia de sus profesores.

Reconoce a las otras pruebas como falsas ya sea por tratarse de casos particulares (pruebas 3 y 5) o por falta de justificación (prueba 4).

En la prueba 2, que es la única que es deductiva, identifica que está faltando un caso –"el de la prueba 3 donde A coincide con E y B con D, ya que la figura formada no sería un pentágono y por tanto dicha explicación no sería efectiva." La estudiante está reconociendo la validez del argumento deductivo de la prueba 2 en los casos que se forma pentágono. Su rechazo se debe a que está considerando que hay otras configuraciones posibles que la prueba no estaría cubriendo.

Frente a la respuesta dada a la prueba 2 nos interesó saber si la estudiante estaba entendiendo que siempre se podía trazar el segmento ED de manera que se formara un pentágono.

E: *¿ED es fija para vos?*
A3: *No, la podés cambiar de lugar y si ponés en la posición en que B coincide con D queda un cuadrilátero y ya no funciona el argumento.*
E: *¿Y si tenés la figura [se le muestra la figura inicial] se puede construir ese segmento ED de manera que quede pentágono?*
A3: *No.*

Confirmamos, a partir de la entrevista, que la estudiante no concibe la posibilidad de construir el segmento ED en base a la conveniencia de obtener un pentágono y parecería más bien que el segmento ED y los puntos A, B, C debe considerarlos en otras situaciones, por ejemplo, determinando un cuadrilátero o un triángulo.

La necesidad de la estudiante de considerar distintos casos, ¿tendrá algún vínculo con el tratamiento en clase de demostraciones que implican la consideración de distintos casos y la insistencia de los profesores en tener cuidado en considerar todos los casos?

Frente al cuestionario 2 consideramos que la estudiante tiene un esquema de argumentación deductivo con y sin uso de ejemplos y externo autoritario.

El esquema de argumentación de esta estudiante es centralmente deductivo y hay visos tanto de esquemas de argumentación empírico perceptivo e inductivo como externo autoritario.

Alumno 4

Cursa Fundamentos y Geometría por primera vez.

En el cuestionario 1, frente a la actividad 1 escribe que es verdadera pero sin argumentar. Se ve que trabajó pero borra todo lo que hizo. Esto nos llevó a preguntarle en la entrevista:

E: *En esta actividad escribiste algo y borraste, ¿por qué?*
A4: *Sí, probé con ejemplos y me dio, obvio. Y cuando la quise escribir no me salió formalmente, entonces borré.*
E: *Y probar con ejemplos, ¿no vale?*
A4: *Y... no es formal. Puede que se cumpla para los números que yo verifiqué pero puede haber otros que no verifican.*

La estudiante tiene claro en qué consiste una demostración. Sabiendo que no había elaborado una demostración para la actividad asume que lo que pensó carece de valor. Los procesos que pueden conducir finalmente a elaborar una prueba no son valorados por esta estudiante. Lo único que parece tener valor para ella es el producto final: la demostración terminada, completa. Esto puede ser el reflejo de lo que se vive comúnmente en las aulas de matemática, sobre todo en bachillerato y nivel terciario.

En la actividad 2 conjetura en base a mediciones con semi-círculo en dos casos concretos que no tienen nada especial. Esto le permite convencerse que la suma de los ángulos es 360°. A continuación demuestra en forma deductiva.

En la actividad 3, a partir de los dos ejemplos que se le brindan induce una expresión general, como se muestra a continuación:

AB ≠ DC (¬ (ABC ≠ CBA

$$\left.\begin{array}{l} 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = \underset{\text{base}}{4} + \underset{\text{base}}{3} \\ 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = \underset{\text{base}}{5} + \underset{\text{base}}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = a + b$$

Pero es coincidencia

Contraejemplo de $a^2+b^2=a+b$:

$$8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60 \neq 8+2$$

Como podemos observar, por un lado no tiene en cuenta que las bases de las potencias son números consecutivos, por otro, suma las potencias en vez de restarlas, aunque en lo que sigue está pensando en una resta. Demuestra que su conjetura es falsa mediante un contraejemplo.

En la actividad 4 elabora una demostración recurriendo a dos triángulos isósceles. Es de destacar que presenta una figura donde marca lados iguales cuando en la figura no lo son.

E: *¿Por qué borraste la figura inicial que hiciste? [Consistía en una cometa.]*
A4: *Porque si lo hago muy perfectito me confundo y empiezo a anotar propiedades que me parecen verdaderas que por ahí no se verifican…*

Con la respuesta de la estudiante queda claro que la figura finalmente construida por ella fue intencionalmente hecha así para que en la elaboración de su demostración no incluyera propiedades "visuales" no deseadas. La figura hecha al principio seguramente permitía "ver" simultáneamente la igualdad de las parejas de lados y de un par de ángulos opuestos. Consciente que una figura de tales características puede promover una respuesta empírica o que puede llevar a confusión haciendo que se tomen como propiedades algunas particularidades que se están viendo, es que la estudiante ex profeso opta por una figura que podríamos llamar de análisis. Hay una conciencia en esta estudiante que la figura responde a las condiciones iniciales (dos pares de lados consecutivos iguales) que se le dan en el enunciado y que la igualdad de los ángulos opuestos debe extraerse de dichas condiciones iniciales y no de la figura. Esta estudiante parece conducirse en el trabajo geométrico siguiendo la máxima atribuida a Poincaré: La geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas.

Consideramos que el esquema de argumentación de esta estudiante frente a las actividades de este cuestionario 1 es deductivo con y sin uso de ejemplos con algún rasgo externo autoritario.

Frente al cuestionario 2, en la proposición 1, reconoce como convincentes las pruebas 3 y 4, que son las que están sustentadas en un razonamiento deductivo. Rechaza la prueba 1 por tecnicismos (hay un entonces que no está justificado) pero no reconoce que no se toman en cuenta todos los casos. Está identificando la prueba como deductiva y lo que reclama es mayor justificación. El formato en que se presenta esta prueba, ¿estará influyendo en su aceptación parcial de la misma? Las pruebas 2 y 5 las rechaza por tratarse de casos particulares o por falta de justificación.

En la proposición 2, reconoce la prueba 2, que es deductiva, como convincente, "siempre y cuando demuestre que la suma de los ángulos internos de un pentágono es constante". Reconoce que la prueba es deductiva a condición de que se demuestre la propiedad en que se basa. En la entrevista reconoce saber que la suma de los ángulos interiores de un pentágono es constante.

E: *¿La suma de los ángulos interiores de un pentágono es constante?*
A4: *Si.*
E: *¿Y podrías demostrarlo?*
A4: *Sí, trazo diagonales y se forman tres triángulos, así que la suma es 180 x 3.*
E: *¿Y por qué condicionás la validez de la prueba a la demostración de eso?*
A4: *Porque si no, no está completo. Hay que demostrar todo.*
E: *Pero para vos, ¿ya no estaba claro?*
A4: *Sí, pero me lo piden…*

La exigencia de la estudiante parece tener su origen en las exigencias que se imponen en nuestras aulas. El hasta dónde demostrar no es una necesidad genuina de la estudiante sino que es incorporada por ella por una imposición externa.

No la convencen las pruebas 3 y 5 por tratarse de casos particulares. Tampoco la convence la prueba 4: aunque el argumento le resulte "súper razonable" dice que "no lo demuestra ni siquiera con ejemplos".

La estudiante reconoce la virtud de un argumento deductivo para uno o unos casos particulares, en la medida que hacen que "la demostración valga y sea cierta para esos casos". En este sentido parecería que valora el argumento de la prueba 4, que pretende ser general, como el más matemáticamente pobre en la medida que ni siquiera se dan argumentos deductivos para algún caso.

En la prueba 1 reconoce los argumentos erróneos que la llevan a rechazarla. Esto ya sería una condición suficiente para rechazar esta prueba. No obstante, llama la atención que la estudiante dice: "si la letra afirma que la suma es constante, el alumno debe darse cuenta que si llegó a que la suma en cuestión no es constante, su razonamiento es erróneo". De esta afirmación podemos inferir que la estudiante asume que la veracidad de una proposición viene incluida en su enunciado. En la entrevista le preguntamos acerca de la afirmación antes mencionada.

A4: *Si vas a demostrar tenés que llegar a lo que dice la afirmación.*
E: *Y si te digo esta proposición: el opuesto del opuesto es el opuesto.*
A4: *Esperá que así en el aire se me complica, dejá que agarre una lapicera… [Escribe el 2 y piensa en opuesto y opuesto de opuesto en ese caso y responde.] No te creo.*
E: *¿Qué dirías de la proposición?*
A4: *Que es falsa… Capaz que el alumno pensó que la proposición era falsa...*
E: *Quizás… pero vos ¿qué pensás?*
A4: *En esta prueba me parece que la idea de ustedes no era plantear algo que no era cierto y que nosotros nos enfocáramos en demostrar eso sabiendo que no era cierto… Yo en una prueba creo en lo que está diciendo el profesor.*

Podemos sacar en claro que esta estudiante piensa que las proposiciones que se proponen en una prueba tienen que ser verdaderas. Esto se condice con la forma en que se presentan las actividades de demostrar y los teoremas en clase: "demuestra que…" y "teorema". Las proposiciones que tienen el estatus de teoremas en la matemática son verdaderas. Las actividades del tipo “demuestra que...” por lo general son de proposiciones verdaderas.

Identificamos en esta estudiante una razón de procedencia externa que le estaría impidiendo valorar la validez o no de una prueba por la forma en que está dado su enunciado.

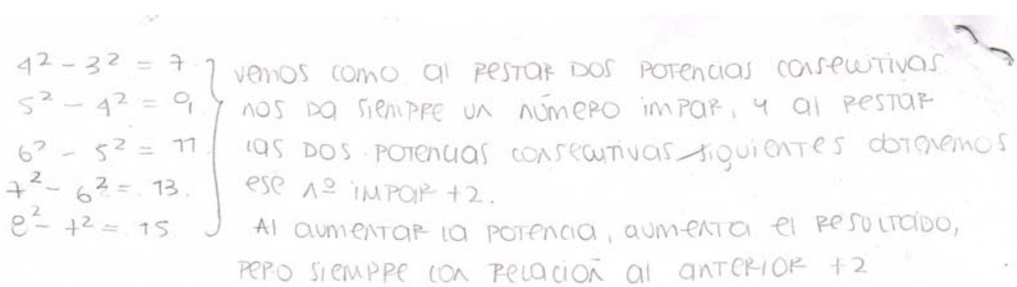
Frente al cuestionario 2 podemos decir que la estudiante presenta un esquema de argumentación deductivo sin uso de ejemplos y externo autoritario.

El esquema de argumentación de esta estudiante es deductivo sin uso de ejemplos y externo autoritario.

Alumno 5

Esta estudiante cursa Geometría y Fundamentos por primera vez.

En el cuestionario 1 trabaja en las cuatro actividades. En las actividades 1 y 3, que involucran relaciones aritméticas, sustituye las variables por distintos valores y a partir de ahí conjetura y explica lo que “ve”. Parece no necesitar otra justificación además de los ejemplos que proporciona, como podemos ver en su producción frente a la actividad 3.



$4^2 - 3^2 = 7$
$5^2 - 4^2 = 9$
$6^2 - 5^2 = 11$
$7^2 - 6^2 = 13.$
$8^2 - 7^2 = 15$

vemos como al restar dos potencias consecutivas nos da siempre un número impar, y al restar las dos potencias consecutivas siguientes obtenemos ese nº impar +2.
Al aumentar la potencia, aumenta el resultado, pero siempre con relación al anterior +2

Como podemos observar no conjetura acerca de lo que realmente se pide, que es la relación entre las bases de las potencias y el resultado. No parece entender el enunciado.

En las actividades 2 y 4, que son actividades geométricas, nuevamente basa sus argumentaciones en lo que está viendo en las figuras. Si bien esto responde a una argumentación empírica, en la actividad 2 da una explicación que parece ir más allá del caso concreto que muestra la figura: traza el segmento AB y a partir de esto sostiene que "la suma de los ángulos del triángulo siempre será constante (180°), por lo tanto la de la figura ABC también". En la entrevista se le pidió que nos contara cómo había pensado la actividad 2:

A5: *Si tengo el triángulo ABC, no importa donde mueva C los ángulos siempre suman 180 y estos otros [señala los ángulos conjugados internos que determina el segmento AB] no varían.*

Como vemos, aquí no hace referencia a la figura estática sino que su argumento tiene cierta generalidad al hacer variar el punto C y por otro lado esa generalidad no la hace extensiva a los puntos A y B. Su argumento tiene componentes empíricos.

El análisis anterior nos indica que esta estudiante a la hora de generar pruebas tiene un esquema de argumentación empírico perceptivo.

En el cuestionario 2, las pruebas que esta estudiante considera convincentes para cada una de las proposiciones son aquellas que están presentadas en un formato que incluye mucha notación simbólica más allá que en ambos casos sean falsas demostraciones. Al explicar por qué la convencen dice que "está muy bien explicado cada uno de sus pasos y llega al resultado" (proposición 1, prueba 5) y "porque explica todo claramente" (proposición 2, prueba 1).

En este segundo cuestionario parece tener claro que la presentación de unos cuantos casos concretos no constituye una demostración. Esto se contrapone a su forma de argumentar frente al primer cuestionario donde sus pruebas consisten en brindar varios ejemplos.

Podemos decir que esta estudiante se convence por la forma de la prueba y no por los argumentos puestos en juego. No parece reconocer las pruebas erróneas y tampoco las correctas.

A partir del análisis anterior esta estudiante, cuando se trata de analizar argumentos de otros, presenta un esquema de argumentación externo notacional.

El esquema de argumentación de esta estudiante es empírico perceptivo y externo notacional.

Alumno 6

Esta estudiante cursa por primera vez Geometría y está recursando Fundamentos.

De las cuatro actividades del cuestionario 1 realiza las actividades 1 y 2. En la actividad 1 sustituye en la expresión con $n = 3$ y $n = 6$. Luego de comprobar que el resultado es par para estos dos casos borra lo hecho y pasa a considerar el caso general. Esto nos da el indicio de que la estudiante estaría ocultando los argumentos que le permitieron formular su conjetura, como si esta actividad fuera de segunda categoría y no debiera figurar en la producción final. En la entrevista, al preguntarle por qué había borrado nos dice:

A6: *Empecé probando con un par y un impar y me dio.*
E: *¿Y por qué borraste?*
A6: *Porque eso lo hice solo para ver si se cumplía o no.*
E: *De acuerdo, pero ¿por qué no los dejaste escritos?*
A6: *Porque no importan… los ejemplos no demuestran nada...*

El averiguar, indagar, hacerse una idea más clara, acerca de la pregunta formulada no parece verse por esta estudiante en esta actividad, como algo deseable a dejar registrado, lo que sí le importa es el resultado final alcanzado.

Importa el producto final elaborado y no el proceso de elaboración de una conjetura. Es muy probable que en sus cursos pasados y presentes la estudiante no se haya visto enfrentada a situaciones donde tiene que resolver sobre el valor de verdad de una proposición. Los cursos de matemática suelen hacer hincapié en la demostración de proposiciones que ya se le presentan al estudiante como ciertas como en el caso de los teoremas o de las actividades del tipo "demuestre que…".

Aborda el caso general separando en *n* par o impar. Para cada caso analiza la paridad de cada uno de los tres términos de la expresión. Esto lo hace basándose en proposiciones que da por ciertas: par por par es par, par por impar es impar e impar por impar es impar. En un solo caso, además de dar una explicación general ("como *n* es impar, al multiplicar $n.n$ sabemos que todo impar por impar es igual a un número impar") incluye entre paréntesis, y con una escritura más clara, ejemplos: "3.3 = 9, 7.7 = 49, 13.13 = 169, etc."
En este caso parece necesitar –no queda claro si para autoconvencerse o para convencer al lector- recurrir a ejemplos numéricos. El análisis de cada uno de estos términos le sirve como base para concluir acerca de la paridad de la suma de estos tres términos, es decir de la expresión original.

E: *¿Por qué ponés ejemplos en este caso y no en los otros?*
A6: *A ver… En estos otros casos estaba segura de que se cumplía… en este me vino la duda y por eso hice los ejemplos…*
E: *¿Y por qué lo escribiste más clarito?*
A6: *Ta, era para mí, tendría que haberlo borrado.*

La estudiante recurre a ejemplos para estar segura que la propiedad que enuncia se cumple, pero no considera que eso deba quedar registrado en lo que entrega. Vemos aquí indicios de una exigencia externa ya que ella sí los necesita para convencerse pero no es deseable mostrar porque el "otro" de alguna forma lo desvaloriza.

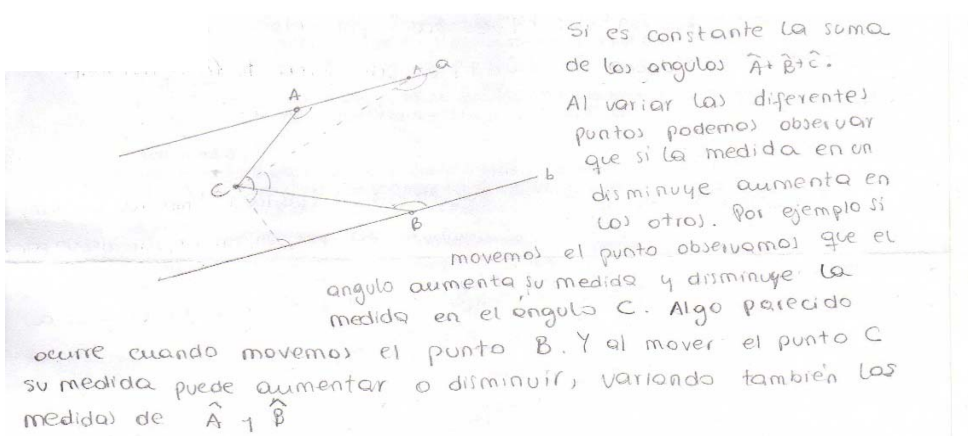
El esquema de argumentación de esta estudiante frente a esta actividad es deductivo sin uso de ejemplos.

En la actividad 2 la estudiante empieza afirmando que la suma de los tres ángulos sí es constante. No se sabe cómo arriba a esa conjetura. A continuación describe cómo está pensando la situación. Nos preguntamos si esa descripción corresponde a una explicación de cómo llega a la conjetura formulada inicialmente o si toma la conjetura como cierta y procede a continuación. Según describe, va haciendo variar los tres puntos pero cada uno por vez. En la figura aparecen dos posiciones distintas para el punto A y dos posiciones distintas para el punto B. Afirma que mientras el ángulo A aumenta el ángulo C disminuye y el tercero queda constante. En forma análoga considera el movimiento del punto B. Al variar el punto C su medida "puede aumentar o disminuir, variando también las medidas de los ángulos A y B". Sus observaciones son correctas, pero dichas observaciones no son correctas para explicar el fenómeno, en la medida que llevan implícita la afirmación "lo que aumenta un ángulo es lo mismo que disminuye el otro".

Si se trata de la explicación de cómo elaboró la conjetura, su esquema de argumentación es empírico. Si en cambio está tomando la conjetura como verdadera, su explicación se transforma en un razonamiento circular y podría entenderse que "uno de los ángulos aumenta lo que el otro disminuye" porque la suma es constante. Si es este el caso, su esquema de argumentación sería externo autoritario dado que estaría reformulando lo que hay que demostrar como si fuera una verdad para ella. Salimos de la duda en la entrevista:

E: *¿Sabías que la suma de los ángulos A, B y C era constante?*

A6: *Sí porque moví el punto A y vi que el ángulo A aumentaba y el ángulo C disminuía lo mismo…*



Su argumento, a partir de la entrevista, queda claro es empírico y lo que escribió fue una descripción de cómo lo pensó. Su esquema de argumentación frente a esta actividad es empírico perceptivo.

A partir de lo analizado en este primer cuestionario el esquema de argumentación de la estudiante es deductivo sin uso de ejemplos y empírico perceptivo.

Frente al cuestionario 2, proposición 1: la prueba 1 es la que más le convence porque "no utiliza números concretos para la demostración". Parece tener claro que, para que sea una demostración, no alcanza con solo proponer ejemplos concretos. Esta argumentación es la que más la convence además porque "a través de una demostración simple se ve generalizado que la proposición es verdadera para todo natural". Esta generalidad le resulta relevante en la medida que "no deja afuera muchos otros casos que pueden no cumplir con la proposición inicial" como cuando se refiere a la prueba 2, que es la que menos le convence. Sin embargo, la estudiante no llega a percatarse de la particularidad que se esconde bajo la apariencia de generalidad de la prueba 1. Es así que parecería estar convenciéndola la forma en la medida que esta argumentación solo valida la suma de dos números impares iguales.

La prueba 4 le "suena convincente" siempre y cuando se pruebe que la combinación de las posibles terminaciones de los impares es par. En este caso, más allá de la forma comprende el razonamiento, aunque dicha forma no suele ser la tradicional en que generalmente se presentan los teoremas.

En la proposición 2 se refiere solo a las pruebas 2 y 3 que son las que la convencen. En la prueba 2 dice "aunque movamos los puntos A, B y C sus ángulos van a variar, disminuyendo o aumentando pero su suma siempre va a ser constante". En la prueba 3, al explicar por qué la convence este argumento explicita que hace variar el segmento AB manteniéndolo perpendicular a las rectas *a* y *b* y de esta manera se mantienen constantes los ángulos rectos y varían los ángulos interiores al triángulo pero manteniendo su suma constante dado que son los ángulos interiores de un triángulo. Al mover el segmento AB está constatando que el argumento es generalizable a infinitos triángulos. A pesar de su esfuerzo consciente de generalizar no llega a percatarse de lo particular de que el segmento AB sea perpendicular a las rectas *a* y *b*.

Lo expresado por esta estudiante frente a las pruebas 2 y 3 de la proposición 2 nos llevan a tomar conciencia de una diferencia en las formas de pensar de un profesor y un estudiante. Cuando el profesor hace uso de una figura, como en las pruebas 2 y 3, está pensando en una familia de infinitas figuras de las cuales las que representó son su representante y el razonamiento que hace sobre ella es naturalmente extensivo y aplicable a todas las figuras de la familia. Cuando un estudiante observa la misma figura que hizo el profesor es posible que esté viendo solo esa figura y no esté viendo la familia que encierra.

En este segundo cuestionario la estudiante presenta un esquema de argumentación deductivo con uso de ejemplos y externo autoritario y notacional.

El esquema de argumentación de esta estudiante es deductivo con y sin uso de ejemplos, externo autoritario y notacional y empírico perceptivo.

Alumno 7

Esta estudiante cursa por primera vez Fundamentos y Geometría.

En el cuestionario 1, actividad 1, elabora una demostración deductiva distinguiendo según *n* par o *n* impar. Explicita las proposiciones que usa en su demostración. No figuran ejemplos previos a la prueba, es decir no hay una conjetura sino que la respuesta a la actividad se da en simultáneo con la explicación.

En la actividad 2 varía el punto A dejando B y C fijos. A partir de esto observa que "cuando a un ángulo se le suma determinada medida al otro se le resta". Luego procede en forma análoga variando el punto B y dejando A y C fijos. Su esquema de argumentación frente a esta actividad es empírico perceptivo.

En la actividad 3 a partir de los dos casos que se le dan formula una conjetura general verbal adecuada que expresa en forma simbólica de la siguiente manera: $A^2 - B^2 = A + B$. Culmina diciendo "pero no se me ocurre una fundamentación para eso". En esta actividad sí formula una conjetura. En la entrevista se le preguntó qué era para ella una fundamentación y nos dice:

A7: *Explicar el por qué generalizado, sin poner ejemplos como los que están acá [señala los dos ejemplos que se le presentan en la actividad]… sin números. Fundamentación tiene que ser algo general, sin condicionarlo a los números, no voy a probar hasta 1001, 1002.*
E: *Y si probaras hasta el 1001, 1002, ¿ya estarías convencida que es así o no?*
A7: *Yo sí… pero siempre han pedido que lo hagamos sin ejemplos.*
E: *¿Quiénes te lo han pedido?*
A7: *Más que nada acá en el IPA pero también en quinto en Matemática 2 te pedían que lo hiciéramos sin ejemplos. Y después, casi siempre, si lo hacés con ejemplos no les sirve.*
E: *¿A vos te sirve?*
A7: *Si lo pruebo con muchos, muchos, muchos, sí… con cinco o seis no.*
E: *¿Y el muchos, muchos, muchos, hasta cuándo?*
A7: *Hasta el 100.*
E: *¿Y para vos ya estaría? ¿Te convencería?*
A7: *Quizás no del 1 al 100 sino 100 números salteados.*
E: *¿A quién no le sirve?*
A7: *A los profesores, a ustedes.*

A partir de la entrevista resulta claro que para convencerse a la estudiante le hubiese alcanzado probar con varios casos. En su respuesta a la actividad prueba solo con dos e inmediatamente pasa a escribir una expresión general y simbólica para su conjetura y esto es generado por una exigencia externa. Ella sabe qué debe hacer (qué se le exige) pero no sabe cómo. Parece darse una lucha entre sus criterios de auto convicción y los criterios que llegan a ella a través del profesor.

En la actividad 4 construye con regla y compás un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales y observando la figura concluye que "dos ángulos [opuestos en su figura] me quedan necesariamente iguales". Su esquema de argumentación frente a esta actividad es empírico perceptivo. Es de destacar que hace una construcción con regla y compás teniendo en cuenta la igualdad de los pares de lados consecutivos. La igualdad de los ángulos los “ve” a posteriori de la construcción. Es muy distinto a que si hubiese hecho una figura a mano alzada donde lados y ángulos se presentarían simultáneamente no dejando apreciar que la igualdad de lados condiciona la igualdad de un par de ángulos opuestos.

A la hora de generar pruebas para las actividades que se le propusieron, esta estudiante tiene un esquema de argumentación empírico perceptivo e inductivo, deductivo sin uso de ejemplos y externo autoritario.

En el cuestionario 2, frente a la proposición 1, el argumento que da para justificar que la prueba 1 es la que más la convence es el mismo que esgrime para no reconocer como las más convincentes a las pruebas 3 y 4 -que llega a comprender en profundidad- como se puede observar a continuación:

La prueba 1 es la que más me convence, porque tomo números impares generales, que pertenezcan a IN, de la forma $2n+1$, es decir: $2n$ forma un número par (cualquier número multiplicado por 2 da par) y cuando a un par le sumamos 1 da un número impar.
Al sumarlos, nos dará como resultado $4n+2$, sacamos 2 de factor común, y nos quedará $2 \times (2n+1)$, y como mencionabe antes, 2 por cualquier número es par.

Prueba 3.
La comprendo pero no logro convencerme, ya que no estoy seguro de que siempre suceda.
Aunque podemos afirmar que todo número impar se descompone en uno par + 1, pero no creo que se puede concluir nada afirmativo.
De todas formas lo considero interesante, porque al sumar dos impares, estamos sumando 2 pares + 2 veces el 1, que sería sumarle siempre 2 a un número par, que dará como resultado otro número par. Creo que puede darnos una respuesta convincente.
Es un razonamiento muy interesante.

Por esto concluimos que el motivo que la convence es la forma de la prueba 1. No la convencen las pruebas 2 y 5 y explica claramente dónde está la falla de cada una.

Al trabajar en la proposición 2, frente a la prueba 1 afirma que la convence "porque utiliza métodos que ya conocemos como verdaderos como por ejemplo que $\beta + \gamma = \delta$ (ángulo exterior)". Lo que hace que esta prueba le resulte convincente es que cada paso está "debidamente" justificado. Esto parece impedirle ver que dichas propiedades se están aplicando en forma inadecuada. O sea que la convence que la suma de los ángulos no es constante.

En la prueba 4, "podría ser correcto pero no me convence la forma de abordarla, no me resulta suficiente para afirmar nada". Aquí, de alguna manera, hace explícito que las demostraciones deben tener una forma determinada. Es de destacar que esta prueba es muy similar a la elaborada por ella misma en la actividad 2 del cuestionario 1.

Un primer comentario a realizar es que frente a estas dos pruebas lo que la convence está fuertemente influido por la forma de presentación del argumento más que por el sentido del argumento.

Llega a comprender la prueba 3 a partir de la lectura de la prueba 5 donde figura un caso particular de lo planteado en la prueba 3. Necesitó este ejemplo para entender y así convencerse que la prueba 3 es correcta. No percibe que esta prueba es también una situación particular.

Parecen convivir en ella las proposiciones (q) y (no q) ya que la convencen pruebas que afirman que la suma es constante y que la suma no es constante. Preguntada por este aspecto en la entrevista la estudiante respondió "no me di cuenta… una debe estar mal pero…".

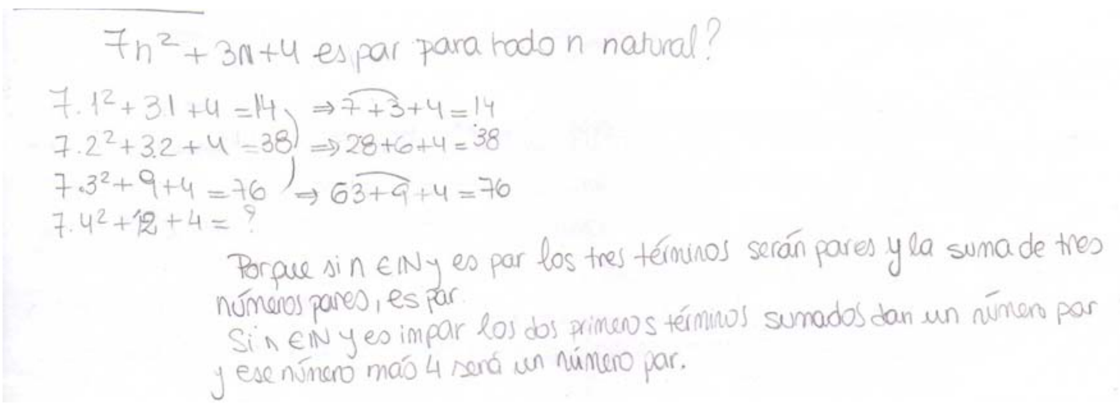
De acuerdo a lo analizado previamente la estudiante, frente al cuestionario 2, presenta un esquema de argumentación externo notacional.

El esquema de argumentación de este estudiante es externo notacional y autoritario, empírico ingenuo en sus dos variantes y deductivo sin uso de ejemplos.

Alumno 8

Cursa por primera vez Fundamentos y Geometría.

En el cuestionario 1, frente a la actividad 1 sustituye la expresión por 1, 2 y 3 y elabora una explicación genérica distinguiendo según n par o impar basándose en lo observado en esos tres casos, como podemos ver en la siguiente figura.


$7n^2+3n+4$ es par para todo n natural?

$7.1^2+3.1+4=14 \Rightarrow 7+3+4=14$

$7.2^2+3.2+4=38 \Rightarrow 28+6+4=38$

$7.3^2+9+4=76 \Rightarrow 63+9+4=76$

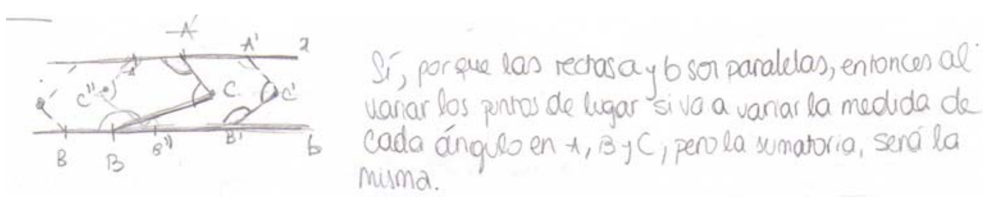
$7.4^2+12+4=$?

Porque si $n \in \mathbb{N}$ y es par los tres términos serán pares y la suma de tres números pares, es par

Si $n \in \mathbb{N}$ y es impar los dos primeros términos sumados dan un número par y ese número más 4 será un número par.

La argumentación que presenta es una descripción de lo que percibe en los ejemplos. Se trata de un esquema de argumentación empírico perceptivo.

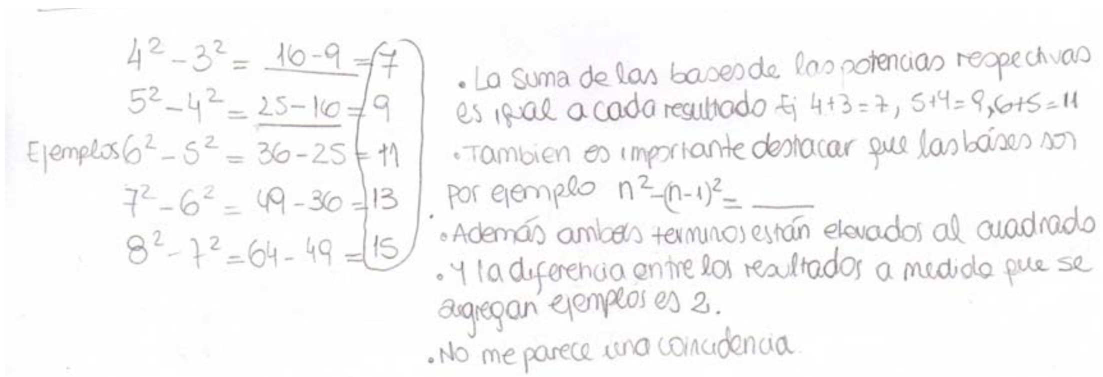
En la actividad 2 esta estudiante conjetura en simultáneo con la explicación. Se basa en cuatro ejemplos para observar que los ángulos A, B y C varían y basándose en que las rectas *a* y *b* son paralelas afirma sin argumentar que la suma de los 3 ángulos es constante.



Sí, porque las rectas a y b son paralelas, entonces al variar los puntos de lugar si va a variar la medida de cada ángulo en A, B y C, pero la sumatoria, será la misma.

Por lo tanto consideramos que su esquema frente a esta actividad es externo autoritario ya que reformula lo que supuestamente quiere probar y lo toma como verdadero.

En la actividad 3 describe todas las relaciones que observa en los ejemplos dados y en los tres que agrega.



$4^2-3^2 = 16-9 = 7$
$5^2-4^2 = 25-16 = 9$
Ejemplos $6^2-5^2 = 36-25 = 11$
$7^2-6^2 = 49-36 = 13$
$8^2-7^2 = 64-49 = 15$

- La suma de las bases de las potencias respectivas es igual a cada resultado Ej 4+3=7, 5+4=9, 6+5=11
- Tambien es importante destacar que las bases son por ejemplo $n^2-(n-1)^2=$ ____
- Además ambos terminos están elevados al cuadrado
- Y la diferencia entre los resultados a medida que se agregan ejemplos es 2.
- No me parece una coincidencia.

Como se puede observar en la figura anterior, a partir de los casos considerados formula una conjetura adecuada respondiendo la primera pregunta que se le planteaba. Incorpora también observaciones generales de distinto tenor: por un lado, escribe una generalización expresada en forma algebraica del primer término de la igualdad y, por otro, describe con palabras algo que ya está contenido en la expresión anterior pero que parece no darse cuenta. La estudiante formula una nueva conjetura referida a una relación entre los resultados que no estaba vinculada a la pregunta original.

Todo esto nos indica que su esquema frente a esta actividad es empírico perceptivo.

De acuerdo al análisis anterior esta estudiante frente al cuestionario 1 presenta un esquema de argumentación empírico perceptivo y externo autoritario.

En el cuestionario 2, ante la proposición 1: Lo convencen las pruebas 1 y 5 que las ve "más analíticas" que las otras ya que "se toman términos genéricos", se usan símbolos y se aplican propiedades. Al tratarse de dos pruebas que no son demostraciones y teniendo en cuenta los comentarios anteriores parece que es la forma y no el contenido lo que estaría primando en lo que convence a esta estudiante. Le queda claro que proponer una serie de ejemplos no alcanza para justificar (prueba 2). Es más, si aparecen ejemplos esto daría la pauta de que no es una demostración. Con este argumento es que rechaza parcialmente la prueba 3. Otro argumento para rechazar la prueba 3 es el lenguaje coloquial: "a pesar de su lenguaje coloquial me parecería interesante que estuviera justificada de otra manera". No le convence la prueba 4 porque se basa en afirmaciones que para ella no están probadas.

Ante la proposición 2, declara que la convencen las pruebas 2, 4 y 5, que son las que no tienen ningún planteo simbólico. A pesar de que la convencen, al explicar sus motivos, dice que entiende lo que se plantea pero señala la ausencia de "fórmulas", "generalización", "estructura analítica", "lenguaje más técnico" y puede que no sean "una justificación válida para algún grado más formal".

Para esta estudiante la forma en que se presenta una prueba influye en su aceptación de la misma: en la proposición 1 la convencen las dos pruebas que más notación incluyen y en la proposición 2 señala la ausencia de formalidad ante las pruebas que la convencen. Parece considerar que la manera en que se debería presentar una prueba "formal" debe contener notación simbólica y estar organizada en forma secuenciada. Por un lado, la estudiante expresa que "es más difícil de comprender a través de símbolos y aplicando propiedades", pero a su vez tiene muy presente las exigencias del medio al decir "quizá no es una justificación válida para algún grado más formal".

Consideramos que esta estudiante, frente al cuestionario 2, presenta un esquema de argumentación externo notacional.

El esquema de argumentación de esta estudiante es externo de las dos variantes y empírico perceptivo.

Alumno 9

Cursa por primera vez Geometría y Fundamentos.

Al trabajar en las actividades 1, 3 y 4 del cuestionario 1, esta estudiante recurre a argumentos empíricos para fundamentar sus respuestas. Por ejemplo, en la actividad 1 sustituye en la expresión por 1, 5 y 2 para verificar si la proposición es verdadera o no. A continuación sustituye con el número 213. Al cumplirse en este caso, afirma que "el resultado es siempre par". Algo similar sucede cuando trabaja en la actividad 3 donde formula una conjetura adecuada y la expresa como $n^2 - (n\text{-}1)^2 = n + n - 1$, sin constatar la igualdad en forma algebraica. Arma la conjetura a partir de los ejemplos dados y de un ejemplo que agrega (25^2 - 24^2) y asegurándose que las bases deben ser consecutivas a través de un ejemplo en el que no lo son (12^2 - 10^2). En ambas actividades, luego de considerar algunos casos con números chicos, recurre a un número especialmente elegido para mediante esta forma corroborar si se sigue cumpliendo o no y así dar el salto a afirmar que se cumple siempre. Esto es lo que Balacheff (1998) denomina experimento crucial: cuando los estudiantes, concientes de la necesidad de generalización, optan por un ejemplo lo más excéntrico posible, y asumen así que la conjetura siempre se cumple.

Es de resaltar que en la actividad 3, para asegurarse que las bases de las potencias son consecutivas recurre a un caso donde las bases no lo son.

En la actividad 2, luego de nombrar con α, β, γ a los complementos respecto de 360 de los ángulos A, B y C, plantea la siguiente ecuación:

$$360 - \alpha + 360 - \beta + 360 - \gamma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$$
$$1080 - \alpha - \beta - \gamma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

Ni la primera ecuación ni la transformada le permiten llegar a ninguna conclusión.

Por lo detallado anteriormente podemos decir que presenta un esquema de argumentación empírico experimento crucial a la hora de generar pruebas.

En el cuestionario 2, frente a la proposición 1 plantea que en las pruebas 2 y 3 "me faltarían más datos para poder plantear una generalización". Ante esto nos preguntamos ¿a qué se refiere? ¿Será por la presencia de ejemplos numéricos o a la falta de manipulación simbólica? En la entrevista, al preguntarle por qué en las pruebas 2 y 3 le faltaban datos nos dijo:

A9: *[señalando la prueba 2] hago 3 + 5 y es 8 pero puedo seguir así con todos los números… y en la prueba 3 es lo mismo, puedo agarrar todos los números pero así estaría muchísimo tiempo… y de esta manera no son una generalización.*

E: *¿Y qué es para ti una generalización?*

A9: *Es cuando lo escribimos así… con letras.*

Como vemos, lo que reclama a estas pruebas es que no incluyen una expresión general simbólica que englobe todos los casos. Lo mismo sucede ante las pruebas 4 y 5 de la proposición 2: al no contener expresiones simbólicas también clama por "más datos".

Frente a las pruebas 1 y 4 sostiene "me convencen porque me parecen convincentes y cierto lo planteado". Preguntada en la entrevista sostiene:

A9: *La prueba 4 está diciendo lo mismo que la prueba 1 con palabras. Si pongo 40 me queda 40 x 2 = 80 y 80 más 1 es 81 que es impar y termina en impar… lo mismo con el otro… y me da 162 que es par…*

E: *¿Viste qué decía la proposición 1?*

A9 lee la proposición: "la suma de dos números impares es un número par" y agrega:

A9: *Al sustituir por 40 da 81 en a y 81 en b, que son impares…*

La estudiante confirma que es consciente que está frente al mismo número impar pero eso no le genera ningún conflicto con el enunciado de la proposición. Esto es entendible en la medida que no hay ninguna contradicción: ella está frente a dos números impares cuya suma es un número par. El conflicto lo tenemos nosotros que en la proposición estamos incluyendo un "para todo" que el enunciado no hace explícito.

Frente a este cuestionario 2 consideramos que la estudiante presenta un esquema de argumentación externo notacional.

El esquema de argumentación de esta estudiante es externo notacional y empírico experimento crucial.

Alumno 10

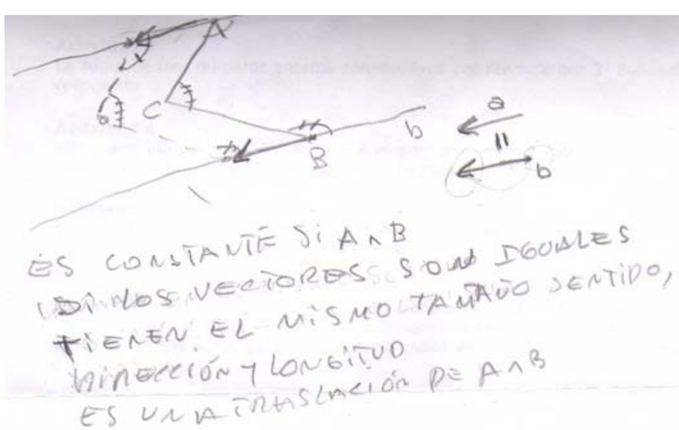
Este estudiante está recursando por segunda vez ambas asignaturas.

En el cuestionario 1, frente a la actividad 1 sustituye por 1, 2 y 3 pero no responde la pregunta que se le planteaba. En la entrevista relata:

A10: *Fui tanteando, fui probando, fui sustituyendo… pero así se puede seguir hasta infinito… lo que hice no abarca… tendría que haber hecho una demostración que abarcara todos los naturales… la verdad que fue un desastre.*
E: *Pero, ¿quedaste convencido?*
A10: *Me hubiera gustado hacer una demostración que abarcara para todos los naturales… pero no se me ocurrió cómo.*

El estudiante tiene claro que una serie de ejemplos no son una demostración, pero a pesar de ello reconoce que no se le ocurrió cómo elaborar una y lo mejor que pudo ofrecer son ejemplos.

Frente a la actividad 2 parece no llegar a poder concebir toda la generalidad de la situación que se le plantea.



Solo puede pensar en la variación de los puntos A, B y C en una traslación. Su esquema de argumentación frente a esta actividad es empírico perceptivo.

En la actividad 3, a partir de los dos casos que se le presentan, observa que los resultados son impares. Conjetura que "el resultado de la operación sustracción de 2 números consecutivos de exponentes iguales es impar". No llega a responder lo que se le pregunta. Su esquema de argumentación frente a esta actividad es empírico perceptivo.

En la actividad 4 dice que "no existe cuadrilátero que cumpla con esa condición" pero no da ninguna justificación para su afirmación. Con respecto a esta actividad en la entrevista le preguntamos:

E: *¿Pensaste en algunos cuadriláteros especiales?*
A10: *No porque creo que dejaría de ser cuadrilátero.*
E: *A ver... olvídate de los ángulos. ¿Existe un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales?*
A10: *... rectángulo, cuadrado... me pongo nervioso ante las personas que estoy... ustedes están allá arriba...*

Pensamos que esta última afirmación del estudiante es la que nos da el marco general de la entrevista: el estudiante estaba nervioso, se comía las uñas, pensaba cuidadosamente cada palabra que iba a emplear, no entendía lo que él mismo había escrito en los cuestionarios y descalificaba sus propias producciones.

Frente a este primer cuestionario consideramos que su esquema de argumentación es empírico perceptivo y externo autoritario.

Ante el cuestionario 2, en la proposición 1, la que más le "gusta" es la prueba 1. La argumentación que da para esto consiste en poner en palabras lo que consigna la prueba y utiliza lo que dice la proposición para justificar. De acuerdo con los esquemas de Sowder y Harel (1998) se trataría de un esquema de argumentación externo autoritario.

Frente a las otras pruebas solo escribe respuestas mínimas para tres de ellas. Preguntado en la entrevista por lo que había escrito contesta:

A10: *¿Qué habré querido poner ahí? En ese momento no sé por qué puse eso.*

El estudiante no puede reconocer lo que él mismo había escrito, sus propias palabras no tienen sentido para él. Esto nos lleva a preguntarnos sobre lo que escribió: ¿fue escrito para conformar a otros?

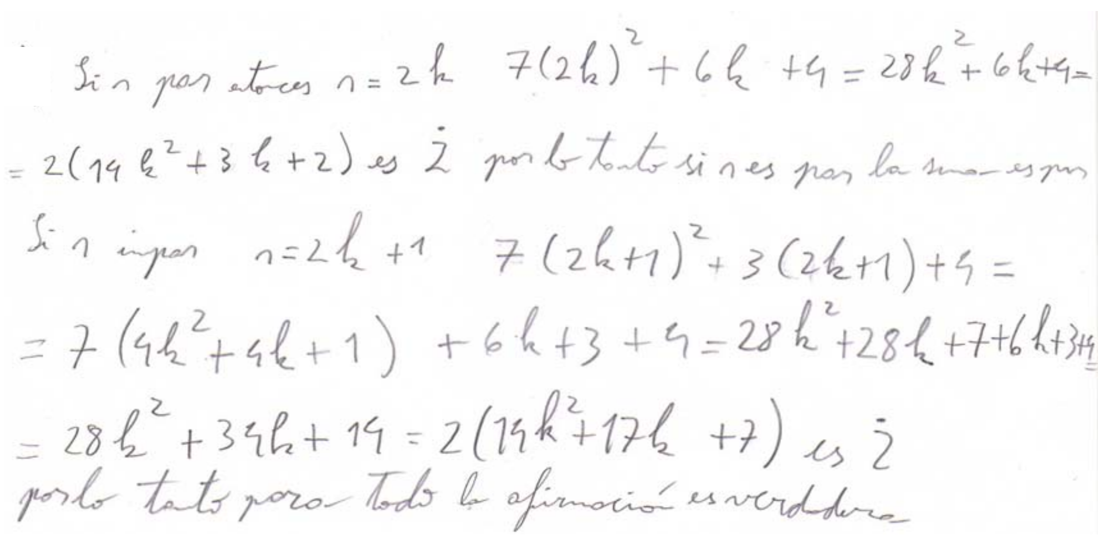
En este cuestionario vemos que el estudiante presenta un esquema de argumentación externo.

El esquema de argumentación de este estudiante es básicamente externo autoritario con rasgos de empírico perceptivo.

Alumno 11

Cursa por primera vez ambas asignaturas.

En las actividades 1, 3 y 4 del cuestionario 1 presenta claramente un esquema de argumentación deductivo sin uso de ejemplos. Esto puede verse a continuación:



Si n par entonces $n = 2k$ $7(2k)^2 + 6k + 4 = 28k^2 + 6k + 4 =$

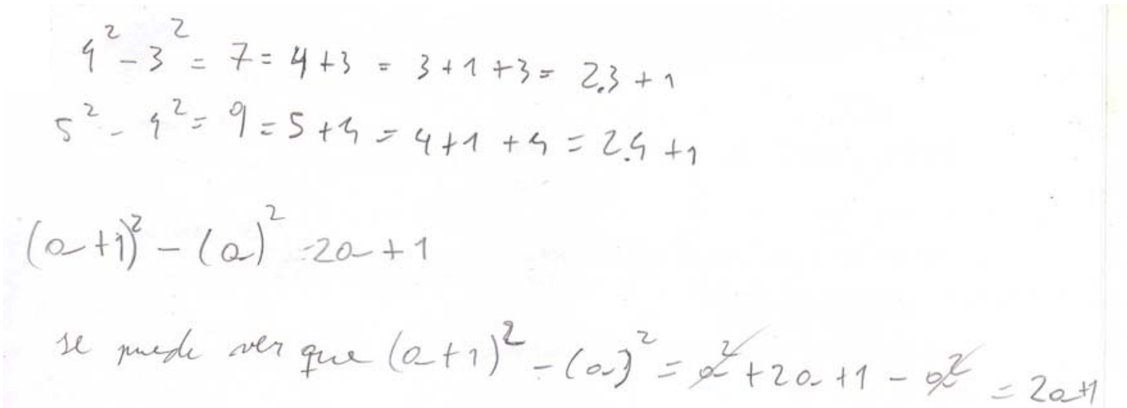
$= 2(14k^2 + 3k + 2)$ es $\dot{2}$ por lo tanto si n es par la suma es par

Si n impar $n = 2k + 1$ $7(2k+1)^2 + 3(2k+1) + 4 =$

$= 7(4k^2 + 4k + 1) + 6k + 3 + 4 = 28k^2 + 28k + 7 + 6k + 3 + 4 =$

$= 28k^2 + 34k + 14 = 2(14k^2 + 17k + 7)$ es $\dot{2}$

por lo tanto para todo la afirmación es verdadera

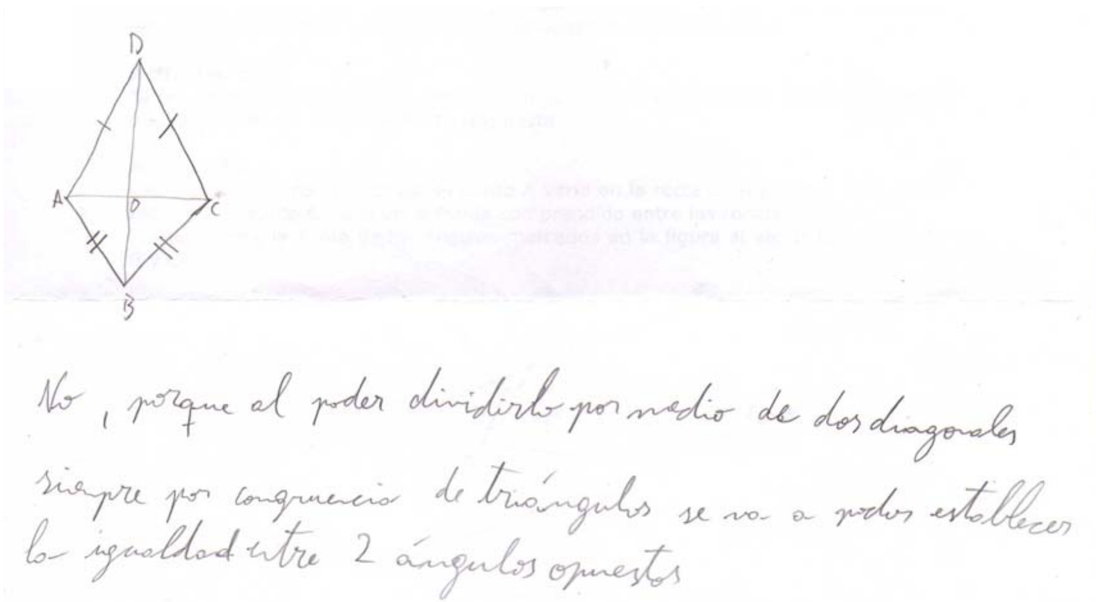


$4^2-3^2=7=4+3=3+1+3=2.3+1$

$5^2-4^2=9=5+4=4+1+4=2.4+1$

$(a+1)^2-(a)^2=2a+1$

se puede ver que $(a+1)^2-(a)^2=\cancel{a^2}+2a+1-\cancel{a^2}=2a+1$



No, porque al poder dividirlo por medio de dos diagonales siempre por congruencia de triángulos se va a poder establecer la igualdad entre 2 ángulos opuestos

En la actividad 2, presenta una figura general y escribe: "si A, B y C estuvieran alineados $\alpha+\beta+\gamma=360°$". Al preguntarle sobre esta actividad, en la entrevista nos cuenta:

A11: *En un primer caso pensé que los puntos estuvieran alineados y perpendiculares a las rectas… de esa manera los ángulos serían 90 [el A], llano [el C] y 90 [el B]… eso lo tomé como un primer caso… ya basándome en un resultado traté de generalizar.*

Surge en la entrevista algo que no había quedado registrado en la respuesta escrita al cuestionario entregada por el estudiante. Esto nos permite ver que pensó la situación en un caso particular lo que le permitió conjeturar que la suma de los tres ángulos era constante y que valía 360º. Destacamos la importancia de poder generar intencionalmente casos particulares, especiales, como un primer paso hacia el autoconvencimiento y la elaboración de conjeturas.

Por todo lo anterior, este estudiante a la hora de generar pruebas presenta un esquema de argumentación deductivo sin uso de ejemplos.

En el cuestionario 2, proposición 1, le convence la prueba 1 porque reconoce que $2(2n + 1)$ es par pero no tiene en cuenta que la prueba no es genérica. No le convencen las pruebas 2 y 3 "porque van a casos particulares". En la prueba 3, el ejemplo inicial que serviría de guía para redactar la justificación, parece ser más potente que el argumento escrito en forma coloquial que sigue. No dice nada de la prueba 4. Argumenta claramente porque no le convence la prueba 5. En la entrevista:

E: *¿Por qué no dijiste nada de la prueba 4?*
A11: *No me convence porque va a los números y no va a la estructura de los números… en las pruebas 1 y 5, por más que no convencieran, por lo menos trabaja con los números como incógnita, como variables, te da un paneo… en las pruebas 2 y 3 son casos concretos… no quiere decir que la prueba 4 esté bien o mal, mi primera impresión es que es un poco menos formal que las otras por más que no me convenzan las más formales [señala la prueba 5]… pero puede palabrísticamente estar bien.*

El estudiante, a partir de lo dicho, da muestras que tiene una idea predeterminada de cómo debe ser una demostración: atender a la generalidad mediante el uso de lenguaje simbólico. Las pruebas 2, 3, y 4 no tienen este formato y por eso son rechazadas por este estudiante. Veamos otro pasaje de la entrevista:

E: *¿Las pruebas 2 y 3 no te convencen?*
A11: *Porque son casos particulares.*
E: *¿Las dos?*

A11: *En la prueba 2 son casos… en la prueba 3 la formalizaría más, haría una mezcla de la prueba 1 y la 3… no sé para qué puso ese ejemplo en la prueba 3.*

E: *¿Para qué lo habrá puesto?*

A11: *Ah… para sacar una generalidad…*

E: *Y la generalidad, ¿no está dicha en lo que escribe?*

A11: *Sí, está dicha…*

E: *Pero a vos no te convence.*

A11: *Sí, me convence, pero le faltaría… no sé, yo estoy acostumbrado a ver más así [señala la prueba 1] con letras.*

Vemos que el estudiante es capaz de reconocer la generalidad de la prueba 3 dada en lenguaje coloquial pero a pesar de ello rechaza su formato privilegiando la prueba 1, por ejemplo, que cumple con los requisitos por él esperados pero que no es general. Esto lo confirma cuando le volvemos a preguntar por la prueba 4:

A11: *No tengo una herramienta general que me permita decir si está bien o mal… a partir de las afirmaciones del estudiante no puedo sacar conclusiones… él hace afirmaciones de la galera…*

El formato de la prueba le condiciona incluso la lectura de la prueba. Este estudiante está valorando, previo a afrontar el análisis de lo escrito, que sin símbolos no se puede concluir nada general. En la medida que en las pruebas 2, 3 y 4 aparecen números y no símbolos, no son tenidas en cuenta por este estudiante como candidatas a pruebas aceptables y ni llega a leerlas en profundidad alegando para las pruebas 2 y 3 que remiten a casos particulares. Vemos la presencia en este estudiante de factores externos que están influyendo en su toma de decisiones. Las pruebas que no incluyen notación no son consideradas por él como factibles demostraciones.

Otro aspecto de cómo influye la forma en su manera de considerar una prueba lo podemos apreciar en el siguiente pasaje de la entrevista:

E: *¿Vos crees que la suma de dos impares es un número par?*

A11: *Sí.*

E: *¿Por qué?*

A11: *El número impar lo podés escribir como par más uno, 2n+1, más otro número que esté formado por una estructura 2k+1 te va a dar dos por k más n más 2 [2(k+n) + 2] y los dos son múltiplos de dos por lo tanto es múltiplo de dos.*

E: *Mirá la prueba 1.*

A11: *Ah! Usa el mismo n! Y te da el mismo número. Ahora que yo la dije me doy cuenta que está mal porque usa dos veces el mismo número.*

El estudiante, en la entrevista, fue capaz de elaborar mentalmente y expresar oralmente una demostración para la proposición, y de esta manera fue capaz de reconocer que la prueba 1 no contemplaba la generalidad que él reclama a una demostración. Ante la prueba 1, su prejuicio de la forma, parecería que es lo que le impidió reconocer su falta de generalidad.

En la proposición 2, rechaza la prueba 1 porque se llega a que la suma de los ángulos no es constante y eso "contradice a lo que se plantea". Parecería que una demostración es solo para las proposiciones verdaderas. Veamos lo que nos dice en la entrevista:

E: *Frente a la prueba 1 escribiste "no me convence, contradice a lo que se plantea".*

A11: *Nada más por esto: si yo te digo demostrame que es constante y vos me demostrás que no… Cuando me dan un problema para demostrar tengo que demostrar lo que me dice… Acá dice que la suma de los ángulos es constante… y el tipo demostró que no es constante… si me pasa eso, algo hice mal yo…*

E: *Pero, ¿leíste la prueba 1?*

A11: *No, como demostraba que no era constante ya ni la leí.*

Aquí se refleja otro mandato incorporado en su experiencia como estudiante: las proposiciones que se presentan en el ámbito escolar son verdaderas y hay que demostrarlas.

Reconoce las insuficiencias de las pruebas 3, 4 y 5 por lo que las rechaza. Lo convence la prueba 2 donde incluso señala que habría que explicar mejor donde se ha de construir el segmento ED.
Este estudiante, a la hora de analizar pruebas elaboradas por otros, tiene un esquema de argumentación externo notacional y deductivo sin uso de ejemplos.

El esquema de argumentación de este estudiante es deductivo sin uso de ejemplos y externo notacional.

Alumno 12

Cursa por primera vez Fundamentos y Geometría.

En el cuestionario 1, frente a la actividad 1, toda su respuesta consiste en lo siguiente: "Sí porque la suma de 2 impares te da un par y si le sumás un par a otro par este da par." Esto nos llevó a pensar que el estudiante estaba pensando en los números 7, 3 y 4 que figuran en la expresión que se le daba. En la entrevista nos lo confirma:

E: *Leé lo que escribiste frente a la actividad 1.*
A12: *[luego de leer] Pah, horrible… [vuelve a leer]*
E: *¿Cuáles son esos impares y pares que sumás?*
A12: *Yo pensé en el 7 y el 3 pero no pensé en el n… porque si sumás dos impares te da par y si sumás dos pares te da par… eso sí es cierto, pero no pensé en el n.*

El estudiante da una respuesta que le resulta satisfactoria aunque la misma no tiene ningún sentido matemático. No llega a comprender lo que se le está preguntando, es recién en la entrevista que toma conciencia de la presencia de *n* en la expresión. Lo que tuvo en cuenta para su respuesta fueron exclusivamente los coeficientes numéricos de la expresión que se le daba y son estos coeficientes los que suma para dar una respuesta. La respuesta, si la aislamos de su contexto de la actividad, es cierta, y este aspecto es el resaltado por el estudiante en la entrevista ("eso sí es cierto"). Enuncia una propiedad genérica verdadera que implicaría un argumento no válido para demostrar la conjetura pero que él toma como satisfactorio. Consideramos que frente a esta actividad presenta un esquema de argumentación empírico perceptivo.

En la actividad 2, agrega líneas a la figura y parece reconocer en ella ángulos correspondientes entre paralelas en la medida que los deja marcados. Esto es todo lo que hace.

En la actividad 4 construye con regla un cuadrilátero con un solo par de lados consecutivos iguales y sus ángulos distintos. No tuvo en cuenta que la pregunta que se le planteaba hacía referencia a la existencia de un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales. Asumiendo que está respondiendo la pregunta que él entendió, ¿podemos inferir su esquema de argumentación frente a esta actividad? En un principio parecería empírico, en la medida que su argumento se basa en una figura que construyó y muestra como evidencia para su respuesta afirmativa. También podría ser deductivo ya que nos preguntamos ¿cómo demostraríamos la existencia de un objeto matemático –en este caso un cuadrilátero que cumple ciertas condiciones- sino a través de la construcción de uno?

En la actividad 3, a partir de los cálculos en los dos casos dados, formula la conjetura en forma simbólica: $a^2 - (a - 1)^2 = 2a - 1$, y a continuación prueba algebraicamente.

En esta actividad usa lo empírico para formular en forma simbólica una conjetura que luego usa para demostrar la proposición.

Su esquema de argumentación frente al cuestionario 1 consideramos es empírico perceptivo y deductivo sin uso de ejemplos.

En el cuestionario 2, frente a la proposición 1 lo convence la prueba 1 porque "generaliza para todos los casos". Generalizar, ¿implica expresar algebraicamente y aplicar propiedades? No ve que la prueba es para infinitos casos pero sigue siendo particular.

No le convencen las pruebas 2 y 3 “porque van a casos particulares”. En la prueba 3, el ejemplo inicial que serviría de guía para redactar la justificación, parece ser más potente que el argumento escrito en forma coloquial que sigue.

En la entrevista, frente a la prueba 3 dice:

A12: *Hizo sumas… y eso no alcanza… yo siempre me acostumbré así.*
E: *¿Dónde te acostumbraste?*
A12: *Del liceo… siempre si hacés dos casos ¿cómo sabés si se va a cumplir siempre?*

En este momento de la entrevista le explicamos detalladamente en qué consiste la prueba 3 y a continuación le preguntamos:

E: *Pero a vos, internamente ¿te convence?*
A12: *Eso parece convincente… pero sigo con lo mismo, me gustaría generalizarlo para todo.*
E: *¿Qué te falta?*
A12: *Buscar una forma de generalización para demostrar que se cumple siempre.*

No reconoce a la 4 como prueba más allá de estar de acuerdo con el argumento. Alega que no se puede demostrar así, que hay que generalizar. En la entrevista:

E: *En tu respuesta a la prueba 4 decís: “estoy de acuerdo pero hay que demostrar que es así generalizando”. ¿Qué es lo que hay que demostrar?*
A12: *Que se cumple para todos los casos, no para casos particulares.*
E: *¿Cuáles son los casos particulares?*
A12: *Ahí dice que “todo número impar termina en 1, 3, 5, 7 o 9”, habría que encontrar un contraejemplo para ver si es así… que eso no lo hice…*
E: *¿Contraejemplo de qué?*
A12: *Para demostrar que todo número que termina en 1, 3, 5, 7, o 9 es impar.*
E: *¿Estás de acuerdo que si un número termina en 1, 3, 5, 7 o 9 es impar?*

A12: *Sí, si es que no se encuentra otro, un contraejemplo, un número impar que no sea así… Por lo que se ve si vos te ponés a escribir números, sí, parece que sí… pero no hay una prueba general de eso.*

A este estudiante, ver ejemplos de sumas o cifras en las pruebas (como en la prueba 4) parece serle determinante para su decisión de afirmar que falta una demostración general. Que una prueba contenga ejemplos hace que no siga leyendo el resto de la prueba, que no se interese por el argumento en que se basa. Es más, en las entrevistas referidas a las pruebas 3 y 4, queda explicitado que no había entendido –quizás por no leerlos- los argumentos, y luego de que se les explicaran detalladamente, sigue insistiendo en que igual hay que demostrarlos para todos los casos. Parece seguir la máxima: "ejemplos no prueban". Lo que parece guiar las respuestas de este estudiante es la idea que si en las pruebas aparecen números entonces estas no tienen generalidad. Otro aspecto a resaltar de las respuestas de este estudiante es que reclama "generalización" para una prueba. Esta generalización consiste para él en la utilización de símbolos ya que la única prueba que considera convincente es la 1 "porque generaliza para todos los casos".

La argumentación de la prueba 2 la toma como una conjetura que "sí sirve como una guía para llegar a una demostración general". En el mismo sentido se expresa ante la prueba 5 de la proposición 2 frente a la que afirma "está bueno para encaminarse pero uno tiene que buscar generalizarlo". No rechaza directamente los ejemplos sino que los considera útiles para en una etapa posterior llegar a una generalización.

En la prueba 5 de la proposición 1 sigue el razonamiento y dice que está mal porque "está demostrando tomando como cierto lo que está demostrando".
Mirando en conjunto sus respuestas a la proposición 1 vemos que las únicas pruebas que le merecieron la categoría de demostraciones, y por tanto les dedicó una lectura atenta, fueron la 1 y 5, que son las que tienen un formato simbólico.

Frente a la proposición 2 no dice nada de las pruebas 1, 2 y 3. En la entrevista afirma que no las entendió. Rechaza la prueba 4 porque deja fijos los puntos B y

C y en la letra del problema dice que los puntos A, B y C son variables. En la prueba 5 reconoce que no hay generalidad y que solo se trata de casos específicos que considera útiles para encaminarse hacia una demostración.

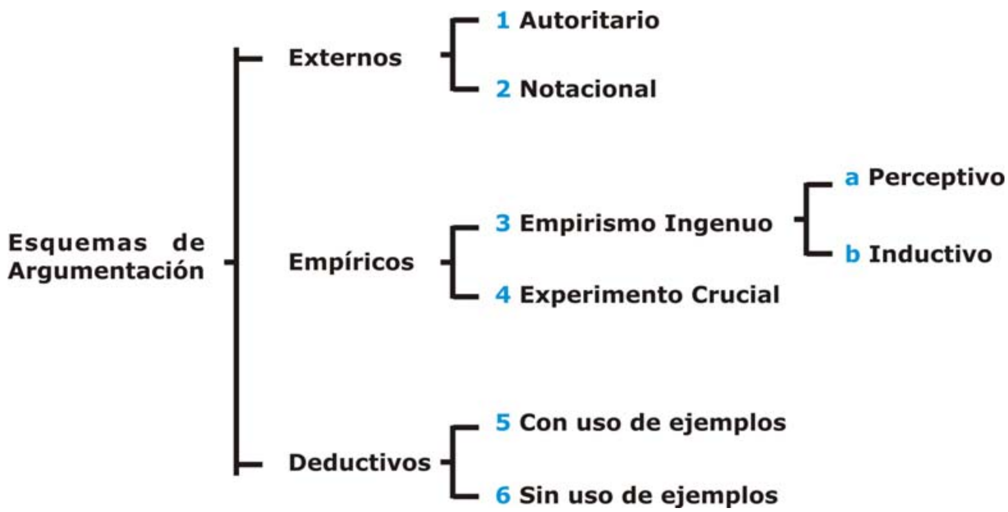
Este estudiante deja constancia de una marcada diferencia entre sus producciones frente a las actividades de geometría y las de aritmética.
Frente a este segundo cuestionario consideramos que el estudiante presenta un esquema de argumentación externo notacional y deductivo sin uso de ejemplos.
El esquema de argumentación de este estudiante es deductivo sin uso de ejemplos, externo notacional y empírico perceptivo.

7. Resultados globales, conclusiones, reflexiones y consideraciones para la enseñanza

A continuación presentamos los esquemas de argumentación emergentes de los doce estudiantes tomados en cuenta para este estudio, de acuerdo al análisis realizado en el capítulo anterior, teniendo en cuenta el marco teórico presentado en el apartado 4.

7.1. Resultados globales

Para resumir la información del capítulo anterior hemos codificado las subdivisiones de los esquemas de nuestro marco teórico de la siguiente manera:



Una primera impresión que surge del análisis es que en general, observando en conjunto las respuestas a los cuestionarios 1 y 2 y lo dicho en las entrevistas, no se podría decir que tal o cual estudiante presenta un esquema de argumentación en estado puro frente a una misma actividad y frente a un mismo cuestionario (Ver Anexo).

Eso es compatible con lo que dicen Cabassut et al. (2012, p. 174) refiriéndose a los sistemas de Balacheff (1988) y de Harel y Sowder (1998): "Ambos sistemas comparten el problema de que no siempre es sencillo relacionar un comportamiento argumentativo a cierta categoría; más bien esto podría requerir una cantidad considerable de interpretación". En este mismo sentido, hemos detectado que los estudiantes que participaron en nuestro estudio presentan una variedad de esquemas tanto frente a una misma actividad como frente a distintas actividades lo que coincide con lo que manifiestan Martín y Harel (1989), Ibañes (2002), Flores (2007) y Arellano (2013) en las conclusiones de sus respectivos trabajos.

Esto se puede observar en el siguiente cuadro:

Alumno	Esquema en base al cuestionario 1	Esquema en base al cuestionario 2	Esquema de argumentación
A1	1 y 2 y 6	5 y 6	1 y 2 y 5 y 6
A2	6	2 y 6	2 y 6
A3	3a y 3b y 6	1 y 5 y 6	1 y 2 y 3a y 5 y 6
A4	2 y 5 y 6	1 y 5	1 y 6
A5	3a	2	2 y 3a
A6	3a y 6	1 y 2 y 5	1 y 2 y 3a y 5 y 6
A7	1 y 3a y 3b y 6	2	1 y 2 y 3a y 3b y 6
A8	3a y 1	2	1 y 2 y 3a
A9	4	2	2 y 4
A10	3a y 1	1	1 y 3a
A11	6	1 y 2 y 6	6 y 2
A12	3a y 6	2 y 6	2 y 6 y 3a

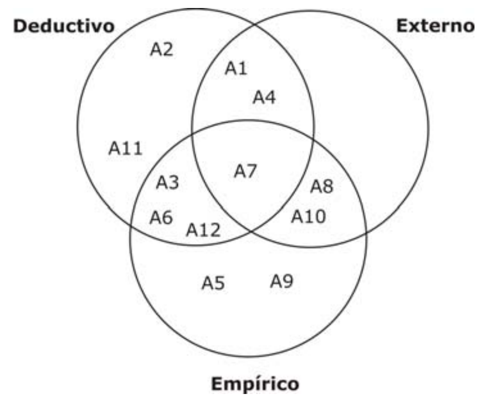
7.2. Conclusiones

Concientes de la dificultad que implicaba la tarea a abordar decidimos, en una primera instancia, poner el foco de atención en cada uno de los cuestionarios por separado para tratar de comprender y explicar el fenómeno.

Como ya se dijo, el cuestionario 1 pone al estudiante en la posición de generar argumentos para autoconvencerse de qué está sucediendo en cada actividad. En general no conoce a priori si las proposiciones son verdaderas o falsas y debe primero conjeturar para luego argumentar.

Los resultados de los trabajos de los doce estudiantes frente al cuestionario 1 podemos observarlos en la siguiente tabla que representamos en el diagrama adjunto:

Alumno	Esquema en base al cuestionario 1
A1	1 y 2 y 6
A2	6
A3	3a y 3b y 6
A4	2 y 5 y 6
A5	3a
A6	3a y 6
A7	1 y 3a y 3b y 6
A8	3a y 1
A9	4
A10	3a y 1
A11	6
A12	3a y 6



Como podemos observar, los esquemas de argumentación de los estudiantes están repartidos entre deductivos y empíricos en forma bastante equitativa, no existiendo ningún estudiante cuyos esquemas sean puramente externos. Esto último resulta bastante lógico ya que frente a actividades que son nuevas y que representan problemas genuinos, los estudiantes no pueden recurrir exclusivamente a lo que dice su profesor, un libro, algún compañero, su memoria o a argumentos notacionales ya que es este el que en definitiva debe generarlos.

De los doce estudiantes, frente al cuestionario 1, cuatro presentan un esquema de argumentación definido: dos deductivos y dos empíricos. Pero, ¿qué está sucediendo con los siete restantes? ¿Qué significa un esquema deductivo y empírico, deductivo y externo o empírico y externo? Se hace necesaria una explicación para poder comprender bien esta situación.

Del análisis del capítulo anterior podemos decir que entre los estudiantes que presentan un esquema de argumentación *deductivo y externo* se encuentran aquellos que son capaces de elaborar argumentos que involucran una serie de cadenas deductivas en algunas actividades pero que ocultan –ya sea no presentando o tachando- los intentos que hacen para aclararse a sí mismos la situación involucrada en la actividad. Solo muestran lo que consideran que "está bien" desvalorizando el proceso de búsqueda de clarificación y entendimiento. También están aquellos estudiantes que entienden qué es una prueba deductiva pero ocultan y rechazan lo que ellos pueden ofrecer tachando o borrando los intentos que no terminan en lo que ellos consideran una demostración. Por ejemplo, el estudiante A1, en la actividad 3 del primer cuestionario, rechaza todas las ideas que plantea ya que no pudo completar la prueba diciendo "no hice nada". Pareciera que lo único que tiene sentido para estos estudiantes es la demostración acabada.

Los estudiantes que consideramos presentan un esquema de argumentación *empírico y deductivo* son los que frente a alguna de las actividades pueden elaborar pruebas "deductivas" en la medida que plantean una cadena de razonamientos válidos. A pesar de esto, frente a otras actividades del mismo cuestionario lo que pueden ofrecer son argumentos empíricos ingenuos (perceptivos o inductivos). Este resultado se condice con el de Ibañes (2002, p. 16) en la medida que los estudiantes "utilizan uno u otro [esquema] según las peculiaridades de lo que se les propone, o, incluso, emplean varios al mismo tiempo".

También se encuentran aquellos estudiantes que al intentar justificar los pasos de una prueba deductiva proponen alguna propiedad que consideran verdadera pero necesitan ir comprobándola. Por ejemplo, la estudiante A6 plantea que impar por impar es impar y escribe debajo de esto, en un tono más claro: 3.3=9, 7.7=49, 13.13=169, como para corroborar que su afirmación sí es cierta y así lo confirma en la entrevista.

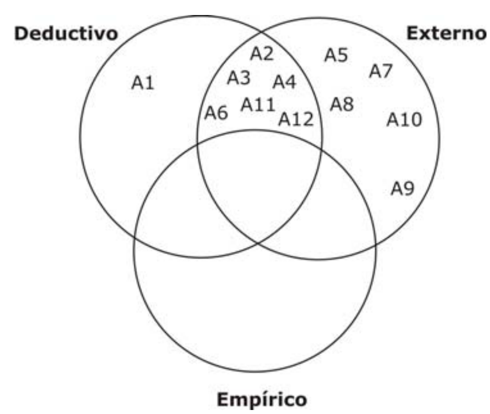
En este esquema también están los estudiantes que luego de conjeturar y presentar un argumento deductivo sienten la necesidad de verificar lo que terminan de demostrar en un caso concreto.

Los estudiantes que presentan un esquema de argumentación *empírico y externo* son aquellos que para autoconvencerse les alcanza con probar con algunos ejemplos y luego inducir una propiedad general o aquellos que miden o se dejan llevar por las propiedades que observan en la o las figuras con las que ejemplifican. Lo descrito hasta ahora sería la caracterización de un esquema empírico pero lo que hace la diferencia es que declaran que lo hecho por ellos no alcanza porque "los ejemplos no prueban nada" o tachan lo hecho por tratarse de ejemplos simplemente –esto se deduce de las entrevistas-.

La ausencia de esquemas de argumentación externos en estado puro consideramos se debió al tipo de actividades que se les propusieron a los estudiantes y que con esa intención habían sido así diseñadas. Este resultado es concordante con el estudio realizado por Flores (2007) trabajando con profesores y donde se evidencia que estos no presentaron esquemas de argumentación autoritarios. Esto se pudo deber a que las actividades del curso estuvieron encaminadas a formar conjeturas y buscar su validación.

Un panorama global de los esquemas de argumentación de los estudiantes frente al cuestionario 2, donde tienen que analizar pruebas elaboradas por otros y decir cuáles de estas pruebas los convencen o no y por qué, es el que podemos apreciar a continuación:

Alumno	Esquema en base al cuestionario 2
A1	5 y 6
A2	2 y 6
A3	1 y 5 y 6
A4	1 y 5
A5	2
A6	1 y 2 y 5
A7	2
A8	2
A9	2
A10	1
A11	1 y 2 y 6
A12	2 y 6



Lo primero que llama la atención al observar el diagrama es la preponderancia del esquema de argumentación externo en los estudiantes cuando se los enfrenta al análisis de pruebas elaboradas por otros.

Un solo estudiante tiene un esquema de argumentación deductivo en estado puro en la medida que lo convencieron las pruebas deductivas aunque aparecieran escritas en lenguaje natural y detectó las fallas de las pruebas que usaban notación matemática.

Once de los doce estudiantes presentan rasgos marcados del esquema de argumentación externo, cinco de los cuales están en estado puro. La asignación de un esquema de argumentación externo para estos estudiantes se debió a la presencia de una o varias de las siguientes características en sus respuestas:

• La presencia de números en una prueba hace que sea descartada como convincente. El origen de esta consideración empleada por más de un estudiante –siete de los doce- parecería ser que "los ejemplos no demuestran". Esto lleva a que al percibirse la presencia de algún o algunos ejemplos (como en el caso de la prueba 3 de la proposición 1) ya se descarte la prueba como convincente y que ni siquiera se lea la parte de la prueba escrita en lengua natural.

• Una prueba para ser convincente debe incluir notación matemática y todo debe estar fundamentado, según lo manifestado por ocho de los estudiantes. Esta característica hace que sean consideradas convincentes pruebas que tienen este aspecto pero que solo contemplan casos particulares o las fundamentaciones que incluyen son falsas, lo que concuerda con los hallazgos de Martin y Harel (1989). Este aspecto de la prueba es determinante en su aceptación y parece impedir la consideración de los argumentos y detalles que conforman la prueba, su aspecto general ya resulta lo suficientemente convincente como para analizar los detalles de la misma. Es así que, por ejemplo, no se llega a tomar conciencia de los casos particulares a los que se refiere la prueba 1 de la proposición 1.

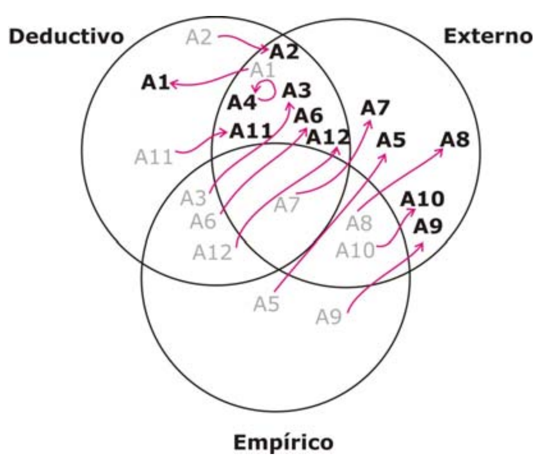
• Una prueba dada en lenguaje natural no es convincente. Esto lleva a que algunos estudiantes ni siquiera lleguen a leer el texto de pruebas como la 4 de la proposición 1 o la prueba 2 de la proposición 2. Parecería haber un componente gestáltico de primera impresión global que determinara lo convincente o no de una prueba: si no incluye notación matemática no es convincente y si la incluye sí es convincente.

• Las proposiciones son verdaderas. La prueba 1 de la proposición 2 es considerada no convincente por algunos estudiantes en la medida que prueba que la suma de los ángulos A, B y C no es constante. Recordemos que el cuestionario 2, proposición 2, consistía en pruebas que fundamentaban el valor de verdad de la proposición "la suma de los ángulos A, B y C es constante". La afirmación en que consiste la proposición es considerada de antemano como verdadera. Puede concluirse que, para algunos estudiantes, las actividades escritas en forma de proposición en el ámbito escolar son consideradas verdaderas y por lo tanto hay que probarlas. El estudiante A11 lo dice expresamente "*Cuando me dan un problema para demostrar tengo que demostrar lo que me dice… Acá dice que la suma de los ángulos es constante… y el tipo demostró que no es constante… si me pasa eso, algo hice mal yo…*"

Frente al cuestionario 2, lo que convence o no a los estudiantes, no tiene que ver con la comprensión de las pruebas en la medida que en muchos casos no llegan a esa instancia, sino que está vinculado a los factores de procedencia externa antes mencionados.

Podemos observar globalmente lo producido por los estudiantes frente a los dos cuestionarios en el siguiente esquema:

Alumno	Esquema en base al cuestionario 1	Esquema en base al cuestionario 2
A1	1 y 2 y 6	5 y 6
A2	6	2 y 6
A3	3a y 3b y 6	1 y 5 y 6
A4	2 y 5 y 6	1 y 5
A5	3a	2
A6	3a y 6	1 y 2 y 5
A7	1 y 3a y 3b y 6	2
A8	3a y 1	2
A9	4	2
A10	3a y 1	1
A11	6	1 y 2 y 6
A12	3a y 6	2 y 6



En el cuestionario 1 el estudiante necesariamente debe realizar acciones que le permitan entender y generar explicaciones que le sean significativas.

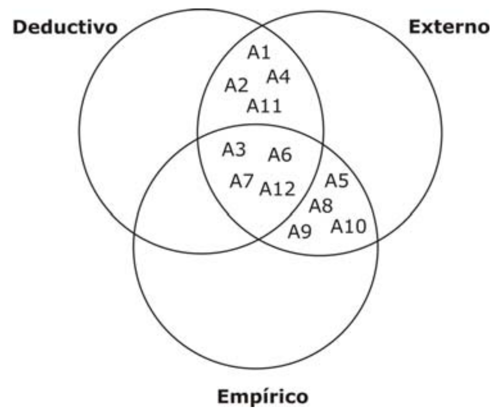
No ocurre lo mismo con el cuestionario 2 donde no necesariamente el estudiante tiene que pasar por una etapa de entendimiento ya que hay otros aspectos que influyen en la aceptación o no de las pruebas.

En el cuestionario 1 el estudiante está en un lugar que no es frecuente: el de generador de argumentos y por lo tanto es imprescindible que se conecte con sus propios conocimientos. Las preguntas formuladas en las actividades que conforman este cuestionario –como se fundamentó previamente- buscan generar un vacío en el estudiante en la medida que este no tiene una respuesta y tiene que generarla apelando a sus propios argumentos. Hay un componente central de incertidumbre que lo coloca en la necesidad de buscar una respuesta que le satisfaga. Este puede ser el motivo principal por el cual no se registraron esquemas de argumentación puramente externos frente a este cuestionario. Es posible que frente a actividades donde los estudiantes ya conozcan las respuestas a las preguntas que se les formulan se detecte una mayor presencia de esquemas de argumentación externos.

En el cuestionario 2 el estudiante es puesto en un lugar de observar lo hecho por otro. Esto posiblemente le resulta de una exigencia mayor a la que enfrentó en el cuestionario 1 ya que debe interpretar pensamientos que le son ajenos y esta es una tarea que no está acostumbrado a realizar. En muchos de los casos las respuestas acerca de si las pruebas lo convencen o no toman en cuenta exclusivamente la apariencia, la presentación, y no el argumento de las mismas. Quizás sea este uno de los motivos por los cuales hay una mayoritaria presencia de esquemas de argumentación externos ya sea en estado puro o combinados con esquemas empíricos o deductivos.

En base a lo antes expuesto, concluimos que los esquemas de argumentación presentes en los doce estudiantes de primer año de profesorado de matemática del Instituto de Profesores Artigas considerados, son los siguientes:

Alumno	Esquema de argumentación
A1	1 y 2 y 5 y 6
A2	2 y 6
A3	1 y 2 y 3a y 5 y 6
A4	1 y 6
A5	2 y 3a
A6	1 y 2 y 3a y 5 y 6
A7	1 y 2 y 3a y 3b y 6
A8	1 y 2 y 3a
A9	2 y 4
A10	1 y 3a
A11	6 y 2
A12	2 y 6 y 3a



Los resultados de la presente investigación son coincidentes con los de Ibañes (2002) en una investigación hecha con estudiantes de bachillerato. Este estudio viene al caso aquí en la medida dado que son estudiantes de bachillerato y los estudiantes con los que hicimos nuestro estudio habían culminado bachillerato hacía menos de un año.

Ibañes sostiene que lo constituye comprobación y convencimiento para los alumnos de bachillerato que participaron del estudio no es algo fijo y determinado, sino variable. La variedad se manifiesta:
- En la amplia gama de esquemas de prueba exhibidos por los alumnos.
- En la abundancia de respuestas, de una misma persona, que presentan rasgos de distintos esquemas de prueba.
- En el escaso número de alumnos que repiten el mismo esquema de prueba para resolver distintos problemas.

Todos estos aspectos coinciden con lo detectado en esta investigación. Compartimos con este autor las conclusiones a las que arriba:

> Los alumnos de este nivel se encuentran en un estado de transición bajo la influencia de distintos esquemas, no siendo plenamente conscientes ni de sus diferencias ni de sus limitaciones; y, por consiguiente, utilizan uno u otro según las peculiaridades de lo que se les propone, o, incluso, emplean varios al mismo tiempo. En consecuencia, no parece conveniente –en principio- hablar del

> esquema de prueba de tal alumno, sino del esquema que ha *utilizado* para resolver un problema determinado. (p. 16)

Martínez Recio (2002) encuentra que un porcentaje importante de estudiantes acude espontáneamente a argumentaciones empírico-inductivas para hacer demostraciones matemáticas. Es decir, como sistema de demostración acude a una comprobación del enunciado en varios casos particulares, con intención de confirmar su cumplimiento de una forma generalizada.

En nuestro estudio, las dos terceras partes de los estudiantes considerados recurren a argumentos empíricos como forma de convencer a otros o de auto convicción. A diferencia del estudio de Martínez Recio, es de resaltar que el esquema de argumentación empírico en estado puro no se presenta sino que aparece junto a características de esquemas de argumentación externos o con características de esquemas de argumentación externos y deductivos.

Observamos que en nuestros estudiantes conviven, en forma no excluyente, argumentos empíricos y deductivos. Esto coincide con lo reportado por Martin y Harel (1989), quienes como hipótesis para explicar el fenómeno sugieren que el marco inductivo, que se construyó en una etapa anterior al marco deductivo, no es eliminado de la memoria cuando los estudiantes adquieren el marco deductivo. Por otra parte, la experiencia cotidiana de formarse y evaluar situaciones mediante el uso de evidencia para fundamentarlas o refutarlas sirve para fortalecer el marco inductivo. En el mismo sentido se expresan Recio y Godino (2001) a la hora de explicar la convivencia de esquemas de argumentación empíricos y deductivos en los estudiantes cuando abordan tareas matemáticas. Estos autores sostienen que esto se debe a que los estudiantes, de diversas maneras, participan de distintos contextos institucionales como la vida cotidiana, las ciencias experimentales, la matemática profesional, la lógica, y que en cada una de estas instituciones el significado de demostración es distinto y eso posibilita la convivencia en los estudiantes de esquemas de argumentación empíricos y deductivos en el ámbito de las clases de matemática.

7.3. Reflexiones

Otra característica que se puede desprender de las afirmaciones de los estudiantes frente a ambos cuestionarios o en las entrevistas podría sintetizarse en la expresión: para probar que una proposición es falsa alcanza un contraejemplo. Esta afirmación es correcta. Pero en estos estudiantes parecería llevar otra afirmación implícita: para probar que una proposición es falsa *la única manera de hacerlo* es explicitando un contraejemplo. Esta afirmación, además de más exigente que la anterior, es incorrecta.

Harel y Sowder (1998, p. 253) sostienen en su estudio que los estudiantes con los que trabajaron "raramente usan demostraciones por contraejemplo y no parecen ser convencidos por ellas… además les resulta confuso la admisibilidad de la demostración por contraejemplo y la no admisibilidad de demostraciones mediante ejemplos". Por otro lado, "incluso cuando se halle un contraejemplo para la proposición, esta sigue en pie a los ojos de los estudiantes porque este es solo una excepción a la regla general" (Harel y Sowder, 1998, p. 254).

En la consideración de contraejemplos para establecer que una proposición es falsa debemos tener en cuenta que hay situaciones donde pareciera haber un único contraejemplo –o al menos esta es la idea que queda en los estudiantes-, como es el caso de la función valor absoluto de *x* como la única función real que es continua y no derivable, o como la función real f(x) = e^{-x^2} como la única función sin primitiva. Peled y Zaslavsky (1997) sostienen que el profesor al presentar un contraejemplo lo considera el representante de una clase mientras que el estudiante lo ve como un caso único.

"Ejemplos no demuestran" es otra de las ideas presentes en muchos de los estudiantes. Podríamos reformularla para la formación de un profesor de matemática de la siguiente manera: "ejemplos no demuestran, ¡pero cómo aclaran!".

La idea de que los ejemplos no demuestran viene acompañada de una desvalorización de los mismos en un doble aspecto. Por un lado, en la formación de una conjetura, los ejemplos muchas veces después de ser hechos por los estudiantes que participaron del estudio, son borrados porque no dieron paso a una demostración y no se los valora debidamente como un posible primer paso en la toma de decisión. En otras ocasiones, donde sí se elaboró una demostración, los ejemplos son borrados porque no forman parte de la demostración.

La presencia de ejemplos en algunas de las pruebas deductivas presentadas en el cuestionario 2 lleva a que algunos estudiantes las consideren no convincentes por el solo hecho de contener ejemplos. De esta manera la presencia de ejemplos actúa como una traba en la consideración de los argumentos que conforman la prueba.

Por otro lado, frente a esquemas de argumentación empíricos que mostraron algunos estudiantes frente al cuestionario 1, puede deberse a que el ejemplo sea visto por los estudiantes sin características especiales, particulares, y de esta manera tenido como un representante cualquiera de la proposición general y por lo tanto como una vía aceptable de validación de la misma. "El ejemplo es tomado como representativo de toda la clase" (Harel y Sowder, 1998, p. 253).

Vinculado a la consideración de ejemplos vemos las demostraciones de existencia donde alcanza con ofrecer un único ejemplo para que la proposición sea verdadera. En esta categoría de demostración tendrían cabida la gran mayoría de construcciones geométricas. ¿Incide esto en la visión del papel de los ejemplos por parte de los estudiantes? Es posible que las demostraciones de existencia no sean vistas como demostraciones por parte del cuerpo docente y que por lo tanto este factor no sea cognitiva ni didácticamente relevante. En el presente estudio no se tuvo en cuenta este aspecto, así como tampoco la consideración del contraejemplo como prueba y es una posible vía de ampliación del mismo.

Vinculado al uso de ejemplos, otro aspecto a tener en cuenta es que las demostraciones no convencen a muchos estudiantes, por lo que estos –además de las demostraciones- recurran a ejemplos para conseguir una más plena convicción de un resultado. En este sentido Fischbein y Kedem (1982, citado en Martin y Harel, 1989) hallaron que muchos estudiantes que estaban convencidos por pruebas deductivas aún necesitaban verificación empírica adicional. Esto sugiere que la activación de los marcos deductivo e inductivo puede ser requerida por parte de los estudiantes para creer una proposición determinada.

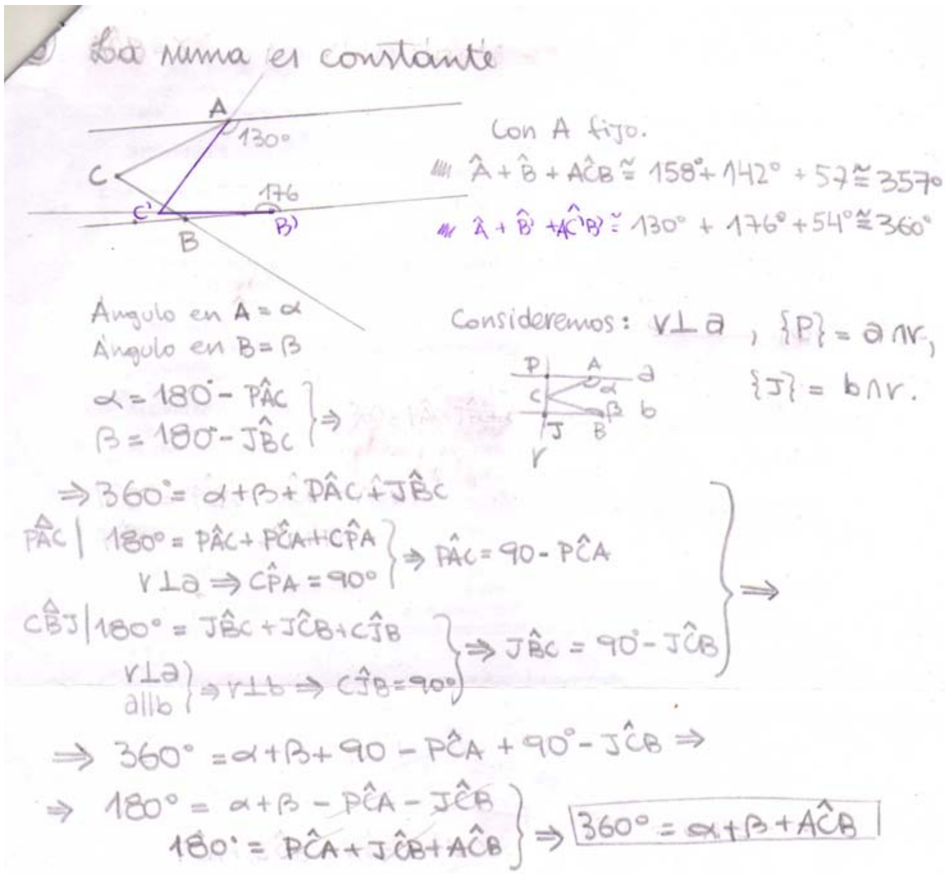
Otro aspecto a tener en cuenta a la hora de trabajar en torno a la fundamentación de proposiciones matemáticas es el relacionado a la forma de escribir los argumentos involucrados en la fundamentación. Muchos de los estudiantes que participaron del estudio ven como una condición necesaria para que una prueba sea convincente que incluya símbolos matemáticos. Pero la presencia de símbolos también es vista como una condición suficiente. La sola presencia de símbolos en una prueba actúa como garante general de su aceptación sin que los argumentos involucrados sean puestos a consideración.

En forma especular una prueba dada en lenguaje natural es condición suficiente para que sea considerada como no convincente y la sola presencia del lenguaje natural actúa como una barrera que muchas veces no permite poner en consideración los argumentos. Cuando los argumentos son considerados y entendidos, la ausencia de notación matemática es señalada como un defecto. A la hora de pensar en la enseñanza deberíamos tener presente lo que sostiene Cobb (1986, citado en Almeida y Chamoso, 2001, p. 105):

> Si el niño no comprende intuitivamente que los formalismos usuales son un convenio de la forma de expresar y comunicar el pensamiento matemático, puede que éstos se traduzcan en dictados arbitrarios de una autoridad. En este caso la meta global del niño podría convertirse en satisfacer las exigencias de la autoridad, en lugar de aprender las matemáticas por sí mismas.

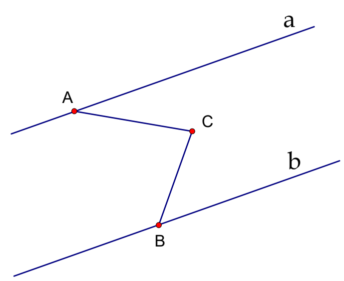
Las formas de escribir las pruebas es un aspecto específico a atender en la formación de un profesor. Cirillo y Herbst (2012) proponen algunas alternativas para la escritura de demostraciones en el ámbito de la geometría.

Una constatación que se desprende del estudio es que a la hora de proponer actividades donde la responsabilidad de elaborar una prueba recae sobre los estudiantes (como en el cuestionario 1) surgen diversidad de pruebas. La diversidad de pruebas empíricas es una buena vía para tomar contacto con formas de concebir las pruebas por parte de los estudiantes, aspecto que difícilmente surja en el modelo de clase expositiva. Pero la diversidad de pruebas también surge en las pruebas deductivas. Por ejemplo, la estudiante A4 elaboró la siguiente demostración:



El análisis y comparación de distintas demostraciones puede permitir analizar los argumentos puestos en juego en cada una así como explicitar preferencias ya sea en cuanto a economía, belleza u otros criterios. Esta diversidad de demostraciones difícilmente pueda darse en el ámbito de una clase donde la responsabilidad de mostrar las demostraciones recae en el profesor. Una clase donde la responsabilidad de elaborar pruebas sea de los estudiantes será indudablemente más rica, diversa, variada, incluso puede serlo en lo referente a las demostraciones.

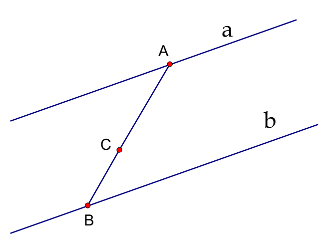
Otro aspecto a tener en cuenta la hora de pensar en actividades con el propósito de involucrar a los estudiantes en la elaboración de pruebas, como ya se expresó anteriormente, es que habiliten una gama lo más amplia posible de pruebas. En el caso de la actividad 2 propuesta en el primer cuestionario optamos por una configuración al presentar la figura que acompañaba al enunciado, y dicha elección seguramente afectó de alguna manera las pruebas que se produjeron. ¿Qué hubiese pasado si la figura dada hubiese sido la siguiente?



Una prueba deductiva posible tomando como base esta configuración –usando la idea empleada por muchos estudiantes de prolongar el segmento BC- parece más simple, de más fácil producción, es decir consistente en menor cantidad de pasos deductivos.

A los efectos de la determinación de los esquemas de argumentación de los estudiantes cualquiera de las dos configuraciones puede ser igualmente útil. Pero a los efectos de su consideración en clase tengamos en cuenta que si bien ambas configuraciones habilitan demostraciones que tienen un viso de generalidad en realidad cada una de ellas por separado no da cuenta de la generalidad de la situación planteada. La puesta a consideración de los argumentos puestos en juego en uno y otro caso pueden contribuir a esclarecer la situación general.

Aún considerando las dos configuraciones, cada una con su respectiva demostración, no estaríamos dando cuenta de la situación planteada ya que se seguiría excluyendo el caso en que A, B y C están alineados:



Los argumentos deductivos que pueden dar cuenta de esta situación no son los mismos que entran en juego en las demostraciones anteriores, son nuevos, particulares, peculiares.

En resumen, para dar cuenta plenamente de la situación mediante argumentos deductivos parece inevitable recurrir a la consideración de tres configuraciones distintas, cada una con sus particularidades y dificultades específicas.

Como recomendación principal que desprendemos de nuestro estudio para tener en cuenta a la hora de promover la elaboración y tratamiento de pruebas en la formación de un profesor de matemática de enseñanza media consideramos tratar los esquemas de argumentación externos, empíricos y deductivos en conjunto. Estos tres esquemas básicos de argumentación consideramos se manifestarán a la hora del trabajo en clase y aparecerán en un mismo estudiante en distintos momentos de la elaboración de una prueba o frente a distintas actividades o también surgirán como formas de fundamentar una misma actividad por parte de distintos estudiantes. Tratarlos en conjunto implica poner en consideración del colectivo todas las pruebas que produzca el mismo haciendo explícitos los alcances de cada prueba, analizando lo que aporta a la clarificación y fundamentación de cada proposición. Las pruebas generadas por estudiantes con cualquiera de estos tres esquemas pueden aportar en este sentido.

Las pruebas empíricas pueden cumplir un papel importante a la hora de resolver acerca de si una proposición es verdadera o falsa. Constatamos una desvalorización en la consideración de ejemplos por parte de los estudiantes en la medida que los ocultan, los tachan o los borran por no considerarlos parte del quehacer matemático. La consideración de casos particulares también puede aportar en la comprensión de situaciones más generales y así pasar a cumplir un papel generador de comprensión y de argumentos más potentes.

Las pruebas elaboradas por estudiantes con un esquema de argumentación deductivo podrían considerarse en un primer momento como la panacea, como la finalidad de la enseñanza de la matemática si de demostrar se trata. Pero según se desprende de lo constatado en nuestro estudio estudiantes con este esquema de argumentación también dan muestras de ciertos estereotipos de cómo debe ser escrita una demostración para ser considerada tal: debe contener símbolos matemáticos y no puede ser expresada en lenguaje natural. Este es un aspecto a tratar en clase en la media que la forma en que se presenta el argumento prima sobre el contenido del mismo. Compartimos con Hanna (1989) que el valor de un argumento, ya sea que incluya razonamiento formal o informal, puede ser juzgado solo por el grado de mayor comprensión que promueve, por lo que recomienda que sean las pruebas que explican las que sean usadas en la enseñanza. Un futuro profesor consideramos debería tener una visión amplia de las pruebas deductivas y de las pruebas en general y de esta manera ser capaz de valorar las pruebas producidas por sus futuros estudiantes.

Las pruebas validadas por un esquema de argumentación externo se dieron mayoritariamente en las respuestas al segundo cuestionario donde debían analizar pruebas elaboradas por otros. La ausencia de símbolos y que ejemplos no prueban eran tenidos muy presentes en este cuestionario 2 por estudiantes que frente al primer cuestionario –donde tenían que elaborar pruebas- habían ofrecido argumentos empíricos como convincentes. Nos parece saludable poner a discusión en la clase el análisis de estas ideas que forman parte de las concepciones de los estudiantes. Las demostraciones realizadas por el profesor en el pizarrón o las que figuran en los libros de textos llevan implícita una carga de corrección, de ser indiscutibles. Pensamos que una forma de hacer explícitas esas ideas y ponerlas a debate es analizando pruebas del más variado tipo y procedencia.

Este fue un estudio centrado en aspectos cognitivos individuales y que toma en cuenta lo propuesto en dos instancias puntuales (y entrevistas), pero la formación de un profesor de matemática es centralmente colectiva, se desarrolla en un aula, y estos esquemas de argumentación pueden sernos útiles para imaginar y diseñar prácticas de trabajo que contemplen trabajo individual, trabajo en pequeños grupos, trabajo de puesta en común a la clase.

En base a lo que constatamos en este estudio en lo referido a que muchos estudiantes juzgan convincentes o no una prueba teniendo en cuenta su apariencia y sin tener en cuenta sus argumentos, parece natural pensar que la formación que viva un estudiante de profesorado de matemática tenga en cuenta estas características para modificarlas. Es necesario que un estudiante pueda entender los argumentos dados por otros, ya sea este otro un compañero, un libro de texto o el profesor. Es necesario que cambie sus concepciones acerca de lo que es una prueba, que no se guíe por criterios externos sino por criterios propios fundamentados, y para ello parece imprescindible enfrentarlo a distintas demostraciones y pruebas, dadas tanto en un formato escrito como oral. El coloquio entre pares con una adecuada intervención del docente, parecen aspectos imprescindibles a tener en cuenta en dicho proceso.

En el presente estudio hemos constatado la diversidad de los esquemas de argumentación presentes en los estudiantes que ingresan al profesorado. Esta diversidad debe ser en primer lugar aceptada y considerada bienvenida, en segundo lugar promovida y en tercer lugar tratada adecuadamente. El tratamiento que proponemos es el explicitado previamente: considerar los esquemas de argumentación y sus combinaciones como un nudo borromeo, donde cada uno de estos esquemas es inseparable de los otros y tiene para aportar sobre la claridad de los otros. En la medida que un estudiante, futuro profesor de matemática, pueda hacer consciente los aportes de cada una de estas maneras de argumentar pensamos tendrá una visión rica y compleja de los argumentos que pueda usar en su propia formación así como de los que va a oír de sus estudiantes cuando sea profesor y de esta manera no descarte a priori ninguno de ellos.

7.4. Consideraciones para la enseñanza

Incluimos en este apartado algunas reflexiones sobre aspectos que si bien no formaron parte de nuestro objetivo de investigación –conocer los esquemas de argumentación de los estudiantes que ingresan al profesorado de matemática en el Instituto de Profesores Artigas-, sí surgen vinculados al mismo.

Orientamos estas reflexiones en el marco de la siguiente interrogante: ¿estas características detectadas son las deseables en la formación de un profesor de matemática de enseñanza media?
En la asignación de un esquema de argumentación externo para algunos estudiantes frente a la prueba 1 (proposición 1) del cuestionario 2, tuvimos en cuenta alguna, algunas o cada una de las cuatro características mencionadas previamente.

Estos cuatro factores consideramos fueron incorporados por los estudiantes como consecuencia de sus prácticas de aprendizaje en el aula de matemática. Las proposiciones que se demuestran en clase y en los libros de texto son en su mayoría verdaderas, son teoremas o ejercicios donde se pide "demuestre que…" y difícilmente en un libro de texto se demuestre que una proposición es falsa o se ponga en consideración si una proposición es verdadera o falsa y por qué.

Las demostraciones presentes en los libros de texto o hechas por el profesor en clase suelen hacer uso casi exclusivo de notación matemática y difícilmente se escriba una demostración recurriendo al lenguaje natural.

A este respecto Olave (2013) afirma que los textos recomendados en el IPA presentan un conocimiento que consiste en un conjunto de resultados (axiomas, definiciones, teoremas) ya establecidos donde la matemática es concebida como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos. Plantea que esta concepción podría inducir a los formadores a desarrollar clases en las que el profesor es quien define los conceptos, propone ejemplos, demuestra las propiedades y luego los alumnos aplican dichos conceptos y propiedades a la resolución de ejercicios. Esto puede explicar el comportamiento de los estudiantes que frente al cuestionario 2 una amplísima mayoría (11 en 12) presentan esquemas de argumentación externos, ya sea en estado puro o combinados con esquemas empíricos o deductivos. Pensamos que esto se podría deber a la forma en que los estudiantes han vivido el tratamiento de la demostración en sus cursos donde las demostraciones suelen involucrar una secuencia de pasos deductivos y sus justificaciones haciendo uso de manipulaciones simbólicas. Raramente se presentan demostraciones donde los argumentos sean dados haciendo uso de lenguaje cotidiano. Generalmente en las clases el estudiante observa cómo el docente demuestra y ante alguna incomprensión puede preguntar y el profesor explica. Frente a este cuestionario no puede recurrir a ningún intermediario que le ayude en la comprensión de una demostración, no puede recurrir al docente y tampoco al estudiante que elaboró la prueba. Otro aspecto del tratamiento de la demostración en clase es que el profesor es el garante tanto de la verdad de lo que se demuestra como del proceso mediante el cual se hace, transformando estos dos aspectos en incuestionables. Esto quita al estudiante la responsabilidad sobre dos aspectos de las pruebas: la veracidad de los argumentos y la forma de escribirlos. El no tener esa responsabilidad posiblemente contribuye a que los estudiantes no desarrollen y expongan sus propias formas de escribir y de esta menara conciban que hay una manera única de hacerlo que es la de su profesor.

Gran parte de la responsabilidad acerca de cómo se aborda la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el salón de clase es del profesor y lo que nuestro estudio muestra acerca del comportamiento de los estudiantes en lo referido a la temática estudiada tiene un origen en cómo los profesores abordaron esta temática en sus clases. A su vez, es posible que las concepciones de los profesores en torno a la demostración tengan uno de sus orígenes en una visión errada acerca de cómo son las cosas en la comunidad matemática.

Si en el ámbito de la matemática profesional la demostración rigurosa no figura entre los primeros criterios para aceptar un resultado matemático (Hanna, 1991) ¿por qué en el ámbito de la formación de profesores esta ocupa un lugar tan preponderante? Hanna incorpora una visión de los matemáticos como una comunidad. Las matemáticas pueden ser concebidas así no solo como grandes concatenaciones de axiomas, definiciones y teoremas regidos por una estricta lógica deductiva, sino que puede pensarse "como lo que hacen los matemáticos". Esta visión sirve a la enseñanza de la matemática ya que permite pensar la matemática más allá de sus exigencias de rigor interno e incorporar para su enseñanza la visión de la matemática como actividad realizada por un colectivo (estudiantes y profesor).

Si en la misma ciencia matemática no está claro qué es una demostración y que no hay un estándar absoluto para decidir qué es una demostración (Dreyfus, 2000), consideramos que en la enseñanza no nos deberíamos atar a estándares rigurosos sino más bien asumir la demostración en un sentido amplio, no como algo fijado de antemano sino capaz de evolucionar con los propios estudiantes, una concepción de la demostración que se desarrolle junto con la madurez matemática del estudiante. Coincidimos con Tall (1995) en que se pueden concebir distintas formas de demostración apropiadas a diferentes contextos.

Una característica registrada en varios de los estudiantes al considerar la prueba 1 de la proposición 2 del cuestionario 2 consistió en que la consideraran no convincente en la medida que era errada ya que probaba que la suma de los ángulos A, B y C no era constante y según entendían la proposición, por ser tal, ya sostenía que la suma de dichos ángulos era constante. Consideramos que este hecho es consecuencia del tratamiento que reciben las proposiciones matemáticas en la enseñanza que han vivido estos estudiantes: la mayoría de las proposiciones consideradas son verdaderas. Lo que suele estar ausente, tanto de los textos como de las aulas, son las proposiciones falsas y más en general la puesta en consideración del valor de verdad de las proposiciones. ¿Es que la consideración de proposiciones falsas tiene algo para aportar a la comprensión matemática? Consideramos que sí y mucho. Una vasta gama de proposiciones verdaderas podrían ser mejor apreciadas si se trataran en el marco de un conjunto de proposiciones aledañas, similares, emparentadas, que no lo son. O también podría pensarse en actividades que consistieran en modificar ciertas condiciones de manera de hacer que ciertas proposiciones falsas pasen a ser verdaderas. Por ejemplo, ante la proposición "dos rombos con lados iguales son congruentes" podría considerarse qué nuevas condiciones podrían agregarse para que sea verdadera. Esto podría contribuir a clarificar la imprescindible presencia de ciertas condiciones para que la proposición sea verdadera y de esta forma la proposición verdadera resultante sería vista en el mismo contexto que un conjunto de proposiciones donde intervienen condiciones que involucran elementos similares pero que son falsas.

¿Por qué no incluir preguntas en el trabajo matemático? ¿Por qué no incluir en los cursos la decisión sobre el valor de verdad de proposiciones que puedan ser verdaderas o falsas? Los cursos actuales parecerían privilegiar la demostración de proposiciones que son de partida verdaderas y lo que está en juego es cómo demostrarlas. Lo que está en juego es por qué una proposición es verdadera pero difícilmente entra en juego una pregunta que consideramos imprescindible y previa: ¿la proposición es verdadera o falsa? La actual manera de enseñar puede estar contribuyendo a que la demostración sea vista por los estudiantes como un ritual a seguir. Lo que raramente se pone en juego en las clases es el valor de verdad de una proposición. Se pierde así una posibilidad de dar sentido a la demostración en los cursos: establecer el valor de verdad de una proposición.

Por otro lado los ejemplos también suelen ser desvalorizados por el profesor a la hora de presentar la demostración de un teorema mediante la no consideración de ejemplos que podrían contribuir a una mejor comprensión del argumento general, tanto previo a la demostración como a posteriori de la misma donde podrían aportar a la constatación y clarificación de que la demostración general se aplica a casos particulares, cosa nada evidente para muchos estudiantes.

¿Es imprescindible la conjetura como paso previo a la elaboración de una demostración? De Villiers refiriéndose a la función de la demostración como medio de verificación/convicción se inclina por pensar que más bien la situación es al revés: que la convicción posiblemente sea un prerrequisito para la búsqueda de la demostración. "Por qué abstrusas y obscuras razones íbamos a perder meses, años incluso, para demostrar ciertas conjeturas, si no estamos ya convencidos de antemano de su veracidad?" (De Villiers, 1993, p. 18). Este autor menciona a Polya sosteniendo una posición en el mismo sentido: una vez que el teorema ha sido verificado en varios casos particulares es que conseguimos confianza en que es cierto y es recién después de esta convicción en que el teorema es verdadero que se empieza a demostrarlo.

Frente a la actividad 2 del cuestionario 1 solo una estudiante realizó acciones tendientes a establecer antes que nada una conjetura y recién después se abocó a la tarea de elaborar una demostración. El resto de los estudiantes que elaboraron pruebas deductivas abordó la actividad sin tener una respuesta para la pregunta. Esta respuesta solo fue obtenida al culminar la demostración. En ningún momento formularon una conjetura acerca de si la suma de los tres ángulos era constante o no, la demostración fue la que permitió dar una respuesta a la pregunta.

Tanto De Villiers como Polya hacen referencia al trabajo del matemático profesional al abordar un problema para el cual la comunidad no tiene una respuesta y donde los tiempos para elaborar una respuesta que conforme puede medirse en meses o años (o en algunos casos incluso siglos). Los problemas que suele proponer el profesor en el aula por lo general difieren radicalmente de los problemas que aborda la comunidad matemática en la medida que el profesor ya sabe la respuesta y sabe cómo demostrarla, el problema puede ser resuelto y demostrado en el tiempo de una clase. Esto último también es sabido implícitamente por el estudiante y si este no consigue elaborar una respuesta en un lapso breve de tiempo posiblemente abandone el problema y espere la respuesta dada por otro estudiante o por el profesor.

8. Referencias

Almeida, D. y Chamoso, J. (2001). ¿Existen lazos entre democracia y matemáticas? *Uno Revista de didáctica de las matemáticas*, *28*, 100-109.

Arellano, C. (2013). *La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Querétaro, México. Recuperado de: http://ri.uaq.mx/bitstream/123456789/1232/1/RI000656.pdf

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London, U. K.: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Cabassut, R., Conner, A-M., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. y Morselli, F. (2012). Conceptions of Proof – In Research and Teaching. En G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 169-190). Alemania: Springer.

Cirillo, M. y Herbst, P. (2012). Moving Toward More Authentic Proof Practices in Geometry. *The Mathematics Educator*, *21*(2), 11-33.

De Villiers, M. (1992). Children's acceptance of theorems in geometry. *Draft for poster presentation at PME 16, 6-11 August, University of New Hampshire, U.S.A.* Recuperado de: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, 15-30.

De Villiers, M. (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: some personal reflections. En J. R. King y D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research* (pp. 15-24). USA: MAA.

Dirección de Formación y Perfeccionamiento Docente (DF y PD) (2008). *Programas de matemática*. Recuperado de: http://www.cfe.edu.uy/index.php/planes-y-programas/planes-vigentes-para-profesorado/44-planes-y-programas/profesorado-2008/380-matematica

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículum. En *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional (*pp. 125-134). Barcelona, España: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

Duarte, B. (2010). Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática. Argentina. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de San Andrés, Argentina.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fernández, J. (2013). *El desarrollo del sentido de los símbolos en la formación inicial de profesores de matemática. Reflexiones en torno a la enseñanza del álgebra*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Comahue, Neuquén-Argentina.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics*, *3*(2), 9-24.

Flores, H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Guerrero, V. (2015). Procesos de validación en Geometría en situaciones de conflicto. XIV CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática) (pp. 151-160). Chiapas, México.

Hadas, N. , Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127-150.

Hanna, G. (1989). Proof that prove and proofs that explain. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 45-51). Paris.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 54-61). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 21-33). Valencia, Spain.

Hanna, G. y de Villiers, M. (2012). Aspects of proof in Mathematics Education. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 1-11). Dordrecht: ICMI y Springer.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 234-283.

Healy, L. y Hoyles, C. (1999). Student's performance in proving: competence or curriculum? En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the 1st Conference of the European Research in Mathematics Education I*, Group 1, Vol 1 (pp. 153-167). Recuperado de: http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks.html

Herbst, P. (2000). *¿A dónde va la investigación sobre prueba?* En N. Balacheff, *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (pp. 191-199). Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

Ibañes, M. (2002). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 11-26). Almería: Universidad de Almería.

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.

Lin, F-L. (2005). Modeling students' learning on mathematical proof and refutation. En Chick, H. L. y Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 3-18). Melbourne: PME.

Mariotti, A. (2008). Reasoning, proof and proving in mathematics education. En M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (ICME 10) (pp. 182-204). Copenhagen: Denmark.

Martín, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 41-51.

Martínez Recio, A. (2002). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 29-43). Almería: Universidad de Almería.

Moreno Castillo, R. (2002). *Omar Jayyam. Poeta y matemático*. Madrid: Nivola.

Mudaly, V. y De Villiers, M. (2000). Lerners' needs for conviction and explanation within the context of Dynamic Geometry. *Pythagoras*, *52*, 20-23. Recuperado de: http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 1-24.

Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de casos.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México. Recuperado de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis03.html

Peled, I. y Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *19*(3), 49-61.

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 83-99.

Sáenz Castro, C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de la matemática. En M. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 29-43). Almería: Universidad de Almería.

Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.

Sekiguchi, Y. (1996). What is really special in the learning of proof for students?: An ethnographic analysis. *Proceedings of Topic Group 8: Proofs and Proving: Why, when and how? 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 241-256). South Africa: Association form Mathematics Education of South Africa.

Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. Artículo preparado para la conferencia *Justifying and Proving in School Mathematics*, Institute of Education, London, December 1995, pp. 27–38.
Recuperado de:
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.5112&rep=rep1&type=pdf

Anexo

Cuadro que recopila toda la información surgida del análisis realizado en el capítulo 6 en el que se detalla el esquema de argumentación de los doce estudiantes frente a cada actividad propuesta.

Alumno	Cuestionario 1				Esquema en base a cuestionario 1	Cuestionario 2										Esquema en base a cuestionario 2	Esquema de argumentación
						Proposición 1					Proposición 2						
	1	*2*	*3*	*4*		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*		
A1	X	2	6 y 1	X	1 y 2 y 6	D	D	6y2	6y2	D	D	D	D	D	D	5 y 6	1 y 2 y 5 y 6
A2	X	6	X	6	6	D	D	6y2	6y2	D	D	2				2 y 6	2 y 6
A3	X	6	3b	3a	3a y 3b y 6	D	D	5	6	D	1	D	D	D	D	1 y 5 y 6	1 1 y 2 y 3a y 5 y 6
A4	6 y 1	6	3b y 5	6	2 y 5 y 6	1	D	D	D		1	6y1	D	D	D	1 y 5	1 y 6
A5	3a	3a	3a	3a	3a						2					2	2 y 3a
A6	6	3a	X	X	3a y 6	2			6			1	5			1 y 2 y 5	1 y 2 y 3a y 5 y 6
A7	6	3a	3b y 1	3a	1 y 3a y 3b y 6	2		2	X		2			2			1 y 2 y 3a y 3b y 6
A8	3a	1	3a	X	3a y 1	2		2	2	2		2		2	2	2	1 y 2 y 3a
A9	4	E	4	X	4	2	2	2						2	2	2	2 y 4
A10	1	3a	3b	X	3a y 1	1										1	1 y 3a
A11	6	X	6	6	6	2	2	2	2		1	6				1 y 2 y 6	6 y 2
A12	3a	X	6	6	3a y 6	2		2	2	6						2 y 6	2 y 6 y 3a

ISBN (en línea): 978-9974-8577-6-6