Fondo CFE para la financiación de equipos de iniciación a la investigación

PRADINE 2021

Planificación y análisis colaborativos de una clase de matemática para la formación en geometría de futuros maestros y profesores de matemática. Un ciclo de Lesson Study

Integrantes del equipo: Fernando Espantoso

Jimena Fernández

Mónica Olave

Tutora: Daniela Pagés

Índice

1 Introducción

Las prácticas docentes habituales suelen ser aisladas. Si bien las y los docentes, en un centro educativo, comparten algunos aspectos de su tarea (materiales, acuerdos temáticos para las evaluaciones, entre otros), la planificación de las clases y su gestión quedan reducidas al trabajo en solitario del docente. Como consecuencia de lo anterior las creencias de cada docente no son problematizadas. Esto genera una perpetuación de un tipo predominante de clases, que en muchos casos deviene en una clase tradicional en donde el papel del docente es presentar un conocimiento ya construido y acabado y el de las y los estudiantes tomar notas, memorizar definiciones y procedimientos para luego aplicarlos. La investigación en Educación Matemática, en los últimos años, ha enfatizado en el trabajo colaborativo de equipos de docentes (Robutti et al., 2016; Borko y Potari, 2020), como forma de superar el desarrollo profesional individual, y evidenciar sus conocimientos y creencias, para poder problematizarlos.

Por otro lado, desde la investigación se señala que lo que aprenden hoy las y los estudiantes depende en gran medida de las tareas que les fueron propuestas durante su formación. Así, el diseño de tareas es un foco importante en la investigación en Educación Matemática. De acuerdo con Watson y Ohtani (2021), el foco en el diseño de tareas es relevante desde distintas perspectivas.

> Desde una perspectiva cognitiva, el detalle y contenido de las tareas tiene un efecto significativo en el aprendizaje; desde una perspectiva cultural, las tareas moldean la experiencia de los estudiantes con la asignatura y su comprensión de la naturaleza de la actividad matemática; desde una perspectiva práctica, las tareas son el cimiento de la vida de la clase, las ‘cosas para hacer’. (p. 3)

A partir de lo anterior, nos enfocamos en la planificación colectiva de una clase para la formación en magisterio y profesorado, y su posterior discusión conjunta.

Se busca, por un lado, analizar el impacto que tiene en las y los futuros profesores y maestros la implementación de una clase planificada colaborativamente. Por otro lado, se propone analizar el proceso reflexivo desarrollado por las y los formadores integrantes del equipo. Para esto, llevamos adelante un ciclo de Lesson Study.

En el apartado 2 de este trabajo presentamos algunos antecedentes, así como las preguntas y objetivos de la investigación. En el apartado 3 describimos el marco teórico utilizado. El apartado 4 presenta los aspectos metodológicos del estudio. En el apartado 5 presentamos el análisis realizado. Finalmente, en el apartado 6, presentamos las conclusiones de esta investigación.

2 Antecedentes, preguntas de investigación y objetivos

2.1 *Algunos antecedentes de nuestro trabajo*

A partir de lo señalado en la introducción, decidimos conformar un grupo de formadoras y formadores de profesorado y magisterio en Matemática, con el fin de problematizar los aspectos de nuestra práctica vinculados con la planificación, implementación y evaluación posterior de una clase en el ámbito de la formación docente. Esta práctica no es habitual en nuestro país, aunque se ha ido constituyendo en una línea de investigación desde hace algunos años a nivel internacional. La metodología japonesa de trabajo colaborativo conocida como Lesson Study (en adelante LS) tiene más de cien años de iniciada en Japón, y se realiza como una forma de desarrollo profesional de las y los docentes, de forma frecuente. Esta metodología fue difundida al resto del mundo a partir del informe del estudio TIMSS-Video (Stigler y Hiebert, 1999). Desde entonces su aplicación se ha extendido en muchos países.

Robutti et al. (2016) realizan una revisión bibliográfica sobre trabajo colaborativo de docentes. Entre las metodologías que reportan se encuentran: LS, Learning Study, Investigación-Acción, Investigación de Diseño. Si bien todas tienen aspectos en común, LS se diferencia de las demás en que no necesariamente se realizan ciclos iterativos (Fujii, 2016), sino que su principal objetivo es responder una pregunta (el tema de investigación), a través de cinco fases: establecimiento de objetivos, planificación de la clase, clase investigativa, discusión posterior a la clase y reflexión (Fujii, 2016).

En el contexto uruguayo de la formación de profesores de matemática existen varias investigaciones que analizan las prácticas de los formadores de profesoras y profesores de matemática (Olave, 2013; Dalcin, Ochoviet y Olave, 2017; Ochoviet y Olave, 2017). Estos estudios identifican los tipos de prácticas predominantes, aunque lo hacen a partir del trabajo individual de cada participante. Los distintos trabajos reportan que las y los formadores muestran modelos en los que predomina la práctica expositiva o el juego de preguntas y respuestas, y que en pocos casos se dan prácticas acordes a las promovidas desde la investigación.

En cuanto al trabajo colaborativo de formadores de profesorado, Pagés (2021) investigó el proceso llevado adelante por cuatro formadores de profesores de matemática (dos de la asignatura Análisis I y dos de Didáctica). Las tareas solicitadas a las y los formadores, inspiradas en un ciclo de LS, consistieron en planificar, implementar y posteriormente discutir colaborativamente una clase de Análisis I. Se utilizó como metodología la Teoría Fundamentada en los Datos (Glaser, 2018). La categoría central que surgió del estudio fue llamada *teorías personales construidas sobre la práctica* (TPCP) de cada formador. Las TPCP tienen origen en lo institucional, en la formación profesional, en las experiencias de cada formador o formadora y en el contexto en que se han desempeñado. A su vez, se componen de los conocimientos (Leikin et al., 2017), las orientaciones sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, y sobre la formación de profesores.

Pagés (2021) identificó un proceso de *búsqueda de acuerdos* entre las y los formadores participantes. Este proceso se produce en las distintas discusiones llevadas adelante, en las que los participantes activan sus TPCP, y los distintos grados de acuerdo se alcanzan a través de la *negociación* y la *reflexión colectiva sobre la práctica.* Estos mecanismos ayudaron a resolver, al menos circunstancialmente, las tensiones provocadas por TPCP divergentes.

Rey (2017) y Ochoviet, Rey y Romo (2022) reportan una investigación enmarcada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que consistió en un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP), del que participaron formadores de profesores de matemática. Ochoviet et al. (2022) señalan como una de las restricciones institucionales para la implementación de un REI-FP, la necesidad de integrar el equipo con formadores en Matemática, formadores en Didáctica, y formadores de ambas áreas de la formación docente. Según las autoras, tanto la integración del grupo de trabajo de este modo, como la implementación de los REI-FP con estudiantes de profesorado en clases de matemática o de didáctica, colaboraría en romper la compartimentación entre lo matemático - lo didáctico que existe en la formación docente.

Damisa et al. (2019) reportan un estudio colaborativo en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, con docentes de primaria e investigadores, realizado simultáneamente en Uruguay y Argentina. El estudio uruguayo consistió en la elaboración de una secuencia de enseñanza para abordar la enseñanza de la geometría utilizando el software GeoGebra. Esta secuencia fue diseñada, implementada y analizada de forma colaborativa. El equipo argentino analizó diversas cuestiones surgidas de las preocupaciones de las y los maestros, vinculadas con sus prácticas. Damisa et al. reportan un estudio comparativo de ambas experiencias. Los investigadores resaltan, en cuanto a los espacios colaborativos generados, que estos promovieron el surgimiento de algunas problemáticas, y que su discusión afianzó los espacios colaborativos. En particular, aquellas cuestiones para las que los participantes no tenían una respuesta a priori, fueron las que se convirtieron en hitos. Como ejemplo, la incorporación de las producciones de los estudiantes permitió cambios en las posiciones de las y los docentes (en el caso argentino). El trabajo con GeoGebra en torno a los ángulos generó nuevos conocimientos matemáticos y didácticos (en el caso uruguayo).

Uno de los aspectos destacados en la investigación sobre la formación de profesores refiere a las conexiones entre la matemática avanzada que aprenden las y los futuros docentes de matemática, y la matemática que luego enseñarán en su actividad profesional (Ticknor, 2012;

Wasserman, 2018). Este último plantea cuatro tipos de conexiones: de contenido, de la práctica de la disciplina, de la enseñanza en el aula y conexiones de instrucción modelada. Las conexiones de contenido refieren a las conexiones explícitas entre los conocimientos matemáticos avanzados y los conocimientos matemáticos que las y los futuros docentes deberán enseñar. Las conexiones de la práctica de la disciplina se vinculan con las formas de *hacer matemática* señaladas desde la investigación y la organización curricular (por ejemplo, NCTM, 2015). Las conexiones de la enseñanza en el aula refieren al contenido matemático avanzado como un medio para motivar acciones pedagógicas específicas en la clase (el diseño de actividades, las preguntas y respuestas a los alumnos, entre otras). Finalmente, las conexiones de instrucción modelada hacen a las prácticas del formador de profesores, que se adecuen a prácticas que se espera desarrollen las y los futuros docentes en sus clases.

En el contexto uruguayo De los Ángeles (2020) investigó las concepciones de formadores de profesores de matemática en relación con los distintos tipos de conexiones establecidas por Wasserman (2018). De los Ángeles reporta que, si bien la mayoría de las y los formadores entrevistados reconoce que existen desconexiones entre la matemática avanzada que enseñan en sus cursos y la que las y los futuros docentes tendrán que enseñar, la mayoría de las conexiones señaladas refieren a las del primer tipo. Asimismo, el autor encontró una relación entre la dificultad para establecer conexiones, y las experiencias profesionales recientes de los entrevistados en el ámbito de la educación secundaria.

Otro concepto que surge como fundamental en los procesos de trabajo colaborativo entre docentes o entre formadores de docentes es el de reflexión. En relación con este concepto, la mayoría de los trabajos remiten a las conceptualizaciones de Dewey (1933) y Schön (1987). Ambos autores consideran la reflexión como un proceso de desarrollo y testeo de ideas a partir de la acción. A partir de esta conceptualización, Ricks (2011) diferencia dos tipos de reflexión: la *incidental* y la *de proceso.* La reflexión incidental consiste en recapturar lo ocurrido en una clase, por ejemplo, con posterioridad a esta. Ricks la considera como una forma pasiva de reflexión, en tanto no se conecta con acciones futuras del docente. La reflexión de proceso, considerada por el autor como una forma activa de reflexión, es aquella que "extiende y vincula incidentes reflexivos separados en un continuo cohesivo mental en forma de ideas que se desarrollan a través de la acción" (p. 252).

La reflexión de proceso consiste en un ciclo con cuatro pasos identificables: un evento de la experiencia, la suspensión de ideas y creación de un problema, la formación y refinamiento de ideas, y el testeo a través de la acción y observación. Cierto evento de la experiencia, que deja al docente curioso o desconcertado, inicia el ciclo reflexivo. Si se suspende la tentación de darle una explicación rápida, y se dejan de lado las ideas espontáneas que expliquen el suceso, se llega a analizarlo con más detalle y a reconocer sus características problemáticas (segundo paso del ciclo). La tercera etapa consiste en la creación de posibles soluciones al problema identificado. En esta etapa se utilizan experiencias pasadas, el conocimiento, la intuición, el pensamiento, y la reflexión incidental. De las distintas ideas surgidas se elige la mejor para ser testeada (cuarto paso del ciclo). Este testeo implica acciones significativas, y a su vez, una observación más detallada de lo que acontece.

Un aspecto esencial vinculado con el aprendizaje de la matemática, y en especial el de los futuros docentes, lo constituye el trabajo en base a tareas, y por tanto, el diseño de estas para la clase y las formas en que se gestionan. Además de los planteos de Watson y Ohtany (2021) ya señalados, Anthony y Walshaw (2009) señalan que el principal estímulo para el aprendizaje de la matemática por parte de las y los estudiantes consiste en proponerles tareas que los involucren en el pensamiento matemático de forma autónoma.

Zaslavsky y Sullivan (2011) señalan que uno de los objetivos de la formación de docentes es ayudarlos a desarrollarse desde perspectivas posiblemente acríticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, a convertirse en profesionales con conocimientos, recursos, reflexivos y competentes, para que sean capaces de abordar los desafíos que les impondrá la enseñanza de la matemática. Plantean que esto se puede conseguir "a través del involucramiento de los futuros docentes en tareas efectivas, junto con la reflexión sobre la experiencia de trabajar en esas tareas" (p. 2).

Los antecedentes que hemos reportado nos permiten situar nuestro trabajo en el marco de la investigación en Matemática Educativa, y al mismo tiempo, en el contexto específico en el que este se desarrolla. Nos aportan elementos importantes para el diseño de la investigación y su desarrollo.

2.2 *Objetivos y preguntas de investigación*

Como ya señalamos, este proyecto busca, por un lado, analizar el impacto que tiene en futuros profesores y maestros la implementación de una clase planificada colaborativamente. Por otro lado, se propone analizar el proceso reflexivo desarrollado por las y los formadores integrantes del equipo. Para esto, llevamos adelante un ciclo de LS entre formadores de magisterio y profesorado de matemática. La clase investigativa a planificar se desarrolló en cursos de profesorado (Geometría I) y de Magisterio (Matemática I). Para la investigación se formularon las siguientes preguntas de investigación:

¿En qué medida las tareas cognitivamente demandantes (por ejemplo, de final abierto) potencian un aprendizaje disciplinar sólido y flexible de las y los futuros profesores?

¿Qué aporta el proceso colectivo de planificación, implementación y discusión posterior de las clases a las prácticas de las y los formadores participantes?

Para responder a estas preguntas, establecimos los siguientes objetivos específicos:

1) Estudiar el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría, diseñadas colectivamente, en dos grupos de formación docente.

2) Analizar el proceso reflexivo de las y los formadores participantes en el trabajo colectivo del diseño de la tarea y el análisis posterior a la implementación.

3 Marco conceptual

Para este trabajo hemos tomado como referente teórico el marco *Teaching for Robust Understanding Project* (Enseñanza para un Sólido Entendimiento, en adelante TRU, Schoenfeld, 2016). Este marco establece que la calidad de los ambientes de aprendizaje depende, en gran medida, del grado en que se les proporcionen a todos los y las estudiantes oportunidades con respecto a cinco dimensiones de un aula matemáticamente poderosa, que describimos a continuación.

Dimensión 1: Contenido

Riqueza de los conceptos y las prácticas disciplinares disponibles para aprender

Esta dimensión refiere al grado en el que la actividad en el aula es capaz de proporcionar oportunidades para que las y los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos. Las discusiones deberán estar dirigidas a poder aprender ideas, técnicas y perspectivas disciplinares, hacer conexiones y desarrollar hábitos de pensamiento matemático productivo. Sabemos que el entendimiento de las y los estudiantes, en nuestro caso matemático, se forma esencialmente a través de su experiencia en clase. Es por esto que debemos preguntarnos, tanto en la planificación, puesta en escena y discusión posterior, si el contenido matemático que llevamos al aula es preciso, coherente y si está bien justificado. Esto es, si las representaciones, modelos, conceptos y herramientas que llevamos al aula, a través de actividades, son realmente adecuadas para que se pueda dar ese entendimiento. De acuerdo al marco TRU, lo que cuenta en la enseñanza es cómo los estudiantes encuentran el contenido en lo que refiere a si están o no en posición de aprovechar la riqueza de los contenidos que se ponen a su disposición.

Dimensión 2: Demanda cognitiva

Entendimiento y esfuerzo productivo

Con referencia a la demanda cognitiva, Schoenfeld (2016) sostiene que las y los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía de modo que tengan espacio y apoyo para el crecimiento, con tareas cuya dificultad va de moderada a alta, lo que debería llevar a lo que denomina un esfuerzo productivo. Esto dependerá del grado en el que los y las estudiantes tengan la oportunidad de confrontar y entender importantes ideas matemáticas y su uso. Es así que debemos asegurarnos de apuntalar a los y las estudiantes para que puedan afrontar y dar sentido a los conceptos matemáticos que se trabajen en clase. Para ello debemos diseñar tareas que les permitan pensar conceptualmente y los estimulen a hacer conexiones dándoles oportunidades significativas para aprender. La demanda cognitiva, de acuerdo a Schoenfeld (2016), describe el nivel de dificultad de la propuesta en relación con lo que cada estudiante sabe y del trabajo que se le pide que haga. Por lo tanto, el objetivo es encontrar un terreno en el que las y los estudiantes tengan la oportunidad de construir a partir de lo que saben y ampliar su conocimiento actual.

Dimensión 3: Acceso equitativo al contenido

Acceso significativo y equitativo a los conceptos y las prácticas

Es de gran relevancia que todo el estudiantado pueda acceder en forma equitativa a los conocimientos que se trabajan en el aula, por lo que hay que tener muy en cuenta el grado en que las estructuras de la actividad (tanto la tarea como las discusiones en la clase) invitan y apoyan la participación activa de todos los estudiantes. Para ello el o la docente debe generar un ambiente de aprendizaje que brinde a las y los estudiantes oportunidades de discutir ideas importantes, que se involucren con el contenido y construyan su entendimiento con base en los conocimientos que traen consigo al aula. La elección y presentación de las tareas debe contar con un abanico amplio de formas de abordarlas para permitir que todas y todos se involucren con el contenido. Por su parte, el o la docente en el aula debe intervenir para generar y propiciar diferentes maneras de participar en las actividades de la clase y contribuir en su desarrollo.

Dimensión 4: Disponibilidad, Dominio e Identidad

Medios para construir identidades disciplinares positivas a través de la presentación, la discusión y el refinamiento de ideas

Esta dimensión hace referencia al grado en el que cada estudiante tiene oportunidad de hacer matemática y comunicar sus ideas. Las actividades deberán proporcionarle la oportunidad de contribuir en conversaciones sobre ideas matemáticas, retomar las ideas de otros, y dejar que otros retomen las propias, de manera que contribuya al desarrollo de su disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) y dominio sobre el contenido, identificándose positivamente como aprendiz y pensador. Las ideas e intervenciones de las y los estudiantes deben ser la fuente de las discusiones que se den en la clase, tanto a nivel grupal como en pequeños grupos y en forma individual. Es el o la docente quien debe fomentar sus contribuciones, reconocerlas y apoyarlas como parte de la actividad de clase y asegurarse que las ideas de cada estudiante se vayan construyendo a medida que el grupo construye su entendimiento colectivo. Es así que las tareas y el accionar docente deben contribuir a que cada estudiante se comprometa con la disciplina generando la percepción de que se puede progresar en cuestiones desafiantes al trabajar en ellas y que confíen en los resultados a los que arriben. De esta forma pueden tener el control de las ideas disciplinares más que sentir la necesidad de llegar a una respuesta en la que creen o no, pero que coincide con lo que sugiere alguna otra autoridad, como el profesor o el libro de texto.

Dimensión 5: Evaluación formativa

Sensibilidad del ambiente hacia su forma de pensar

Con la intención de poder llegar a “donde el estudiante está”, es importante tener en cuenta el grado en el que las actividades en el aula propician el pensamiento de cada estudiante y en el que las interacciones responden a dicho pensamiento. A través de atender deliberadamente el razonamiento y el entendimiento de las y los estudiantes, y luego planificar las tareas e implementar las clases en consecuencia, la enseñanza se “vuelve más clara, más enfocada y más efectiva” (Kilpatrick et al. 2001, p.350). Esto implica la creación de tareas para la clase que revelen el estado real de comprensión de cada estudiante durante el proceso de aprendizaje, esto es, que revelen la manera en que las y los estudiantes entienden el contenido a medida que aprenden. Esto a su vez le proporciona al docente y estudiantes la oportunidad de basarse en los entendimientos que se han desarrollado, y atender con más certeza las dificultades grupales e individuales. Este escuchar la voz de las y los estudiantes y actuar en consecuencia es a lo que se llama evaluación formativa, que involucra a ambos participantes del acto de enseñar.

De acuerdo a la descripción hecha podemos observar los vínculos entre las cinco dimensiones. Escuchar la voz de las y los estudiantes a través de sus aportes y de compartir y criticar ideas en forma conjunta, proporciona información a todas y todos sobre la marcha y el desarrollo de las ideas que se manejan y así actuar en consecuencia. Esta evaluación formativa (Dimensión 5) permite al o la docente ajustar el nivel de la demanda cognitiva (Dimensión 2) y así abre las puertas a la voz de cada estudiante (Dimensión 4). A su vez, si el o la docente establece las condiciones que apoyen y alienten a las y los estudiantes a participar y propone tareas que tengan varias puertas de entrada, está ayudando a que el acceso a las ideas y razonamientos matemáticos sean equitativos (Dimensión 3).

Como podemos observar, estas cinco dimensiones contemplan los diferentes aspectos que, desde la investigación (NCTM, 2015; Santaló, 1994; Shulman, 2005, entre otros) deberían promoverse en el aula para generar una “práctica adecuada” para la formación de maestros y profesores de matemática. Esta práctica refiere a aquellos proyectos de enseñanza que favorezcan la creación de ambientes de aprendizaje para que las y los estudiantes, futuros maestros y profesores, puedan explorar ideas matemáticas, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando, entre otros, y de esta forma, vivenciar prácticas de enseñanza similares a las que se espera que ellos lleven adelante en su futuro desempeño profesional.

Con referencia a nuestra investigación, utilizaremos el marco TRU en las tres primeras etapas del ciclo de LS que llevaremos adelante: la planificación de la clase y la tarea a presentar, la implementación y el análisis de lo sucedido en el aula. Con respecto al ciclo de LS, que desarrollamos en el apartado de metodología, consideramos cuatro fases: la determinación de objetivos de largo plazo, la planificación de la clase, la implementación de la clase y la reflexión posterior sobre lo acontecido en ella.

Hemos visto, a partir de las consideraciones del marco TRU, la necesidad de elaborar tareas para la clase que privilegien las cinco dimensiones antes descritas. Esto nos llevó a pensar qué tipo de tareas posibilitan la generación de un ambiente de aprendizaje que promueva en las y los estudiantes, no solo “hacer” matemática, sino también la reflexión y que generen vínculos con la matemática que ellos deberán enseñar. Es por esto que también tuvimos en cuenta el marco conceptual para el desarrollo y análisis de tareas específicas para la formación docente elaborado por Zaslavsky y Sullivan (2011).
El tipo de tareas que presentan Zaslavsky y Sullivan (2011) refiere a problemas que las y los formadores de maestros y profesores proponen a sus estudiantes para que se involucren en forma activa, colaborativa y con amplitud de criterio. Sostienen que estas deben estar orientadas hacia la práctica futura de las y los estudiantes de formación docente.

El marco conceptual que proponen estos autores para examinar y elaborar tareas abarca ocho temáticas: desarrollar adaptabilidad, fomentar la conciencia acerca de similitudes y diferencias, afrontar conflictos y dilemas, diseñar y resolver problemas para su uso en la clase de matemática, aprender del estudio de la práctica, seleccionar y usar herramientas y recursos apropiados para la enseñanza, identificar y superar barreras en el aprendizaje de las y los estudiantes y compartir y revelar disposiciones y creencias propias, de los pares y de sus alumnas y alumnos.

Dentro de los posibles diseños de tareas, Zaslavsky y Sullivan (2011) sugieren aquellas que tengan múltiples soluciones y/o caminos o formas de resolución. Es por esto que nos centraremos en las tareas de final abierto presentadas por Zaslavsky (1995, 2008) que apuntan a generar situaciones que involucran poderosos procesos de aprendizaje y la posterior reflexión de lo que ha ocurrido en ese proceso. La autora sugiere que estas tareas se pueden generar modificando tareas estándares basadas en contenidos matemáticos familiares del currículo y transformándolas en tareas con final abierto, esto es, con múltiples respuestas correctas. Las tareas estándar que generalmente se proponen a los estudiantes admiten una sola respuesta correcta y esto lleva a que la discusión en la clase sea limitada. Las tareas modificadas transforman el problema en otro con múltiples respuestas correctas. Zaslavsky (2008) destaca que el hecho de que la tarea tenga múltiples respuestas permite que cada estudiante pueda tener algún éxito, ya que puede dar al menos una respuesta correcta trabajando a su manera y a su nivel. Esto habilita a que las y los estudiantes comparen sus respuestas con las de sus pares, verifiquen su validez y busquen relaciones entre ellas, pudiendo incluso llegar a generalizaciones. Este tipo de tareas resultan desafiantes, aportan a crear un ambiente de mutua colaboración y promueven la comunicación matemática, así como también otras situaciones deseables de aprendizaje que van en la línea de las planteadas por el marco TRU.

Pensamos que el marco conceptual que hemos delineado está en concordancia con los objetivos establecidos para este trabajo y la problemática planteada. Por tal motivo y para cumplir estos objetivos desarrollamos, a continuación, un marco metodológico acorde con este marco referencial.

4. Aspectos metodológicos

4.1 Implementación del ciclo de Lesson Study

Para este estudio utilizamos la metodología del LS, forma de trabajo colaborativo entre docentes e investigadores, que tiene como principales objetivos el desarrollo profesional de las y los docentes, el mejoramiento de los aprendizajes de las y los estudiantes y el surgimiento de teorías de enseñanza de la matemática, basadas en el proceso de LS (Isoda, 2015).

Esta metodología se lleva adelante por ciclos, y cada ciclo consta de cuatro fases principales: la determinación de objetivos de largo plazo, la planificación colectiva de la clase y las tareas a presentar, la implementación y observación de la clase, y el análisis, discusión y reflexión de lo sucedido en el aula. Antes de comenzar la fase de planificación colectiva, el grupo determina cierto tema de estudio, que consiste en metas de largo plazo, que se abordan de forma particular en cada ciclo. En nuestro caso, el énfasis principal está en la contribución a la enseñanza de la matemática y en la formación de futuros docentes, a través de un proceso colaborativo de planificación, implementación y análisis posterior de una propuesta de enseñanza. De acuerdo con los lineamientos de LS, hemos determinado como tema de estudio, analizar las formas en que puede promoverse el desarrollo, en los futuros docentes, del Conocimiento Matemático para Enseñar (Ball, Thames y Phelps, 2008). Para ello, en este ciclo del LS, hemos optado por diseñar e implementar una tarea de final abierto y desarrollar la clase acorde a las dimensiones del marco TRU.

En esta investigación realizaremos un ciclo de LS, aunque el equipo tiene la intención de continuar esta experiencia para seguir desarrollando el tema de estudio planteado.

Fujii (2017) señala que, para aplicar de forma adecuada la metodología de LS fuera de Japón, es necesario que los investigadores y docentes comprendan no sólo sus aspectos más visibles, como la clase investigativa y la discusión posterior, sino también el diseño de la clase y los elementos presentes en este. Takahashi y McDougal (2017) presentan el concepto de Clase investigativa colaborativa (Collaborative Lesson Research), que contiene los elementos considerados necesarios para aplicar LS en culturas fuera de Japón: un propósito de investigación claro, el estudio de materiales curriculares, una propuesta de investigación escrita, una clase investigativa y su discusión posterior, la inclusión de otras personas conocedoras, y un proceso de compartir los resultados. Nuestro equipo ha dedicado un tiempo antes de iniciar el proceso de planificación, a profundizar en estos aspectos, para evitar desvirtuar este proceso por razones de diferencias culturales.

Un aspecto que ha resultado importante cuando se aplica LS fuera de Japón, es la utilización de determinado marco teórico que colabore en la realización de este proceso. En nuestro

caso, hemos tomado el marco TRU, que nos aporta elementos a considerar durante todo el ciclo, y que son relevantes a la formación de maestros y profesores.
A continuación describimos los aspectos metodológicos relativos a cada fase del LS y las acciones que llevamos adelante para alcanzar los objetivos de la presente investigación.

4.1.1 Fase 1: Planificación colectiva de la clase y las tareas a presentar

Hemos realizado doce sesiones, que fueron videograbadas. En estas sesiones determinamos el tema de estudio, analizamos documentos provenientes de la investigación en Educación Matemática, así como documentos curriculares. Luego nos abocamos al diseño de una tarea de final abierto para la clase investigativa, y realizamos la planificación detallada de la clase. Esto implicó considerar, en primer lugar, todas las resoluciones posibles de la tarea por parte de las y los estudiantes, las ideas matemáticas que se pondrían en juego en cada una de ellas. Estas resoluciones posibles nos permitieron identificar distintos escenarios para la puesta en común, así como las posibles intervenciones docentes. También, decidir qué conocimientos se institucionalizarían durante el trabajo de todo el grupo.
Los videos de estas sesiones, en conjunto con el resto de los datos recabados en las siguientes etapas del ciclo, nos permitieron abordar el segundo objetivo de nuestro estudio: *analizar el proceso reflexivo de las y los formadores participantes en el trabajo colectivo del diseño de la tarea y el análisis posterior a la implementación*.

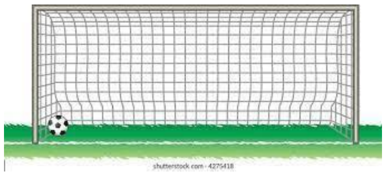
Presentamos a continuación la tarea diseñada y la planificación de las clases, fruto de las discusiones realizadas en estas sesiones.

Diseño de la tarea

Hemos diseñado una tarea de final abierto que, como veremos en este apartado y en la planificación de la clase, privilegia las cinco dimensiones del marco TRU.

Las redes de los arcos de fútbol fueron históricamente diseñadas a partir de una retícula cuadrada.

Foto del partido Uruguay y Ghana en la Copa del Mundo de Sudáfrica 2010



1) ¿Qué otros polígonos se pueden utilizar para diseñar una red de un arco de fútbol? Presenta al menos los diseños de dos ejemplos distintos utilizando el mismo polígono, con los que se pueda formar una red. ¿Cómo justificarías que tus diseños realmente funcionan? En otras palabras, ¿por qué la figura que elegiste forma realmente una red?
2) ¿Existe alguna figura con la que no se pueda formar una red? Justifica.

Esta tarea puede ser abordada de diferentes maneras, tiene muchas puertas de entrada lo que puede permitir que el acceso a las ideas y razonamientos matemáticos sean equitativos. Pensamos que cada estudiante podrá, desde sus conocimientos, proporcionar alguna respuesta y su respectiva justificación. Esto último está en consonancia con la Dimensión 3 del marco TRU ya que estaría permitiendo un acceso significativo y equitativo a los conceptos y las prácticas.

A partir de los diseños presentados por las y los estudiantes se pueden inducir propiedades de los polígonos involucrados y permitir que se justifiquen, que se vinculen diferentes tópicos matemáticos, entre otros aspectos de la actividad propia de la asignatura. Estas actividades desarrolladas en el aula pueden ser un gran aporte al enriquecimiento de los conceptos y las prácticas disciplinares disponibles para aprender, aspectos vinculados a la Dimensión 1.

Esta forma de interactuar en clase nos brinda la oportunidad de escuchar la voz de las y los estudiantes a través de sus aportes, de compartir, aceptar y refutar ideas en forma conjunta. Esto proporciona información a los participantes acerca de la marcha y el desarrollo de las ideas que se manejan, de las diferentes formas de entendimiento que permite al colectivo generar un ambiente empático hacia formas de pensar del otro y así actuar en consecuencia (Dimensión 5). Esto último permite al docente, a través de la observación y análisis de las diferentes situaciones que se dan en la clase, secuenciar los contenidos de forma tal que la dificultad vaya de moderada a alta brindando a las y los estudiantes espacio para presentar sus argumentaciones y apoyo para el crecimiento en el pensamiento matemático (Dimensión 2 y Dimensión 4).

Planificación de la clase

A continuación presentamos la planificación de clase en donde se plantean los objetivos de la misma, el análisis a priori de la tarea que acabamos de presentar, el desarrollo tentativo de la clase y posibles intervenciones docentes.

Tema de la clase: Polígonos y sus propiedades. Clasificación de polígonos.

Objetivo de largo plazo: Que los futuros maestros y profesores de matemática desarrollen profundamente el Conocimiento Matemático para Enseñar (Ball et al., 2008).

Objetivos de la clase:

Se trabajará para que las y los estudiantes:

- aborden la tarea planteada desde sus ideas matemáticas, y lleven adelante el desafío de resolverla;
- descubran que algunas figuras teselan el plano y otras no, y encuentren las condiciones para que esto ocurra;
- analicen y determinen relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de polígonos, en particular su suma;
- puedan comunicar sus ideas, en todas las instancias, y las argumenten:
- sean capaces de rebatir las ideas de sus pares y acepten que los demás discutan las suyas;
- experimenten un modelo de clase distinto al que posiblemente vivieron en sus estudios anteriores.

Posibles fundamentaciones brindadas por las/los estudiantes

- Trabajar en base a la visualización y a la medición de los ángulos involucrados. Poca fundamentación matemática.

- Caso del triángulo equilátero: partiendo de saber que cada ángulo mide 60 grados, concluirán que con seis triángulos equiláteros iguales conforman 360 grados en un vértice. Se aprovechará para recordar el concepto de triángulo equilátero y establecer como propiedad, que cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60 grados.

- Caso de “otros” triángulos: debería aparecer la propiedad de la suma de los ángulos interiores. Se establecerá esta propiedad. También se discutirá la clasificación usual de triángulos por sus lados y por sus ángulos.

- Caso del paralelogramo: definición usual de paralelogramo y clasificación. Pueden considerar la suma de los ángulos internos.

- Caso del paralelogramo: poner en juego las condiciones de paralelismo y las relaciones entre los distintos ángulos entre paralelas (correspondientes, opuestos por el vértice, etc)
- Caso del hexágono regular: división en triángulos equiláteros. Se puede fundamentar a partir de la configuración con triángulos equiláteros. Se puede aprovechar para determinar las medidas de los ángulos interiores de un hexágono regular. Además, se caracterizarán los polígonos regulares y no regulares.
- Podría utilizarse como fundamentación alguna de las isometrías del plano, en especial en el grupo de profesorado. Se aprovechará para revisar algunas propiedades, si los estudiantes las mencionan, que serán abordadas más adelante en el curso. Para el caso de los no ejemplos:
- Si algún grupo hubiera considerado un pentágono regular, se analizará ese caso como no solución a la actividad. Se aprovechará a establecer que existen solo tres polígonos regulares que teselan el plano.

Desarrollo tentativo de la clase

Se plantea la actividad para trabajar en grupos de no más de cinco integrantes. Se pedirá a las y los estudiantes que presenten sus ejemplos en un papelógrafo que se les entregará junto con la actividad, para ser expuestos en la puesta en común. Se darán unos minutos para leer la actividad y plantear las dudas iniciales que surjan. Luego se les dejará trabajar. El/la docente monitoreará cada grupo observando las distintas producciones y evaluando en cada caso si amerita una intervención o no. Este monitoreo servirá para seleccionar y secuenciar la posterior puesta en común.

Posibles intervenciones durante el trabajo en equipos:

- Si alguien manifiesta conocer GeoGebra y quiere usarlo, se le permitirá.
- En caso de que las fundamentaciones pedidas se den en base a la manipulación de las figuras, o la medición, sin argumentos matemáticos, se intervendrá para que piensen en otras fundamentaciones posibles (poniendo en duda la veracidad del ejemplo o no ejemplo presentado).
- En caso de que en el total de los grupos haya poca variedad de polígonos, a los grupos que terminan pronto se les pedirá que piensen en usar otros polígonos.
- Se dispondrá de un conjunto de sobres con representaciones de polígonos convexos y no convexos. Se les proporcionará a las y los estudiantes que luego de cierto tiempo se encuentren estancados, o a aquellos que finalicen la tarea muy rápido.

Puesta en común

Para iniciar la puesta en común, se pedirá a todos los grupos que expongan sus producciones en el frente del salón, para que todos puedan observar las producciones de sus compañeros. Durante el monitoreo, se habrá seleccionado en qué orden los distintos grupos presentarán sus resoluciones. Se seleccionará en función de las figuras utilizadas y de los argumentos planteados, de menor a mayor complejidad. Cuando un grupo presenta sus diseños, y da su fundamentación, se requerirá las fundamentaciones de otros grupos que hayan hecho el mismo diseño, y se pondrá a discusión de toda la clase la validez o no de esos argumentos. En la medida en que las argumentaciones estén fundadas en propiedades de los polígonos, estas se establecerán como relaciones generales. Se continuará de la misma forma, con los demás grupos que hayan utilizado otros polígonos. Se analizarán de forma similar los casos de los no ejemplos.

En el cierre de la puesta en común se establecerán las condiciones para un cubrimiento del plano, así como cuáles son los polígonos regulares que lo teselan.

Pensamos que todo este trabajo llevará los 90 minutos de clase.

4.1.2 Fase 2: Implementación y observación de la clase

La clase planificada fue implementada en un grupo de primer año de Magisterio, en la asignatura Matemática I, y en un grupo de primer año de profesorado de matemática, en la asignatura Geometría I. En cada grupo, el docente a cargo fue el integrante del equipo que es profesor designado en dicho grupo. Cada clase, que fue videograbada, se llevó a cabo durante 90 minutos. La clase fue observada, en cada caso, por las y los integrantes del equipo que no daban la clase. Para esta etapa hemos elaborado un protocolo de observación de clase, basado en el marco TRU. La observación individual estará guiada por dicho protocolo. Este también nos permitirá ordenar y focalizar la discusión colectiva posterior de modo de abordar el primer objetivo de nuestra investigación: *estudiar el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría, diseñadas colectivamente, en dos grupos de formación docente.*

Además del protocolo de observación para las y los docentes que integramos el equipo, hemos elaborado un cuestionario para las y los estudiantes participantes de cada clase, que nos permitirá evaluar algunos aspectos establecidos en el marco TRU, desde su punto de vista. Este cuestionario se ha elaborado en un formulario Google, que se pedirá que completen con posterioridad a la clase de la que participaron.

Protocolo de observación de clase

Hemos elaborado el siguiente protocolo de observación de clase que tiene en cuenta las cinco dimensiones descritas en el marco TRU. Para seleccionar los indicadores dentro de cada una de estas dimensiones se tuvieron en cuenta las actividades de clase, esto es, la tarea de final abierto elaborada, el monitoreo e intervención docente y los aportes que realicen las y los estudiantes en la clase.

Pensamos que la inclusión de estos indicadores nos permitirá abarcar una amplia gama de posibilidades que puedan ocurrir en el desarrollo de la clase y nos brindará insumos para la discusión posterior de la clase (tercera etapa del ciclo del LS).

Debemos aclarar que hay un indicador, que consideramos muy importante y que tendremos en cuenta, que no figura explícitamente en el protocolo de observación ya que está vinculado en las cinco dimensiones. Se trata de la especificidad de la formación de profesores y maestros en el área de la matemática, es decir la consideración del conocimiento especializado que debe tener un maestro y un profesor de matemática. Tendremos muy en cuenta las consideraciones, decisiones y acciones que el docente lleve adelante en la clase, fundadas en esta especificidad.

Contenido	**-** En qué medida las discusiones matemáticas son precisas y coherentes
	- Qué relaciones se establecen entre el contexto, los conceptos y los procedimientos
Demanda cognitiva	*Las actividades de clase* (la tarea, la intervención docente y la participación de los estudiantes)*:*
	- generan y mantienen un ambiente de producción intelectual desafiante
	- generan un desarrollo matemático de los estudiantes
Acceso equitativo al contenido	*Las actividades de clase (tareas, intervención docente):*
	- invitan a una activa participación de todos los estudiantes
	- ¿quién propone ejemplos?
	- ¿quién explica?
Disponibilidad, domino e identidad	*Los estudiantes, en qué medida tienen oportunidad de:*
	- conjeturar
	- explicar
	- representar
	- generalizar
	- refutar o aceptar ideas ajenas
	- refutar o aceptar ideas propias
	Estas actividades
	- ¿dejan en evidencia las contribuciones de los estudiantes?
	- animan al estudiante a involucrarse (desarrollo de la *disponibilidad*)
	- posibilitan que el estudiante evolucione en el *domino* del contenido
	- permiten que el estudiante genere una *identidad* como pensador matemático
Evaluación formativa	*La tarea presentada*:
	- ¿revela el estado real de entendimiento del estudiante?
	- ¿permite atender asertivamente las dificultades grupales e individuales?
	El docente:
	- a partir del monitoreo de la actividad de los estudiantes, ¿interviene para ajustar el nivel de la demanda cognitiva?

Cuestionario post clase

De acuerdo con el marco TRU es deseable realizar una evaluación formativa como parte del trabajo para una comprensión sólida de los estudiantes. Por otro lado, como esta investigación se desarrolla en el ámbito de la formación docente, es necesario tender puentes entre la formación y el desempeño profesional futuro de las y los estudiantes. Como parte de la evaluación formativa que plantea el marco hemos elaborado un cuestionario para ser completado por quienes participaron, con posterioridad a la clase. Este tiene el objetivo de recoger la voz de las y los estudiantes en relación con algunos aspectos conceptuales y metodológicos.

a. Menciona tres conceptos trabajados en la clase de hoy. b. En tus experiencias anteriores en clase de matemática, ¿has trabajado en la modalidad desarrollada en la clase de hoy? Explica ampliamente. c. ¿Cómo te sentiste trabajando de esta manera? Compáralo con tus experiencias previas en clase de matemática. Menciona ventajas y desventajas. d. ¿Consideras que esta metodología de trabajo puede ser implementada en el aula en secundaria/primaria? ¿Por qué? e. ¿Qué aportes piensas que brindaría a los estudiantes trabajar en secundaria/primaria con esta metodología?

La primera pregunta tiene por objetivo profundizar en el conocimiento de “dónde está cada estudiante” luego de haber participado de la clase, esto es, conocer en qué medida las actividades de aula propiciaron su pensamiento matemático. Esto nos servirá como insumo para conocer el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría. Por otro lado, será útil a las y los estudiantes como forma de evaluación formativa con respecto a sus conocimientos.

Las otras cuatro preguntas ponen el foco de atención en la especificidad de la formación de maestros y profesores de matemática. Pensamos que, en su mayoría, estos estudiantes han vivenciado clases tradicionales en donde el proceso de construcción del conocimiento no quedaba a su cargo y en donde las tareas eran rutinarias, secuenciadas y de respuesta única. En la medida que piensen en las preguntas y sus respuestas tendrán la oportunidad de revisar y problematizar la metodología de trabajo en el aula.

4.1.3 Fase 3: Análisis, discusión y reflexión colectiva de lo sucedido en el aula

Posteriormente a la implementación de las clases, realizamos diez sesiones colectivas, que fueron videograbadas, en las que se analizó y discutió lo sucedido en cada una de las clases.

Los videos correspondientes a las sesiones de esta etapa sirvieron a dos propósitos. Por un lado, nos permitieron registrar el análisis de la implementación de la clase y el impacto de la tarea diseñada. Por otro lado, se constituyeron en un recurso para el meta análisis previsto en el segundo objetivo. Es decir, los videos de todas las sesiones del trabajo colectivo del equipo nos permitieron analizar el proceso de trabajo colaborativo llevado adelante.

4.2 Análisis del proceso llevado adelante por el equipo

Una vez culminadas las cuatro fases del ciclo de LS, realizamos un análisis del proceso seguido. Para este análisis utilizamos como base el marco de reflexión presentado por Ricks (2011), que hemos presentado en los antecedentes. Ricks diferencia entre la reflexión incidental y la reflexión de proceso. La reflexión es inherente a la metodología de LS, dado su diseño. En efecto, la condición de realizar una planificación colectiva para una clase supone la presencia de diversidad de concepciones y visiones sobre esta. Por otro lado, las reuniones previas a la implementación de la clase propician la evocación de eventos provenientes de las experiencias de cada formador o formadora, y su discusión. Esto implica, necesariamente, episodios de reflexión incidental. Sin embargo, de acuerdo con Ricks, la reflexión de proceso es más productiva, ya que incluye la puesta en acción de las nuevas ideas surgidas durante la reflexión. Por tanto, para operacionalizar el análisis del proceso llevado adelante por el equipo, buscaremos ciclos de reflexión de proceso, utilizando como datos los videos de todas las sesiones de trabajo desarrolladas por el grupo de investigación.

5. Análisis de los datos

En esta sección presentamos, primero, el análisis de las clases implementadas y de la evaluación formativa de los y las estudiantes que nos brindarán elementos para responder la primera pregunta de investigación: *¿En qué medida las tareas cognitivamente demandantes (por ejemplo, de final abierto) potencian un aprendizaje disciplinar sólido y flexible de las y los futuros profesores?*

En segunda instancia presentamos un análisis del proceso colectivo llevado adelante por el equipo que nos aportará elementos para dar respuesta a la segunda pregunta de investigación: *¿Qué aporta el proceso colectivo de planificación, implementación y discusión posterior de las clases a las prácticas de las y los formadores participantes?*

5.1 Análisis de las clases implementadas

En este apartado presentaremos, para cada una de las clases implementadas, un relato de lo que aconteció en cada una de ellas y el análisis respectivo. Los relatos tienen como objetivo que se comprenda el análisis posterior realizado por el equipo.

A continuación presentamos, para cada una de las clases implementadas, transcripciones de episodios que ilustran algunos aspectos que hemos destacado en los respectivos protocolos de observación de clase, completados en forma colectiva por el equipo (Ver anexo). Recordamos que este protocolo fue elaborado con base en el marco conceptual con el que trabajamos durante la investigación.

Con respecto a la dimensión de demanda cognitiva, el protocolo de observación que elaboramos incluye diversas cuestiones acerca de las actividades de la clase. Recordamos que, desde el marco TRU, las actividades de la clase incluyen las tareas presentadas, las intervenciones docentes y las participaciones de los y las estudiantes.

Por tanto, uno de los aspectos a analizar lo constituye la tarea presentada en la clase.

Esto fue analizado como parte del diseño de la tarea, en el apartado de Metodología. Allí, a través del análisis de las posibles resoluciones de los y las estudiantes, se evidencia que la tarea es de alta demanda cognitiva. Como decíamos en ese apartado, este tipo de tareas resultan desafiantes, aportan a crear un ambiente de mutua colaboración y promueven la comunicación matemática, así como también otras situaciones deseables de aprendizaje que van en la línea de las planteadas por el marco TRU.

En las transcripciones parciales que presentamos a continuación, de ambas clases implementadas, se pueden evidenciar aspectos vinculados a las intervenciones docentes y a las participaciones de los y las estudiantes, que son las otras componentes de las actividades de la clase, de acuerdo con el marco TRU.

5.1.1 *Relato, episodios y análisis de la clase de profesorado - IPA*

Relato de clase

Nuestra primera experiencia de implementación de clase la llevamos adelante en el Instituto de Profesores Artigas (I.P.A.) en un grupo del turno vespertino (1°C), en la asignatura Geometría I.

La actividad fue planificada para un tiempo total de duración de noventa minutos que se distribuyeron de la siguiente manera: una primera etapa (50 minutos aproximadamente) donde los y las estudiantes, por medio del trabajo grupal y colaborativo, intercambiando ideas y posturas, resolvieron la tarea. Por último, una segunda etapa en la que se realizó la puesta en común. Allí se discutieron, jerarquizaron e institucionalizaron algunas ideas que aparecen en este desarrollo.

Primera etapa

Los y las estudiantes se disponen en grupos de 4-5 integrantes (6 grupos en total) para trabajar sobre la consigna. Al ser una actividad que contempla y busca desarrollar el trabajo colaborativo, se le entrega a cada grupo una consigna y un pliego de papel para que la colectivicen e intercambien sus producciones así como también muestren al resto de sus pares los diseños solicitados. Un elemento a destacar es que, al iniciar con la tarea, durante los primeros minutos ningún estudiante asevera nada en su respectivo grupo. Podemos asegurar que esos primeros 5-10 minutos de trabajo parecen mostrar que no existe producción por parte de las y los estudiantes dado que no se emite ninguna afirmación entre ellas y ellos. En realidad es todo lo contrario dado que esta es una de las características del problema presentado. En esos primeros minutos se dio el primer acercamiento con el problema, su interpretación y comenzaron a surgir las primeras posibilidades de resolución. El contexto, la situación de clase y los conceptos geométricos que subyacen en ese primer acercamiento hacen que en este tramo donde no se "verbalizó" grupalmente, el trabajo individual es intenso y el "pienso" es muy amplio.

Una vez transcurrido ese período se pudo evidenciar que el trabajo grupal empieza a tener otra dinámica. Comienzan a aparecer distintas discusiones y puestas en común dentro del propio grupo. Existen diversos aportes así como primeras aproximaciones a una respuesta.

En una primera recorrida, se logra visualizar que solo un grupo no comprende la consigna (trabaja con geometría del espacio y con poliedros en particular, considerando un prisma recto de base rectangular), el resto interpreta correctamente la consigna (solo un grupo opta por realizar la tarea con GeoGebra).

Al grupo que no logra interpretar correctamente la consigna, en una primera instancia se les dice que la actividad es de geometría métrica y se les detalla parte de la idea. Como las

dificultades persisten, se les entrega un sobre con las figuras prediseñadas para que logren avanzar y repensar sus ideas.
En general se visualizó que, al momento de mostrar una posible solución, los triángulos equiláteros y los hexágonos regulares fueron los primeros polígonos en aparecer. Las argumentaciones pasaron, en ambos casos, por el ángulo de 360° en uno de los vértices al ensamblar los polígonos. Al momento de la discusión las distintas argumentaciones no eran totalmente rigurosas desde el punto de vista teórico y carecían de fundamentos geométricos. Para mejorar esto lo que se hizo fue preguntar el porqué de tales afirmaciones y buscar así que aparezcan los conceptos correctos.
De la misma manera, algunos y algunas argumentan que el teselado siempre se cumple si la figura es un polígono regular. Ante la pregunta de sí funciona para cualquier polígono con esa característica la primera respuesta es un “sí” y luego comienzan a indagar.
Hay que destacar que un grupo le agregó alguna puntualización a la letra como por ejemplo la tensión entre los nudos que unen a los hilos de la red. Este cuestionamiento se descarta quitándole importancia al material con el cual la red es construida (si está bien construida, no tendrá problema de “caerse”).
En esta primera etapa de resolución en grupos pequeños, los y las estudiantes trabajaron de forma no uniforme en cuanto a cómo argumentar sus diseños, pero de manera casi similar en cuanto a los elegidos. La intervención docente intentó ser la mínima y se limitó a cuestionar sus afirmaciones para que aparecieran otras ideas a partir de estas.
Segunda etapa
Al momento de la puesta en común el docente organizó la discusión tomando los distintos diseños y su análisis con las respectivas argumentaciones, dando la palabra inicialmente a aquellos grupos y voces dónde las argumentaciones y producciones realizadas no estaban del todo completas. Al igual que en la primera etapa, la voz del docente no buscó dar posibles soluciones, sino que por medio de las distintas voces de los y las estudiantes fueron apareciendo nuevas preguntas y nuevas observaciones para llegar a aproximarnos al objetivo.
Se tomó de esta manera el teselado con un triángulo equilátero para luego plantear si dicho teselado hubiera funcionado con otro triángulo que no fuera equilátero. Poco a poco fueron apareciendo argumentaciones más sólidas y evidenciaron que sí se podía y dieron el pie para pensar qué sucedía con los cuadriláteros. Allí las argumentaciones no fueron más allá del trabajo con rectángulos (a partir de dos triángulos rectángulos congruentes y unidos por su hipotenusa) y cuadrados. La argumentación aquí no fue tan espontánea ni sólida. Fue necesario buscar ejemplos distintos para visualizar que siempre funciona y se puede construir una red.

Con respecto a los polígonos regulares, un grupo argumenta por qué no se puede armar una red con cualquier regular, y la argumentación ya es más sólida en polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados. El grupo que trabajó con GeoGebra menciona que pensaron que un polígono de 12 lados parecía formar una red pero que luego lo descartaron pues “dejaba agujeros”.

Trabajando con este tipo de polígonos se destaca un grupo que afirma que aquellos polígonos que contienen ejes de simetría parecen formar una red. Para ello, una estudiante menciona que por medio de una traslación lo podría lograr. Esta afirmación muestra que existen nociones de isometrías que se pueden asociar con la tarea y dan la posibilidad de retomarlas cuando en el curso se trabaje con dicha temática.

En cuanto a los polígonos irregulares y polígonos no convexos el docente pregunta qué sucede si el hexágono no es regular, si puede formar una red y el grupo de estudiantes sentencia que no, aunque no muestran argumentos de por qué. En general sólo un grupo considera un polígono irregular de más de 4 lados. El caso mostrado se corresponde con uno que no forma una red y la argumentación no es suficiente o es incompleta desde el punto de vista teórico. Los y las estudiantes concluyen que “no cierra” o “queda abierto” y luego aparecen nociones del tipo “se superponen”.

A modo de cierre, el docente busca sintetizar lo visto a partir de otros ejemplos que no aparecieron en la discusión. Menciona que con lo que se está trabajando es con teselación del plano y da una pauta de qué polígonos teselan para finalizar la actividad. De la misma manera, menciona que algunos aspectos que surgieron a partir de la actividad serán retomados en próximos contenidos a abordar en el curso.

Episodios de clase y análisis

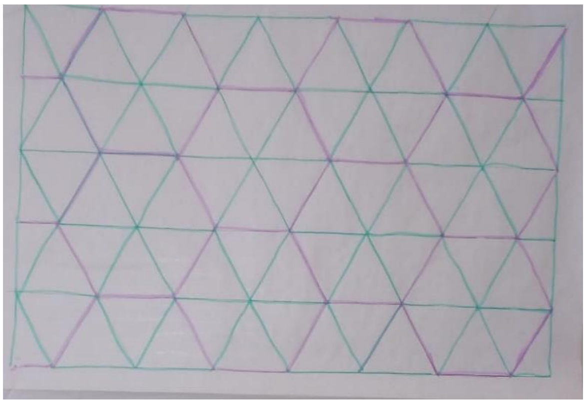
Profesor: Vamos a tratar de hacer una puesta en común primero para aquellos casos, para aquellos polígonos que sí cubran, que es lo que queremos hacer, que formen esa red y luego veremos un caso que no. Arrancamos con ustedes, el grupo del fondo. Cuenten al resto los polígonos que usaron, por qué lo hicieron ya que otros grupos también los usaron.

Estudiante 1: Usamos el hexágono principalmente, fue lo primero que pensamos ya que tenía que ser bastante exacto, o sea, no sabíamos que la figura podía quedar no tan exacta, se nos complicó por ese lado porque no habíamos entendido, y eso fue más o menos lo que nos salió.

P: Bien. Lo primero que se les ocurrió fue el hexágono, ¿a quiénes más se les ocurrió?

E2, E3: A nosotros.

P: Casi todos. Primero, ¿por qué sirve el hexágono? Y luego ¿de qué tipo de hexágono se trata? Yo entiendo la idea que tuvieron ustedes, que decían, cuando recorto, pensando en el violeta. Otro grupo también decía, pensemos que es una fábrica, que es una plancha gigante, una “manta” que es la red, y la van cortando de tal manera que queden todas de la misma medida, no van a hacer una por una. La cortan en determinado momento y sí, es verdad, si miro este, quedaría esa figura de seis lados, a la mitad, ¿no?



Hay que poner cuidado a eso, pensemos en la plancha, en la manta gigante, si funciona o no funciona. Hexágono, ¿qué opinan de eso? ¿Funciona? ¿Por qué sí, por qué no?

E4: Para mí funcionan, porque primero son polígonos regulares, y después, se pueden unir a sí mismos, y al unirse no quedan espacios vacíos entre cada figura.

P: La compañera agrega la palabra regular que E1 no lo hizo, ¿qué pasaría si no fuera regular ese hexágono? ¿Funcionaría todo lo que dijo E4?

Es: No

P: ¿Por qué no?

E5: Esa es una muy buena pregunta (risas)

E6: Seguramente se cumpla, pero con la condición de que los lados midan "tanto…" como el otro lado, comparado con el otro.

E5: Si no tienen determinada medida no puede funcionar.

P: Suspendamos un poquito la respuesta a esa pregunta, sigamos pensando. Retomemos los regulares. E4 dijo, corregime, que quedan pegaditos, ¿qué más dijiste?

E4: Se pueden unir a sí mismos,

P: Se pueden unir,

E4: no quedan espacios vacíos entre ellos…

P: ¿y cómo matemáticamente podemos mejorar un poco eso? Que la idea intuitiva que tiene la compañera está bien.

E5: Por los ángulos internos.

P: A ver,

E5: Que tienen que sumar, o sea (dibuja un círculo con su mano), la primera condición, para mí, es que la unión, hablando pronto y mal, los vértices de cada polígono, al unirse, el ángulo interno tiene que formar 360°.

P: (Señala en la figura anterior del pizarrón). Ahí, va, por ejemplo esto,

E5: O sea, si valen 60, tiene que haber 6 ángulos que calzan justo, que formen 360.

P: ¿Qué opinan de eso? Seis ángulos que formen 360.

E7: Pueden ser 6, 3, pueden ser menos.

E5: No tienen por qué ser seis. Pueden ser menos o más.

P: Si tomamos esta figura (hexágono regular), acá en el nudo ¿cuántos hexágonos hay?

Es: Tres

P: ¿Y cómo puedo justificar en este caso, que es regular, que efectivamente no va a quedar ningún "agujero", ningún espacio libre como dijo E4? Según lo que ella dijo acá están unidos.

E8: Porque el ángulo, el ángulo que forman, no sé si está bien, el ángulo que forman dos hexágonos unidos tiene que ser igual a uno de los vértices del tercero, por ejemplo.

P: ¿Qué opinan de eso?

E5: Hay que ver la medida del ángulo.

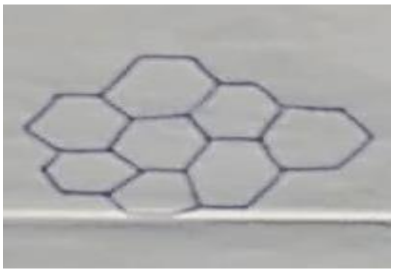
E9: ¿Vos decís que si por ejemplo se unís….? (se para a señalar en el diseño). Por lo que decís vos, ¿estos dos deberían ser siempre iguales?

E8: ¿Eh?

E9: Claro, vos dijiste que la suma de estos dos tenía que ser igual a este, ¿No? ¿Algo así decías?

E8: (silencio)

P: Tomemos ahora este diseño y enganchemos la misma idea. Trabajemos con este (otro hexágono regular pero que no contiene triángulos equiláteros que lo subdividan).



E10: Se cumple lo mismo que dijo el compañero. O sea, la unión de los tres va a dar 360°.

P: Bueno, pero quiero que lo justifiquen. ¿Por qué?

E10: Porque en ese, va a medir 120 cada ángulo. Son dos triángulos iguales, entonces son 60 y 60, es 120, y la unión de los tres 360°.

P: Acá, en este dibujito, porque estamos pensando que esta figura, que es un hexágono regular, lo podemos interpretar como

Es: Seis triángulos.

P: Seis triángulos equiláteros. Cada ángulo, la medida de cada ángulo interno de un triángulo equilátero es 60, ¿no? Y ahí aparece el 120 que dice el compañero. Bien, 120, 120 y 120.

E11: En aquel es lo mismo pero con 6 de 60° (señala el diseño anterior).

En la primera parte de la puesta en común, el profesor organiza la discusión a partir de la figura que utilizaron la mayoría de los equipos: el hexágono regular. Habilita a que todos los equipos argumenten por qué sus diseños cumplen con la consigna de la actividad. Queda en evidencia el acceso equitativo al contenido que provoca la propuesta, ya que cada uno de los equipos aporta elementos desde sus conocimientos. Una vez que llegan a establecer una condición para que estas figuras teselen, el profesor invita a los estudiantes a pensar en triángulos que no sean equiláteros basándose en los diseños producidos por los y las estudiantes.

P: Bien. Parece que funciona. ¿Qué otra de las figuras qué tenemos acá podemos tomar para el análisis? Por ejemplo, el grupo de E12, E13, E14, E8 y E15. No sé si lo ven porque lo hicieron con lápiz, aquí. ¿Qué opinan de esta figura? ¿Por qué funciona?

Es: Son triángulos rectángulos.

P: Son triángulos rectángulos, ¿hay algo de regularidad en eso? Porque acá (señala a los anteriores) fue unánime, ah, son hexágonos regulares y funciona.

E16: Pero no son rectángulos, creo que son rombos.

E8: Tienen marcado un ángulo de 90.

E12: ¿Puedo hacer un comentario?

P: Sí, claro, en realidad fueron ustedes los que lo diseñaron.

E12: Cuando pensamos el problema,

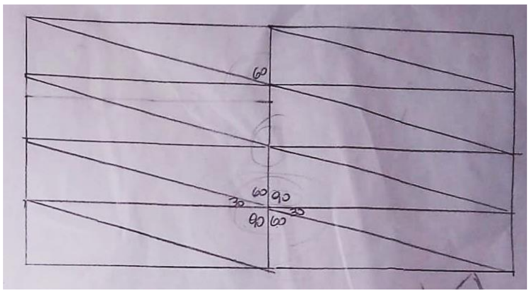
E8: Dos triángulos rectángulos,

E12: Cuando pensamos el problema dijimos, bueno, lo que queremos es dividir el plano en "n" partes iguales. Encarar así el problema nos llevó a un tipo de figuras en particular, que eran polígonos regulares. Por ejemplo, dividir 360 entre 6 nos llevó a los triángulos equiláteros, dividirlo entre 3 nos llevó a los hexágonos. Pero después nos dimos cuenta que con ese razonamiento nos estaban quedando figuras, como la de ese ejemplo, que son triángulos, que no son regulares, pero también puedo lograr cubrir el plano con esas figuras. Depende de cómo lo pienses, el tipo de figuras que elegís.

E5: O sea, solo tiene que cumplir que las figuras, en sus vértices, tienen que sumar 360°. Los ángulos que se tocan, hablando pronto y mal, sean cuales sean los ángulos, tienen que sumar 360. Por eso el triángulo rectángulo cumple. Porque si vos unís los ángulos, está en lápiz lo que pasa, pero si vos unís, ¿puedo pasar profe?

P: Si, claro

E5: (Representa una figura en el pizarrón) No necesariamente tiene que ser regular. Si yo pongo triángulos pitagóricos, por ejemplo, este suma 90°, este 60° y este 30°, ¿no? (Anota las medidas de los demás ángulos). Acá suman 90°, 90°, 90° y 90°, suman 360°. No necesariamente tienen que ser regulares, pero sí cumplir que todos los ángulos que tocan los vértices cumplan que suman 360.



P: Entonces, a ver (inaudible)

E4: Pero sí son triángulos regulares esos.

P: ¿Qué es un triángulo regular?

E9: No, regular no es.

P: ¿Qué es un polígono regular? ¿Cómo lo definimos?

E13: Que tenga sus lados y ángulos iguales

P: De igual medida, ¿no? Acá no es regular, porque 60, 90, ya está. Pero vamos a generalizar un poco cosas que han dicho. ¿Qué pasa con los triángulos equiláteros? ¿Funcionan? ¿Puedo hacer una red con los triángulos equiláteros?

Es: Sí.

P: El diseño de E1 y lo que dijo E5 lo confirman. O sea que cubre, no se superpone nada. Luego él (E5) habló de los triángulos pitagóricos. Mañana vamos a retomar esto, pues no es el único caso. Creo que como hoy demostramos el teorema de Pitágoras quedó la idea del único tipo de triángulo. Pero sus argumentos convencen. Incluso pensando cosas que nosotros ya vimos. ¿Cómo serían estos dos ángulos?

E: Son iguales

P: Son iguales (hace un gesto con las manos mostrando rectas paralelas).

E9: Son correspondientes.

Los estudiantes van vinculando lo que se está trabajando con sus conocimientos previos, lo que permite afianzar conocimientos ya trabajados y usarlos para argumentar situaciones nuevas. La intervención docente y los vínculos que hacen los estudiantes permiten comenzar a generalizar criterios que deben cumplirse para formar una red. En cuanto a la dimensión del contenido, algunos estudiantes tienen dificultades para expresar sus ideas oralmente, y recurren a gestos con sus manos.

P: Serían correspondientes, ¿no? Hay paralelas, aparecen pila de cosas, o estos podrían ser alternos internos también. Otro tipo de triángulos que no sean el caso del equilátero, ni el caso del triángulo rectángulo, ¿Funcionaría o no?

E4: En los isósceles sí.

P: Un isósceles. ¿Por qué? (dibuja un caso de triángulo isósceles). Creo que no hay ningún ejemplo. Supongan que efectivamente este triángulo es isósceles, este lado igual a este lado. Es isoángulo, todo lo que ya demostramos.

E6: se puede dibujar uno igual para el otro lado.

P: Uno igual, en el semiplano opuesto con este borde,

E6: Eso sería un rombo

P: O sea que estaría funcionando, según lo que dijo la compañera. Yo hago una simetría con este eje, una simetría axial, obtengo dos veces la misma figura, y cubriría, ¿no? Podría seguir jugando. ¿Cómo jugaría acá? (Señala uno de los vértices comunes a los dos triángulos).

E10: Y podrías sacar otro lado igual, para el otro lado,

P: Para acá, ¿no? Y ahí

E10: Y ahí formás otro triángulo.

D: ¿Y el lado igual? ¿Cuál es?

E14: No, yo trazaría una paralela por el vértice al lado opuesto (el que fue tomado como eje) y ahí

P: Y ahí empezar a jugar. Interesante, a ver. Entonces, con el isósceles, ¿se convencieron?

Es: Sí.

P: ¿Y un escaleno? ¿Puedo formar una red tomando triángulos escalenos? Con un triángulo cualquiera.

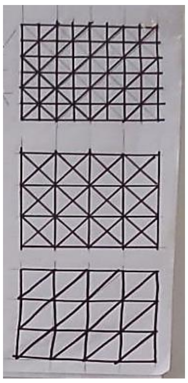
E6: Ese no.

P: ¿Ese no funciona?

E6: No, no, que si ese es escaleno. El de arriba (se refiere al que representó E5 antes).

P: Este es escaleno y es el caso que ya analizamos, es un triángulo escaleno porque sus tres ángulos son distintos, o sea que estaría cubierto. Bien, ahora vamos a agregar un lado. Pensemos en los que están representados acá.

E7: ¿Cuadriláteros?



P: (Dirigiéndose al equipo que hizo el diseño) Cuéntennos qué pensaron. ¿Hay algo para agregar a lo que hemos hablado?

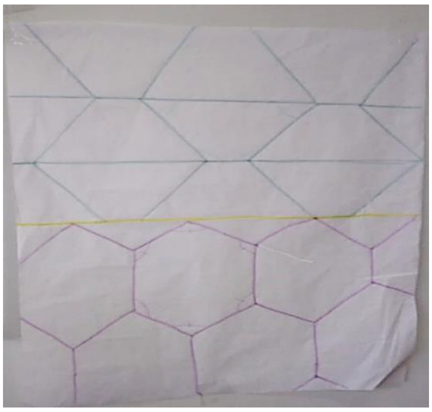
E9: Vimos que eran cuadriláteros. Que una red se formaba con cuadriláteros, una red, tipo un arco de fútbol, por ejemplo, se conformaba por cuadriláteros. Vimos que los ángulos internos de un triángulo son 180, y en el cuadrilátero son 360. Entonces vos dividís un cuadrilátero a la mitad, te quedan dos triángulos, y ahí fuimos sacando otras figuras más que podíamos usar para formar una red, sucesivamente. Por ejemplo, dividiéndolo en 4 también.

P: Bien. (Se dirige a otro grupo). Este era el de ustedes, ¿no?

E16: Sí, el de abajo es el hexágono.

P: El hexágono ya fue bastante discutido, ¿no?

E16: Bien, pensamos en uno que no sea regular.



P: Bien, una figura que no fuera regular. Y que tampoco tiene ángulos de 90.

E16: Ahí va, no tiene ángulos rectos. Igual es bastante particular, ¿no? O sea,

P: ¿Qué figura es?

E17: Un trapecio.

E16: Es una "pollera".

P: Una pollera. No todos, a lo mejor, saben lo que es una pollera. ¿Cómo definirías una pollera?

E16: Tiene dos lados iguales y dos lados paralelos opuestos.

P: Bien, y esos dos lados que son de igual medida, no están incluidos en rectas paralelas, ¿no?

E16: ¿Perdón?

P: Los dos lados que son de igual medida no están incluidos en rectas paralelas.

E16: No.

P: Perfecto. ¿Por qué funciona ahí, E16? (Responde E17, del mismo equipo)

E17: Porque tiene un eje de simetría, o sea, lo que pudimos ver es que como tiene eje de simetría, la figura cumple determinadas características, que tiene dos ángulos iguales consecutivos, entonces al ir, no sé cómo decirlo, al ir trasladándolo (hace una señal con la mano que semeja una simetría axial), no quedan baches, queda cubierto.

P: Bien, a mí me gustó una cosa que dijeron ustedes cuando yo iba pasando por los equipos, que ustedes sostuvieron, si no es así corríjanme, que los que funcionan, o sea, aquellos que voy a poder hacer una manta gigante eran los que tenían eje de simetría.

E16: Sí, pero ya creo que vimos que no.

P: A ver,

E17: O sea, por lo menos en los cuadriláteros llegamos a eso, sí.

En esta transcripción parcial se puede observar que, las discusiones entre estudiantes y el diálogo del profesor con los integrantes de los distintos grupos en la puesta en común, generaron una ampliación en el repertorio de figuras que tenía cada estudiante, en la clasificación de las figuras, pudieron transitar una evolución en la comunicación de sus ideas matemáticas a instancias de los requerimientos del docente. Los y las estudiantes tienen oportunidad de expresar sus conjeturas, en algún caso refutarlas, y considerar las ideas de sus pares. Sin embargo, se aprecian diferentes niveles de comunicación matemática entre los y las estudiantes, aunque aparece como esencial la posibilidad de comunicar las ideas. Es esperable que en el transcurso del año lectivo estas imprecisiones se vayan corrigiendo. Por otro lado, la tarea diseñada permite el abordaje de diversos conocimientos que se trabajarán, en el curso de Geometría I, a lo largo del año. Esto posibilita que el profesor revisite la tarea a propósito del tratamiento, por ejemplo, de las isometrías.

5.1.2 *Relato, episodios y análisis de la clase de Magisterio – IFD de la Costa*

Relato de clase

La segunda experiencia de clase la realizamos en el Instituto de Formación Docente de la Costa (Ciudad de la Costa, Canelones) en el grupo 1ro A perteneciente al turno Matutino, en la asignatura Matemática I. Los 90 minutos pensados para la actividad, se dividieron en dos grandes etapas. Una primera etapa de discusión en pequeños grupos de estudiantes y una segunda de discusión de las ideas y reflexiones surgidas en los pequeños grupos.

<u>*Primera etapa*</u>

Se comenzó la clase dividiendo a los y las estudiantes en grupos de 4 o 5 integrantes cada uno y presentando la tarea a realizar. A continuación, se les entregó la actividad en papel, junto con una hoja de medio watman para que presenten, en la segunda parte de la clase, los diseños realizados. A partir de ese momento, cada grupo comienza la discusión. La docente recorre los grupos monitoreando el trabajo que van realizando y respondiendo las dudas que puedan ir surgiendo.

Se pudo ver que en un primer momento los y las estudiantes necesitaron unos 10 minutos aproximadamente para comprender la tarea. Al comenzar la discusión en grupos, surgieron dudas en relación con algunos puntos de la consigna. En primer lugar, al no haber trabajado con la definición de polígonos, las dudas referían a si la circunferencia era o no un polígono. En ese momento, la docente hizo puntualizaciones tendientes a caracterizar los polígonos, pero sin definirlos aún. Luego de solucionado este primer inconveniente, los y las estudiantes observaron que en la segunda pregunta se pedía una figura, en lugar de un polígono como en la primera, por lo que preguntaron si para ese punto era posible utilizar la circunferencia. La docente observó que la idea era trabajar en todo momento con polígonos y que había sido un error utilizar la palabra figura en esa pregunta.

Al continuar con la discusión, cada grupo comenzó a proponer diferentes polígonos para sus diseños. Los polígonos más utilizados en cada subgrupo fueron triángulos y cuadriláteros. Se

pudieron observar distintos tipos de triángulos y dentro de los cuadriláteros principalmente paralelogramos.
Otra duda que surgió en la discusión en grupos, fue en relación a los polígonos regulares y los irregulares. Por este motivo, fue necesaria una nueva intervención de la docente frente a todo el grupo en la cual se aclaró que los polígonos regulares son aquellos en los que todos los lados y todos los ángulos tienen la misma medida. A continuación, se vio que los y las estudiantes preferían trabajar con polígonos regulares.
Uno de los grupos de trabajo llegó a la conclusión de que los polígonos regulares servían para realizar los diseños pedidos, mientras que los irregulares no. En este grupo la docente interviene entregando dos polígonos y solicitándoles que prueben a ver qué sucede con ellos. Uno de esos polígonos era un pentágono regular, mientras que otro era un trapecio isósceles. El trabajo con estas figuras les permitió refutar su hipótesis inicial y continuar buscando criterios para saber cuáles polígonos podían ser utilizados y cuáles no.
Otro grupo llegó a una conclusión similar, ya que afirmaba que todos los polígonos regulares permitían crear diseños para el arco de fútbol. En este grupo la docente les entregó un pentágono regular para que exploraran qué sucedía en ese caso, lo que les permitió contradecir su idea inicial.
Otros equipos llegaron a la conclusión de que el hexágono permitía generar el diseño pedido, pero se vieron enfrentados a la dificultad de no saber trazar dicha figura. En estos grupos la profesora les entrega un hexágono regular para que lograran presentar su diseño, ya que no era el objetivo de la actividad la construcción en sí, sino la exploración y la búsqueda de criterios para identificar los polígonos que podían ser utilizados.
Solamente un grupo llegó a la conclusión de que para que el polígono pudiera ser utilizado, la unión de los distintos polígonos en un mismo vértice debe formar un ángulo de 360°.
Segunda etapa
Luego de terminada la etapa de discusión en pequeños grupos, se procedió a la discusión con todo el grupo. La profesora les solicitó a los y las estudiantes que le entreguen los diseños realizados para que fueran colocados en el pizarrón, y que todos y todas pudieran ver los diseños elaborados por cada grupo.
La puesta en común fue organizada por la profesora seleccionando el orden en el que se iba a realizar la discusión.
En un primer lugar se discutieron los diseños que incluían paralelogramos y triángulos, ya que eran las figuras que más se repetían en las representaciones de los y las estudiantes. Los grupos cuyos diseños incluían esas figuras comenzaron presentando sus trabajos. A partir de ver los diferentes trabajos se centra la discusión en los triángulos y en los diferentes tipos de triángulos que sirven para formar la red. Se concluye, a partir del trabajo de los y las estudiantes, que todos los triángulos “funcionan” para realizar la actividad.

A continuación, se pasó a analizar aquellos diseños que incluían hexágonos regulares, revisando la idea de polígono regular, ya que era otra de las figuras repetidas en los trabajos. Se analizó la conclusión a la que arribaron dos grupos en un primer momento, en la que se mencionaba que con los polígonos regulares se podía formar la red y con los polígonos irregulares no. Luego de rechazada esa conclusión, por encontrar contraejemplos, un grupo plantea que si se utilizan polígonos regulares con más lados que el hexágono no se puede formar la red. En este sentido, un grupo plantea que trabajaron con octógonos y vieron que al intentar hacerlo, los octógonos regulares se superponen, por lo que no se cumple con la consigna de la actividad. Lo mismo sucede con heptágonos regulares. En ese momento se afirma que "hasta el hexágono regular sirven, pero al aumentar los lados no". Sin embargo, otro grupo plantea el caso del pentágono regular y se discute esa afirmación. Se llega a la conclusión de que los pentágonos regulares no sirven, pero existen pentágonos irregulares que sí pueden ser utilizados para formar la red.

A partir de esto, la profesora les propone pensar por qué el pentágono regular no sirve, el hexágono regular sí sirve y los polígonos regulares de más de seis lados tampoco sirven. Una estudiante plantea analizar qué sucede con el ángulo que se forma en un vértice en el que se unen las figuras. En ese momento la profesora le da la palabra a la estudiante que, en la discusión de grupos, había planteado que en el vértice común a las figuras debía formarse un ángulo de 360° para que el diseño sirviera, y se pone en discusión dicha afirmación. Se observan diferentes polígonos regulares en los que se constata que esto se cumple. A continuación, la profesora propone pensar ejemplos con figuras irregulares para ver si este criterio se sigue cumpliendo, por lo que se analiza lo que sucede con los triángulos escalenos antes vistos. Dado que el tiempo de clase se va terminando, la profesora propone pensar eso como tarea para discutirlo en un próximo encuentro.

Episodios de clase y análisis

Profesora: (Mostrando las producciones de los estudiantes) Vamos a arrancar por algo que se repitió bastante, que es lo que tiene que ver con paralelogramos, cuadrados, hay un triángulo ahí que termina formando un cuadrado, rectángulos. Eso fue lo primero que hicieron. Vamos a empezar por acá, a ver, ¿Qué hicieron ustedes? Cuéntennos.

Estudiante 1: El primero que pensamos que podía servir era el triángulo isósceles, el que está a la izquierda, arriba, y abajo el rombo. Lo que conversamos fue que, después que nos dijiste que en el polígono tienen que ser lados rectos,

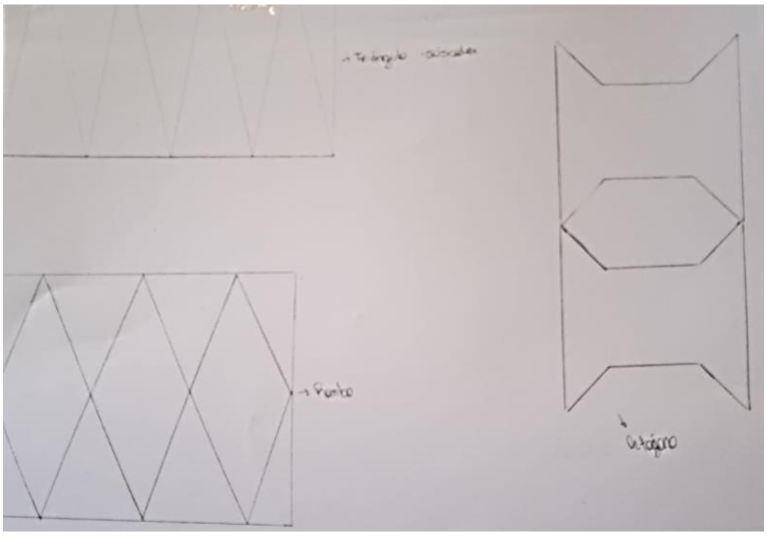
P: Segmentos, ¿no? Que los lados de los polígonos son segmentos.

E1: Consecutivos, que siempre van a tener la misma forma, que pueden ser finitos o infinitos.

P: Sí, lo que nos interesaba para este caso es que podamos formar esa red que estamos buscando, con un mismo polígono. Y lo que hablamos fue que una característica que tienen los polígonos es que sus lados son segmentos. Por eso, vieron que cuando hablamos, a varios se les ocurrió la circunferencia, y la circunferencia no es un polígono. Y este es el ejemplo que encontraron que no sirve.

E1: Sí, más o menos venía por el mismo lado. Justificamos porque no es tan consecutiva la figura, y aparte que quedan espacios como libres, por ejemplo, en el medio, que está ese que es un hexágono, quedan como espacios en la red y tendrían que ser como uno al lado del otro.

E2: ¡Ah! Hay dos figuras en la misma red.



P: Bien, con lo que tienen acá les quedan dos figuras en la misma red y no se cumple la consigna, que era que usaran siempre el mismo polígono. (Se dirige a otro grupo). Bien, ¿ustedes qué pensaron?

E3: Nosotros elegimos el hexágono.

P: Como figura que sí

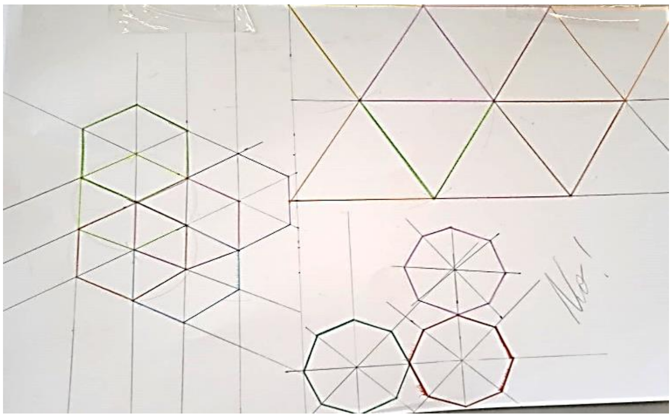
E3: Como figura que sí, que sirve para poder armar la red.

E4: Que está contenido el triángulo también.

E3: Ahí va, que adentro hay triángulos equiláteros, entonces también se daba que era continua.

P: O sea que, a ver si interpreto lo que estuvieron conversando, para todos. Con esto ustedes concluyeron que tanto el hexágono como el triángulo equilátero

E5: Funcionan.



P: Funcionan, son dos figuras con las que se puede armar una red.

E4: Una está dentro de la otra, por lo que veo ahí.

E5: Claro, así fue que se dieron cuenta.

E3: Y después también vimos que con triángulos isósceles,

P: O sea, como los compañeros de acá, ustedes vieron que también se podía con los triángulos isósceles. O sea que hasta ahora vamos viendo que los triángulos isósceles, los triángulos equiláteros, *los hexágonos, todos esos, van funcionando. Pero ya que hablamos de los triángulos isósceles y los equiláteros, ¿otro tipo de triángulos?*

E6: El escaleno.

P: ¿Un escaleno servirá?

E3: No

E5: Yo creo que no porque no se podría armar una red que quede

E3: Porque los segmentos no son consecutivos, igual que en el octógono.

P: A ver los compañeros del fondo. ¿Acá ustedes qué figura usaron?

E7: Partimos de los cuadrados, formando dos triángulos.

P: ¿Y estos triángulos qué tipos de triángulos son?

E7: Rectángulos.

P: Y surgen de un rectángulo también, ¿no?

E6: Sí.

P: No, de un cuadrado. Entonces, si surgen de un cuadrado también son isósceles. ¿Están de acuerdo con eso?

Es: Sí.

E4: Pará que me perdí, ¿cuál es el escaleno?

P: ¿Cuál es el triángulo escaleno?

E4: ¿El escaleno no es el que tiene los tres lados diferentes?

P: Sí.

E4: Pero también se puede, porque tiene un ángulo recto. Por lo menos con el ángulo recto. Y en realidad podría ser, aunque sea escaleno, puede formar red, porque dos escalenos te pueden formar un rectángulo por ejemplo.

P: ¿Qué les parece a los demás?

E2: Nosotros probamos un escaleno, aunque no tuviera ángulo recto, hicimos una cosa rara y terminábamos uniéndolos igual.

P: O sea que ustedes probaron que los triángulos escalenos, aunque no sean rectángulos, porque vos proponías que si es rectángulo sí,

E5: Y si no es, también.

P: Estoy de acuerdo, les iba a decir lo mismo. Porque como ellos, que surgió el triángulo isósceles al trazar la diagonal de un cuadrado. Y si en estos rectángulos que ellos vieron también que funcionan, trazamos la diagonal, me forma un triángulo escaleno rectángulo también, y estaríamos viendo que *funciona. Ahora, ella lo que dice es que en realidad, ellos probaron con cualquier triángulo escaleno, no con uno que fuera rectángulo, y también les funcionaba. O sea que triángulos rectángulos, triángulos equiláteros, triángulos isósceles, triángulos escalenos. Allá, por ejemplo, ya tienen un ejemplo, miren.*

(Inaudible)

E4: Unimos los lados más largos.

E7: Como dividir el rombo a la mitad.

P: Un rombo no necesariamente, porque los rombos tienen todos los lados iguales. Acá están formando

E4: Un paralelogramo.

P: Por ejemplo, si yo tengo esto, ¿algo así es tu dibujo, verdad?

E4: Sí

P: Ella dice este

E4: ¿No es recto?

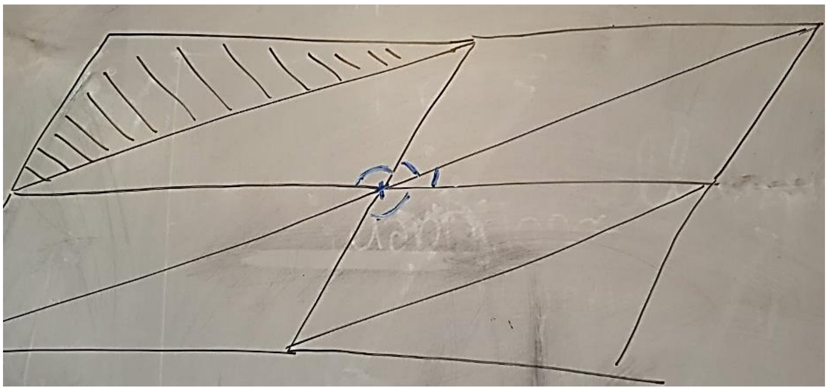
P: Es escaleno, no es isósceles. No es equilátero, no es rectángulo tampoco, y ella lo que hace es colocar la misma figura pero acá. Y ahí nos damos una idea de que esto podemos seguirlo.

E2: ¿Yo miro mal, o las paralelas como que siguen estando?

P: Ella los ubicó de forma que le quedaran paralelas, ¿no?

E4: Sí, eso. Queda un paralelogramo.

P: Termina formando un paralelogramo. Lo voy a hacer para que lo vean todos, y voy a marcar, sería esta la figura inicial, ¿no? Así que, ¿qué podemos decir de los triángulos?



E4: Que se cumple

E5: Que siempre se puede armar la red.

P: Bien. O sea que, en principio con cualquier triángulo funcionaría esto de armar la red. Vamos a ver después si profundizamos un poco más en los triángulos.

En la transcripción anterior podemos observar que la docente promueve que los distintos grupos presenten sus producciones y las expliquen, así como que las justifiquen, aunque lo hacen de acuerdo con sus posibilidades, dado que son estudiantes de primer año de la carrera de magisterio. Los distintos estudiantes buscan justificar lo que hicieron, y la docente los interroga, interviniendo, cuando lo cree necesario, para ajustar el lenguaje o introducir nuevos conceptos. Se mantiene un ambiente de producción intelectual desafiante, ya que la docente enfoca sus preguntas en aspectos que llevan a evolucionar las discusiones. Asimismo, existe una evolución conceptual en cuanto a las explicaciones que se van dando.

Las siguientes transcripciones muestran una etapa más avanzada de las discusiones, luego que todos los grupos han explicado sus producciones. En esta segunda etapa se buscan argumentaciones y generalizaciones, y son los y las estudiantes quienes en general quedan a cargo de formularlas.

A continuación se analizan producciones de otros grupos, que involucran polígonos regulares y no regulares. Se establecen algunas conjeturas de generalización de un criterio para la posibilidad de armar una red. Luego se vuelve a los triángulos.

E8: Esto que se me ocurrió ahora,

P: A ver

E8: Capaz es un divague, pero ta. Yo me atajo por las dudas. Que capaz tiene que ver con el ángulo opuesto por el vértice.

E3: El lado opuesto

P: Bueno, a ver, miremos un poquito qué estás queriendo decir con eso, por ahí dijeron algo parecido. ¿Qué querés decir con eso? Explicate un poquito más, a ver.

E8: O sea, que el ángulo que se formaba de este lado tiene que ver con el ángulo que está del otro lado, o sea que es formado por las dos figuras, y no con el ángulo formado por una figura, sino el ángulo que forman las dos figuras juntas.

P: Bien, o sea, por ejemplo, a ver, este ángulo que se forma acá (lo marca en la figura que había representado en el pizarrón).

E8: Claro.

P: Entre las figuras, donde está el vértice. ¿Sí? O sea, ella dice que quizás tenga que ver, más que con otra cosa, con el ángulo que se forma en los vértices entre las figuras. Que es parecido a lo que habías dicho vos. Contanos a todos cuál era la conclusión a la que vos habías llegado.

E5: Que en el vértice se formaban, por ejemplo, en el hexágono que está ahí, se formaban tres diferentes ángulos.

P: Tres diferentes, pero

E4: Iguales

P: O sea, tres ángulos con la misma medida.

E5: Claro. Y que la suma de ellos era 360º. En el triángulo nos pasaba lo mismo.

P: A ver, ¿cuáles fueron los triángulos de su diseño? (La estudiante lo señala). Ellos usaron triángulos rectángulos, y como son 90, 90, 90 y 90, también suman 360. Vamos a investigar un poquito más eso.

E2: En el hexágono pasa lo mismo entonces.

P: En el hexágono, ¿por qué decís que pasa lo mismo? ¿A ver?

E2: Por las rectas esas paralelas, ¿no? Que tienen, si nos fijamos,

E3: Son de 45º y también

E2: No, son 180 y 180

P: Ah, 180 y 180. ¿Te acordás lo que hablamos en tu grupo, que acá tenemos estos triángulos?

E2: Sí.

P: ¿Y cuánto miden? ¿Qué tipos de triángulos son?

Es: Equiláteros.

P: ¿Y cuánto mide cada ángulo de un triángulo equilátero? ¿Se acuerdan?

E5: 60.

P: 60, entonces sería 60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60, 360, o sea,

E7: ¿Eso no es lo que vimos el otro día en la clase, de paralelas, o algo así?

P: A ver, si tengo paralelas, si tengo ángulos alternos internos entre paralelas, esos van a aparecer por acá. Pero acá, en este vértice no.

E4: Si el ángulo que se forma en el vértice de la división de las figuras es 120, no se puede

P: A ver, vayamos por ahí. Repetilo así todos te escuchan.

E4: Si el ángulo que se forma en el vértice donde se juntan las figuras es mayor a 120, no se puede formar una red, porque se superponen.

P: ¿Qué les parece?

E10: ¿Mayor a 120? (inaudible, hablan varios al mismo tiempo, discutiendo)

E9: Pero en el pentágono teníamos 110.

P: ¿110? ¿en el regular?

E9: Sí, casi 110.

P: Ah, casi. Porque en realidad es 108. Ella (E4) lo que está diciendo es otra cosa.

E4: Claro, es otra cosa. Los vértices donde se juntan las figuras.

P: Ella lo que dice es, si las tres figuras, a ver si te interpreté bien, si las tres figuras que estoy utilizando, que son figuras iguales, en ese ángulo se forman tres ángulos mayores, tres ángulos de 120º, por ejemplo, o más, no me va a servir. Lo que no quita que capaz, si hay menos tampoco.

E4: Porque si hay menos (inaudible)

P: Una cosa no descarta la otra. Vamos a pensarlo un poquito y lo analizamos. Vos lo que dijiste entonces es, a ver, ¿tenemos algún ejemplo? Por ejemplo el hexágono.

E4: El hexágono, en la segunda figura se ve bien. En la de nosotros están todos dibujados y no se entiende bien. En la otra, ahí donde están unidos por los lados, se nota bien donde se unen las figuras para armar la red

P: Acá (señalando)

E4: Ahí. En ese vértice los tres ángulos son de 120º.

P: ¿Están de acuerdo?

Es: Sí.

P: Eso vos lo pusiste como el límite, digamos.

E4: Porque si ponemos más figuras de 120, porque tampoco pueden ser más de tres. Si ponés cuatro figuras de 120 ya no se puede.

E3: Pueden ser más de tres, pero los ángulos tienen que ser más chicos.

E8: Lo que pasa es que, claro, si estás llenando un plano, siempre todo lo que busques de un plano va a ser 360. Porque, por ejemplo, si tu figura son dos triángulos contenidos dentro del hexágono, entonces ahí tenés 1, 2, 3, 4, 5, 6 triángulos.

E4: Llega a 360.

E8: Pero depende de la cantidad de figuras.

(Hablan varios a la vez, discutiendo entre ellos).

E5: 120 si son iguales, porque, me parece, en el caso del rombo, vamos a suponer el vértice de uno de los rombos,

P: Acá.

E5: Bien, ese, ¿no? Tenemos dos opuestos iguales y dos opuestos del otro lado, que superan los 120º. Pero son complementarios a la vez, ¿no?

P: Esperá, ¿suplementarios sería lo que estás queriendo decir?

E5: Se complementan con el de arriba, digamos con el ángulo de al lado. O sea, un ángulo se complementa con el otro.

P: ¿Para formar qué cosa se complementan?

E5: 180

P: Entonces se llaman suplementarios.

E5: Suplementarios.

P: Por eso te pregunté. Bien. Porque puede ser que en los vértices yo no tenga todos ángulos iguales.

E5: Claro.

P: Porque ella (E4) estaba hablando de cuando tengo iguales. Tres de 120 decía ella. Pero, repito, no es un criterio definitivo en el sentido de que puedo tener ángulos que sean distintos.

E2: ¿Y esos ángulos de cuánto son?

P: No sé, a ver los que hicieron ese diseño.

E8: 120, 120, 60 y 60 debe ser.

E7: ¿Los puedo medir profe?

P: Sí, medilos, sí.

En las transcripciones anteriores se puede apreciar un acceso equitativo al contenido, ya que los distintos estudiantes pueden explicitar sus ideas desde su lenguaje disponible. Explican sus razonamientos y durante la puesta en común van surgiendo nuevas ideas. Las y los futuros docentes hacen conjeturas, discuten entre ellos y ellas, refutan y aceptan ideas propias y de otros, generalizan. Se involucran en las discusiones, y esto les permite evolucionar en su dominio del contenido. La docente interviene haciendo precisiones, pero en este tramo más que en el anterior, interviene fundamentalmente a través de preguntas y repreguntas. Interpretamos que esto es conveniente al sostenimiento de la demanda cognitiva de las actividades (porque al inicio cada grupo explicaba lo que había producido, en tanto ahora confrontan distintas resoluciones). Pero también promueve la identidad de los estudiantes como pensadores matemáticos, aspecto esencial de la dimensión de disponibilidad, dominio e identidad de los estudiantes, una de las establecidas en el marco TRU.

En suma, el análisis de las dos clases implementadas pone en evidencia, por un lado, diferencias en cuanto a los conocimientos de base de las y los estudiantes ya que cursan diferentes carreras. Por otro lado, si bien las clases fueron exhaustivamente planificadas y discutidas, se aprecian diferencias en cuanto a las intervenciones docentes. El foco de nuestro trabajo no está en señalar estas diferencias ni en comparar una clase con otra. Consideramos que en ambas implementaciones, a pesar de estas diferencias, se evidencian diversos aspectos señalados en el marco TRU que fueron tenidos en cuenta por quienes las llevaron adelante.

5.2 Evaluación formativa de los y las estudiantes

Luego de dictada la clase en el IFD de la Costa, se pidió a los y las estudiantes que respondieran un cuestionario on line que consistía en las siguientes cuatro preguntas:

1. Menciona tres conceptos trabajados en la clase de hoy.
2. En tus experiencias anteriores en clase de matemática, ¿has trabajado en la modalidad trabajada en la clase de hoy? Explica ampliamente.
3. ¿Cómo te sentiste trabajando de esta manera? Compáralo con tus experiencias previas en clase de matemáticas. Menciona ventajas y desventajas.
4. ¿Consideras que esta metodología puede ser implementada en el aula en secundaria/primaria? ¿Por qué?

Comentaremos brevemente algunas de las cuestiones que surgen de las respuestas dadas por los y las estudiantes.

En las respuestas a la primera pregunta aparecen los conceptos: polígonos, ángulos, figuras regulares, triángulos, como los más referenciados. Estos conceptos coinciden con los que se trabajaron en la puesta en común.

En relación con la segunda pregunta, varios estudiantes hacen referencia al trabajo grupal. Comentan que han trabajado en grupos en la clase de matemática, pero no lo han hecho con actividades como las que se presentan en este caso. Observamos distinto grado de reflexión por parte de estos, ya que muchos se quedan solamente en la dinámica grupal, mientras que otros reconocen el tipo de tarea presentada a la hora de responder la pregunta.

La tercera pregunta hace referencia al sentir de los y las estudiantes al trabajar de esta forma. Todas las respuestas aluden a lo cómodos que se sintieron al trabajar intercambiando ideas con sus compañeros y compañeras, explorando y sacando conclusiones. Mencionan que les resultó interesante la forma en que se propone la actividad y que no encuentran desventajas en este tipo de trabajo.

La última pregunta también deja en evidencia los muy variados grados de reflexión que manejan los y las estudiantes de este grupo, quizás vinculado a que son estudiantes de primer año y no han reflexionado aún sobre las prácticas docentes. En esta pregunta se les pedía que reflexionaran sobre la aplicación de esta metodología de trabajo en el aula de primaria o secundaria. Nos gustaría destacar algunas de las respuestas dadas en este punto:

“Creo que sí puede implementarse ya que trabajar actividades en equipos genera debates en los que los estudiantes defiendan sus ideas y razonamientos, lo cual les implica formar argumentos para validar su pensamiento.”

“Sí, sí, totalmente, porque el trabajo en grupo permite tener apreciaciones, de lo mismo, contrarias, o iguales que confirman el conocimiento de cada uno. Si bien puede llevar más

tiempo que de forma individual siempre es más enriquecedor ya que como dije antes, entre todos con pensamientos y vistas diferentes se puede llegar a una conclusión más general"

"Si, les ayuda a entender, a aprender a explicarse al tener que comunicar su idea a sus compañeros y además está bueno que vean que a veces no hay una única solución al problema."

Nos resulta muy interesante que, a pesar de ser estudiantes de primer año, que aún no han tenido práctica docente ni clases de didáctica donde estudiar y reflexionar sobre las diferentes prácticas que puedan implementarse en un aula, varios estudiantes reconocen las posibilidades que brindan este tipo de actividades. Esto nos lleva a destacar la importancia de que los y las estudiantes vivencien modalidades diferentes a las tradicionales en sus clases de formación docente, ya que esto contribuye a su formación como futuros docentes.

5.3 Análisis del proceso colectivo llevado adelante por el equipo de investigadores

El análisis del proceso colectivo desarrollado por las y los investigadores durante la planificación, implementación y discusión posterior de una clase investigativa lo desarrollaremos utilizando el marco de la reflexión de Ricks (2011). Como ya dijimos en los antecedentes, este autor presenta un marco, llamado reflexión de proceso, que se compone de cuatro pasos o etapas: un evento de la experiencia, la suspensión de ideas y creación de un problema, la formulación y refinamiento de ideas, y el testeo en la acción. A continuación presentamos ejemplos de episodios sucedidos en las distintas etapas de trabajo colectivo desarrollado por las y los investigadores, donde damos evidencia de reflexiones de proceso.

Lo que genera la planificación y el análisis de clase dentro del proceso de LS

El equipo de investigadores tuvo doce reuniones, de aproximadamente dos horas de duración, en las que se dedicó al estudio de materiales relativos a los conocimientos a enseñar en los programas de primer año de profesorado de matemática y de magisterio, a diseñar una tarea y planificar la clase. Con respecto al análisis de las clases implementadas y de la discusión sobre lo sucedido en estas, el equipo se reunió diez veces. Cada una de esas reuniones duró aproximadamente dos horas. Presentamos a continuación, a modo de ejemplo, dos episodios en los que interpretamos que se da un ciclo de reflexión de proceso.

Episodio 1

En la última reunión realizada antes de implementar las clases, una de las investigadoras trajo una inquietud al grupo: la necesidad o no de trabajar el concepto de polígono antes de implementar la tarea en la clase investigativa en magisterio. Esto se fundamentaba en la posibilidad de que los estudiantes de magisterio abordaran la tarea con otras figuras que no fueran polígonos, como por ejemplo la circunferencia. Esta pregunta de la investigadora al equipo generó una profunda discusión en torno a su interrogante, así como a otras cuestiones que derivaron de esta. A continuación presentamos parte de la discusión llevada adelante por el equipo.

I3: A mi me surgió una duda. En la clase de esta semana yo podría dar la definición de polígono, clasificación en regulares e irregulares, la suma de ángulos interiores, hasta por ahí. ¿Es conveniente que sepan eso antes de implementar la clase?

I2: Creo que sí.

I1: Para mí, parte de eso sería lo que queremos que surja en la clase. Yo no daría nada de eso. O podría ser definir polígono y nombrar elementos, pero no sé. En la planificación que hicimos eso aparece como posibles temas a trabajar.

…………………..

I1: La ventaja sería que ya saben de qué estamos hablando cuando hablamos de polígonos, pero el problema que yo veía es que ponerse a hablar del polígono en una clase anterior te puede llevar a hablar de pila de cosas que después queremos que surjan ahí.

I3: Claro, es que esa exactamente fue mi duda. Porque yo perfectamente, pensé eso, bueno, capaz que me conviene hablar de lo que es un polígono para que después ellos cuando lean la letra entiendan que no puede ser una circunferencia, por ejemplo, que ya como que este paso lo tengan claro. Pero por otro lado, dar, decir solo la definición de polígono me deja como que, porque eso está atado a que hablamos de polígono regular, de los ángulos, un montón de cosas. Que cortarlas, o sea, no puedo dar solo la definición, yo estuve como pensando eso.

I1: Una noción del polígono traen.

I2: Claro, sí, visualmente.

I1: Aunque pueden considerar una circunferencia, pero en ese caso se puede discriminar cuando aparezca, ver que no es un polígono. Por ejemplo, preguntarles a ellos, bueno, ¿están considerando un polígono regular? Bueno, entonces la puesta en común aprovechamos y decimos, podemos dar una definición de polígono regular, a qué le llamamos polígono regular. O, si el escenario es otro, ya lo trabajamos la clase pasada y decimos, recuerdan entonces que le llamábamos polígonos regulares a estos, o sea, te cambia el discurso de lo que va a pasar en la puesta en común.

I2: A mí lo único que me hace un poquito como de ruido es magisterio. No es, o sea, didácticamente lo que ustedes dicen, yo estoy súper de acuerdo. I3 incluso me decía de no perder la potencia de la actividad abierta. El tema es que da todo tanto laburo que no sea que nos quite tiempo eso, o sea la definición y eso, en 90 minutos, como les da tanto trabajo. Incluso si ve algo, poquito, la clase anterior, yo creo que puedo ayudar porque no retienen todo.

I1: Pero la definición no tiene por qué ser institucionalizar una definición. Puede ser coloquial, puede ser, entendemos por polígono …

I2: Sí, sí.

……

I1: Ahora yo tengo una pregunta. ¿Qué definición de polígono dar?

I2: Yo iba a preguntar lo mismo.

I1: Digo, pensemos nosotros a qué definición cada uno está afiliado porque yo tengo una que la tengo marcada a fuego, que es la de los semiplanos y no existe más. Pero en primaria se usa mucho la unión de segmentos con ciertas condiciones, me parece.

I2: La poligonal cerrada.

I3: Yo en magisterio, ahora, desde hace un par de años les estoy hablando de la intersección de semiplanos porque es coherente con cómo defino triángulos y con cómo defino ángulos.

I1: Porque según la definición que des es qué puntos pertenecen y cuáles no pertenecen a la figura. Primero eso, y el baricentro pasa a ser otro. Si son los 3 vértices, si son los 3 lados y si es todo lo que está dentro. Hay una cantidad de cosas ahí.

I2: Claro, por ejemplo, el libro de geometría define el contorno de cualquier polígono, y no toma en consideración la superficie, Puig Adam hace la intersección de semiplanos, claro.

I3: En realidad en los materiales que se trabajaban en magisterio no hay una definición de polígono, los que estaban y que se siguen usando, después en un momento habla de poligonal cerrada y eso. Pero yo igual metí una definición de polígono porque me parece que quedaba incoherente si no. O sea, yo vengo hablando de que el ángulo es esto. Después vino el triángulo, se los hago dibujar, y que vean.

I1: También lo que pasa que eso lleva una definición de ángulo coherente. Como la unión de 2 semirrectas.

I3: Por eso lo que yo pensé, el año pasado, que empecé con esa definición es que les estoy hablando de que el ángulo es la intersección de dos semiplanos de bordes secantes y después los triángulos son 3 semiplanos en determinadas condiciones y bueno, como que siguiendo en esa línea.

………………………………

I3: Sí, yo pensaba mientras hablábamos de esto, independientemente de lo que definamos como polígono, también otra cosa que tenemos que conversar es que, si no vamos a definir previamente polígono sea de la forma que sea, qué noción vamos a manejar en este momento, porque para distinguir, por ejemplo, de la circunferencia, va a haber que, en algún momento, dar alguna noción de por qué no es digamos, o sea, no sé.

I3: Qué cosas decir para que se llegue a la idea que queremos.

I1: No, pero ahora lo que estoy viendo, la desconexión que tenemos entre todos, porque si en la escuela se habla de la poligonal. Los libros que escribimos para el liceo, hablamos del interior también, entonces no condice con lo que aprendieron los estudiantes, o sea que hay como una disociación, cada uno viene con su manual y el pobre estudiante queda en el medio.

I3: Sí, sí, sí, esto es todo un tema.

I1: Si nosotros en el libro de Secundaria hasta lo pintamos adentro para distinguir que todo el interior es parte del polígono.

I3: Pero en primero de Liceo, hacés énfasis en que no son solo los lados, que vos no podés meter la mano por el medio.

………………………………...

I1: Bueno, yo lo que pienso es que como dice I2, se va el tiempo si se hace eso, pero que capaz que se puede dejar para una clase siguiente de discutir más a fondo. A mí me parece que en magisterio también es pertinente, no en el sentido de una definición rigurosa, pero sí dar la discusión entre los dos tipos de definición, porque eso sí hace a la práctica de ellos después. Los estudiantes van a tener que ver, tomarán una u otra, habría que fijarse, por ejemplo, el libro de Damisa de primaria, no sé qué definición de polígono, qué idea de polígono toman, no sé bajo qué base hablan de todo lo que hablan de los polígonos y hacerles ver eso a los estudiantes de magisterio. Que si yo hablo de la de los semiplanos, bueno, este punto pertenece al polígono y si hablo de la poligonal este punto no pertenece al polígono, le llamaré interior. Como dice I2, no va a entrar en esta clase todo eso, pero puede entrar en la siguiente. Sería una preciosa discusión para magisterio. Y para el profesorado también. Por eso me parecía importante discutir qué definición de polígono. ¿Por qué? ¿Cómo?

I1: O se puede dejar abierta.

I3: Sí, eso sí, se puede, como discutimos, pero mi pregunta es si estamos en la clase y un alumno empieza a intentar con una circunferencia, ¿no? Entonces uno tiene que decir que eso no es un polígono, entonces ahí hay que ver qué es un polígono. Entonces, mi pregunta es ¿qué decir? Hablando de esto del discurso para no generar conflictos ni profundizar tanto porque no queremos en este momento profundizar en la definición, se puede hacer después, pero que les lleve a la noción que a nosotros nos interesa que tenga para esta actividad.

I1: En la clase va a haber muchos alumnos, muchos van a tener una imagen del polígono con lados y a lo mejor hay alguno que tiene la imagen del polígono como cualquier curva. No sé, entonces, de repente, pasar la pregunta a la clase, ¿qué les parece que es un polígono? A ver, dibujen un polígono. Entonces, ¿qué características tienen? Por lo menos descripción.

I2: Si, o podés poner polígonos y no polígonos.

I3: Bueno, los polígonos tienen lados y la circunferencia no tiene lados, no, no cuadra, entonces no la voy a usar.

I1: Sí, sí.

I2: También me parece que es lo correcto.

En la transcripción que hemos presentado, interpretamos que se da un ciclo de reflexión de proceso, como lo describe Ricks (2011). En cuanto a la primera etapa, que es la existencia de un suceso de la experiencia, identificamos la pregunta que formula I3 al grupo, como un evento anticipado por ella, que podría suceder en la implementación de la clase. I3 se pregunta si es conveniente presentar una definición de polígono, y describir sus características, para que los estudiantes no se encuentren con la dificultad de no conocer la definición, al enfrentarse a la tarea. Esta pregunta de I3 es convertida por el grupo en un problema a resolver, que es si dar esa definición antes de la clase planificada, o esperar a presentar las características de un polígono luego de que los y las estudiantes elaboren soluciones para la tarea. Aquí se suspende una respuesta rápida al problema, y este es analizado. Surgen diversas cuestiones a considerar. Por ejemplo, que si se presenta una caracterización de los polígonos, se hablará de cuestiones que están pensadas para que surjan de las resoluciones de los y las estudiantes. También, que ellos y ellas irán a la clase con algunas ideas de lo que es un polígono, aunque estas puedan ser erróneas. La discusión de la conveniencia o no de presentar una definición lleva a la pregunta, formulada por I1, de qué definición de polígono se trabajaría en la clase, ya sea que se trabaje antes o después de la resolución de la tarea. Y esto trae a colación otras cuestiones, como la existencia de al menos dos definiciones posibles, que llevan a diferentes caracterizaciones de un polígono, de los puntos que pertenecen y no pertenecen a este, así como coherencias o incoherencias en relación con la definición de ángulo, por ejemplo. Incluso se analizan distintos textos en busca de qué definiciones presentan, y se discuten los abordajes usuales en primaria, secundaria, y en la formación de maestros y de profesores. Todas estas discusiones forman parte de la etapa de formación y refinamiento de ideas del ciclo presentado por Ricks (2011). La última etapa del ciclo de reflexión de proceso la constituye el testeo en la acción. Si bien este no aparece en la transcripción, en la reunión referida se llega a la conclusión de que lo más conveniente es no presentar ninguna definición antes de la clase a implementar, y sí discutir posibles definiciones (en esa clase o en la siguiente), atendiendo a las ventajas y desventajas de cada una, y al hecho de que las definiciones son, en cierta medida, arbitrarias, e implican decisiones docentes. En particular se discute la importancia que esto tiene para la formación de docentes. La acción se desarrolla en las dos clases implementadas, ya que en ambas se espera que surja la necesidad de discutir una definición o caracterización de polígono, luego que los y las estudiantes han comenzado a trabajar con la tarea presentada.

Episodio 2

El siguiente episodio tuvo lugar durante el análisis de las clases implementadas. Podemos observar que en ambas clases sucedió un evento relacionado con la interpretación que los y las estudiantes dieron a la letra del problema. Este hecho devino en un problema para el equipo. Tras el análisis del mismo, observamos que la redacción de la tarea generaba diferentes interpretaciones: las del equipo y la de los y las estudiantes. Esto nos llevó a analizar las cosas que, como profesores, asumíamos que eran claras y constatamos no lo eran tanto. A continuación presentamos parte de la discusión llevada adelante por el equipo en donde se evidencia la problemática planteada.

I2: *Me pasó algo puntual que es como… con la consigna, que… cuando empezaron muchos toman la consigna y la interpretan de una manera, la interpretan de tal manera que eligen, por ejemplo, los triángulos equiláteros y hacen dos diseños con triángulos equiláteros.*

I1: *¿Cómo es? Dos diseños distintos con triángulos equiláteros se me complica.*

I2: *Claro, lo piensan así o así (muestra los diseños con las manos), piensan que es distinto.*

I1: *Mmmmmm*

I2: *En la consigna, después de la primera pregunta dice: "Presenta al menos los diseños de dos ejemplos distintos utilizando el mismo polígono con el que se pueda formar una red". Me pasó con dos subgrupos que interpretan, por ejemplo, elegir el triángulo equilátero y pensar dos diseños distintos. Como que no piensan en dos polígonos distintos.*

I1: *Interpretan que es el mismo polígono.*

I3: Pah, eso… Si, claro. No es lo que quisimos poner. Bueno, a mi eso no me pasó pero me pasó con la consigna, en la segunda pregunta surgió el problema… Bueno, qué polígono, que vimos que el polígono tenía que tener varios lados, como habíamos hablado: sin definir pero caracterizándolo para poder usarlo. Pero me pasó que en la segunda pregunta, cuando pedimos el que no es, en vez de polígono dice figura.

I2: Ahhhh. "¿Existe alguna figura con la que no…"

I1: La circunferencia, por ejemplo.

I2: Claro, Polígono. Eso se nos pasó.

I3: Y me dijeron, acá no dice polígono, dice figura. Me dijeron varios grupos eso. Porque yo había aclarado lo que era polígono y ahí…

I1: Bueno, ta. Ahí ya tenemos cosas para cambiar en la consigna. Pah, es re interesante.

I2: Bueno, eso es lo que yo detecté con la consigna en un par de subgrupos.

I1: Qué loco, ¿no? Pero los chiquilines tienen razón. Tanto en lo que pasó en la clase de I2 como en la de I3. Con esta información, lo leo ahora y entiendo lo mismo que ellos.

I3: Claro, es lo que dice y no lo que quisimos decir.

I2: ¿Sabés que sí? Y ninguno de los tres nos dimos cuenta.

I1: Independientemente que este fue un problema nuestro en la redacción, si lo pensás bien… si pensamos en lo que hacemos habitualmente… no nos damos cuenta que asumimos una forma de decir que fuimos adquiriendo con los años y que realmente no dice nada. Por ejemplo, cuando decimos "dados una recta r y un punto P", ¿qué significa eso?

I3: Tenés razón, sintácticamente no dice nada y nosotros asumimos que los chiquilines lo van a entender.

I2: En los dos casos vamos a tener que cambiar la letra del problema. Hay que pensarlo bien, no solo en estos casos sino de acá en más.

Como vemos, a partir de lo sucedido en ambas clases dictadas, se toma conciencia de algo que hasta ese momento tomábamos con naturalidad: las formas de comunicar ideas no eran claras. La discusión sobre este fenómeno giró en torno a la asunción e internalización de un lenguaje que fuimos incorporando sin cuestionarlo. Este hecho nos llevó, con posterioridad, a revisar en textos y materiales las consignas de diferentes actividades. Comprobamos que, en la mayoría de ellas estaban redactadas en un lenguaje técnico construido en ambientes académicos y que es ajeno por completo a los y las estudiantes. Este se transforma en un problema que deberíamos discutir entre docentes y con estudiantes, futuros profesores y maestros.

6. Conclusiones

En este estudio nos propusimos abordar el trabajo colectivo de formadoras y formadores de docentes de matemática, en torno a un ciclo de LS. El equipo de investigación planificó, implementó y discutió posteriormente, una clase de geometría que se dictó en un curso de primer año de profesorado y uno de primer año de magisterio. La clase se planificó a partir de una tarea de final abierto.

6.1 Respuesta a las preguntas de investigación

La primera pregunta que formulamos para esta investigación era:

¿En qué medida las tareas cognitivamente demandantes (por ejemplo, de final abierto) potencian un aprendizaje disciplinar sólido y flexible de las y los futuros profesores?

En primer lugar, consideramos que la tarea presentada en las clases es cognitivamente demandante (Stein et al., 2000). En efecto, para resolver esta tarea, las y los estudiantes tuvieron que atender a conceptos e ideas (como la suma de ángulos interiores de un polígono, los tipos de polígonos, entre otros). Exploraron distintos caminos de resolución, ya que no había uno preestablecido o ya estudiado. Las y los propios estudiantes tuvieron que monitorear el desarrollo de sus resoluciones, analizando las restricciones que la tarea imponía. Destinaron cierto tiempo a resolver la tarea, y experimentaron un conflicto productivo (Livy et al., 2018). Durante la puesta en común, en las dos clases implementadas, se llevaron adelante distintas discusiones que apuntaron al esclarecimiento de los conceptos y de las distintas ideas de las y los futuros docentes. Tuvieron que argumentar sus ideas, en la medida de sus posibilidades, y discutir las ideas de sus pares. Consideramos que el tipo de tarea utilizada, que permite organizar la discusión posterior en función de los grados de complejidad de las resoluciones, potencia un aprendizaje sólido y flexible de los conocimientos matemáticos. De acuerdo con Schoenfeld (2022):

> [...] un pensamiento matemático robusto involucra: comprender y poner en acto tanto el contenido como las prácticas de la disciplina; ser capaz de emplear un amplio rango de estrategias de resolución de problemas; desarrollar efectivamente el monitoreo, la autorregulación y otros tipos de procesos metacognitivos; y poseer sistemas de creencias que apoyen el uso de los conocimientos y comprensiones propios. (p. 3)

Como lo señalamos en los protocolos de observación de clases, y en las evidencias que mostramos de las clases implementadas, varios aspectos del pensamiento robusto, como lo describe Schoenfeld (2022) han sido contemplados en estas clases, desarrolladas a partir de una tarea de final abierto. Esta se mostró potente para que las y los estudiantes las abordaran en distintos niveles de complejidad, y la labor de las y los formadores contribuyó al desarrollo de discusiones productivas, y a enfrentar las dificultades que surgieron. Consideramos también que el proceso de LS seguido, con una planificación detallada de las clases, contribuyó a la organización de los distintos momentos de la clase y a la previsión de determinadas discusiones de ideas.

La segunda pregunta de investigación planteaba:

¿Qué aporta el proceso colectivo de planificación, implementación y discusión posterior de las clases a las prácticas de las y los formadores participantes?

Las y los formadores que integramos este equipo vimos enriquecidas nuestras prácticas en el proceso de trabajo colectivo que llevamos adelante. La planificación colectiva exhaustiva que realizamos nos permitió discutir muchos aspectos de nuestra práctica que no son usualmente problematizados. Por ejemplo, las distintas definiciones de los conceptos, las formas de abordar su estudio, y las implicancias que tiene elegir unas u otras, en especial para las y los futuros docentes que estamos formando. Se pusieron en evidencia, durante nuestras discusiones, diferentes ideas que sosteníamos sobre diversos aspectos. Como ejemplo podemos señalar que, al momento de diseñar la tarea para la clase y realizar el análisis a priori de las posibles resoluciones, cada quien aportó diferentes visiones y consideraciones sobre lo que consideraba que sucedería en la clase. La discusión detallada, así como el estudio del marco conceptual elegido, nos permitieron acordar ciertos objetivos para las clases, y determinada metodología de intervención docente. Luego, en las sesiones en que analizamos lo sucedido en las clases, donde también aparecieron distintas miradas, esta diversidad permitió profundizar el análisis incorporando elementos observados por los distintos integrantes del equipo.

6.2 Implicancias para la futura práctica profesional

Luego de implementadas las clases y analizadas las respuestas brindadas por las y los estudiantes al cuestionario posterior, pudimos evidenciar cómo este tipo de prácticas, que no son las habituales en las clases de matemática de formación docente, generaron un impacto positivo en las y los estudiantes. Creemos que el experimentar diferentes maneras de clase en su formación específica, les permite incorporar experiencias variadas que luego podrán tener disponibles en su futura práctica de aula. De la misma forma, entendemos que mostrar una forma distinta a la habitual de dar la clase, desde el inicio de su formación, promueve la problematización de las distintas componentes de la práctica docente.

Consideramos que la experiencia llevada adelante forma parte de las conexiones de la práctica de la disciplina (Wasserman, 2018), por ejemplo, en cuanto al tipo de tarea diseñada para la clase. En efecto, los y las estudiantes tuvieron que desplegar prácticas similares a las que llevan adelante quienes investigan en matemática, como conjeturar, analizar las conjeturas, para aceptarlas o rechazarlas; explicar a las demás personas su pensamiento y sus argumentos. Pensamos que esto puede contribuir a modificar sus concepciones acerca de la naturaleza de la matemática, y fundamentalmente, a establecer dichas prácticas en su futuro desempeño profesional.

También se realizaron conexiones de instrucción modelada. La metodología de trabajo que se planteó en las clases implementadas, y que también fue promovida por la tarea diseñada, permitieron que las y los estudiantes percibieran formas de discusión de las ideas matemáticas distintas a las habituales. Así lo consignaron la mayoría en sus respuestas al cuestionario.

6.3 Algunas proyecciones de este estudio

Un aspecto esencial que se desprende de este estudio es la importancia del trabajo conjunto de las y los formadores de asignaturas específicas y de didáctica. Esto ya fue señalado en otras investigaciones (Rey y Ochoviet, 2017; Pagés, 2021). Especialmente se resalta la necesidad de poner en discusión, en un escenario en el que puedan surgir, las distintas teorías personales sobre la práctica que trae cada participante al equipo. En este trabajo, si bien no se produjeron grandes conflictos en cuanto a las posturas, sí hubo diversidad, y esta fue puesta en diálogo. Esto permitió profundizar en la búsqueda de argumentaciones para las distintas posturas, y el logro de acuerdos, tanto en lo disciplinar como en lo didáctico. El trabajo colectivo de formadoras y formadores aún dista de ser usual, por lo que consideramos importante dar a conocer el estudio que llevamos adelante, como forma de promover que se conformen nuevos equipos de investigadores que se propongan analizar y problematizar sus prácticas docentes.

Un trabajo colaborativo de largo plazo, como el que se promueve desde la metodología de LS, permite el desarrollo de procesos de reflexión (Ricks, 2011). De forma particular, permite el desarrollo de nuevo conocimiento de quienes participan, fundado en la práctica. LS impone ciertos plazos para el trabajo del equipo (Fujii, 2017). No es un proceso que pueda llevarse adelante en unos pocos días, sino que son necesarias muchas reuniones para realizar una planificación exhaustiva, y otras tantas para la discusión posterior a la implementación de las clases. Se establece así un terreno fértil para la suspensión de las ideas, y su discusión profunda, lo que permite procesos reflexivos. En estos procesos es factible el surgimiento de nuevas ideas, gestadas colectivamente, que pueden ser puestas a prueba en las clases. Esta implementación, a su vez, permite el refinamiento de esas ideas. Asimismo, las sesiones de discusión posterior a las clases permiten continuar los procesos reflexivos iniciados, así como generar otros, a partir de los eventos de la clase. Consideramos importante generar esta metodología de investigación de la práctica, como forma organizada de su estudio, y de desarrollo del conocimiento didáctico de la matemática de quienes participan en los equipos.

Referencias

Anthony, G., y Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics*. Educational series 19. Brussels: International Academy of Education; Geneva: International Bureau of Education.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Borko, H. y Potari, D. (Eds.). (2020). *Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups*. ICMI Study 25 Conference Proceedings. Lisboa: Portugal.

Dalcín, M., Ochoviet, C., y Olave, M. (2017). *Una mirada a las prácticas de los formadores de la especialidad matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza.* Disponible en http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/publicaciones/2017/invest_2.pdf

Damisa, C., Dodino, L., Izcovich, H., y Piedra Cueva, I. (2019). *Trabajo colaborativo en ambas orillas del Plata. Experiencias en escuelas públicas.* Montevideo: Grupo Magro Editores.

De los Ángeles, G. (2020). *Concepciones de los docentes formadores acerca de los vínculos entre la asignatura que enseñan y lo que los futuros profesores habrán de enseñar.* (Tesina del Diploma en Matemática, Administración Nacional de Educación Pública y Universidad de la República). Disponible en https://repositorio.cfe.edu.uy/handle/123456789/1359

Dewey, J. (1933). *How we think*. D. C. Heath y Co. Publishers.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process in Lesson Study. *ZDM, 48*, 411 - 423. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3

Fujii, T. (2017). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 1–21). New York, NY: Springer.

Glaser, B. (2018). Getting Started. *The Grounded Theory Review*, 17 (1), 3 – 6.

Isoda, M. (2015). The science of lesson study in the problem solving approach. En M. Inprasitha, M. Isoda, P. Wang-Iverson y B. Yeap (Eds.). *Lesson Study. Challenges in Mathematics Education. Series on Mathematics Education*, *3*, 81-108.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. y National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Leikin, R., Zazkis, R. y Meller, M. (2017). Research Mathematicians as Teacher Educators: Focusing on Mathematics for Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(5), 451-473. Publicación previa en línea. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9

Livy, S., Muir, T. y Sullivan, P. (2018). Challenging tasks lead to productive struggles. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *21*(1), 19-24.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito para todos*. Recuperado de https://www.nctm.org/Store/Products/(eBook)-De-los-principios-a-laacci% C3%B3n- -Para-garantizar-el-%C3%A9xito-matem%C3%A1tico-paratodos-(PDF-Downloads)/

Ochoviet, C. y Olave, M. (2017). *Los modelos docentes en la formación de profesores de matemática: elementos para repensar los ambientes didácticos.* Recuperado de http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/publicaciones/2017/invest_1.pdf

Ochoviet, C., Rey, M. y Romo, A. (2022). Os percursos de estudo e de pesquisa para a formação de formadores, gênese e caracterização: um estudo de caso. En S. Ag Almouloud, R. Borges Guerra, L. Santos Farias, A. Henriques y J. Viana Nunes (Orgs.), *Percursos de Estudo e Pesquisa à luz da Teoria Antropológica do Didático: fundamentos teórico-metodológicos para a formaçao*, Volume 1 (pp. 323 - 350). Editora CRV. https://doi.org/10.24824/978652511946.5

Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de matemáticas: ¿Cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de caso*. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Pagés, D. (2021). *Un caso de trabajo colaborativo de formadores de profesores de matemática*. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Rey, M. (2017). *Intervención didáctica para la formación del profesorado de matemática: vivir la modelización matemática en el curso de Análisis I*. (Tesina del Diploma en Matemática, Administración Nacional de Educación Pública y Universidad de la República). Disponible en https://nube.interior.edu.uy/index.php/s/jKYtpzwZkwszfEF

Ricks, T. E. (2011). Process Reflection during Japanese Lesson Study Experiences by Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(4), 251–267.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). ICME International Survey on Teachers Working and Learning through Collaboration. *ZDM Mathematics Education, 48*, 651-690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Santaló, L. y colaboradores. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires: Troquel Educación.

Schoenfeld, A. H. (2016). *The Teaching for Robust Understanding Project. An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework.* Berkeley, CA: Graduate School of Education. Recuperado de http://map.mathshell.org/trumath.php

Schoenfeld, A. (2022). Why are Learning and Teaching Mathematics so Difficult? In M. Danesi, (ed). *Handbook of Cognitive Mathematics*. New York: Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_10-1

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner. Towards a new design for teaching and learning in the professions*. Josey Bass.

Shulman, L. (2005). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *15* (1).

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., y Silver, E. A. (2000). *Implementing Standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development.* NY: Teachers College Press.

Stigler, J., y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

Takahashi, A., & McDougal, T. (2017). Collaborative lesson research (CLR). In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 143–152). New York, NY: Springer.

Ticknor, C. (2012). Situated learning in an abstract algebra classroom. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 307-323.

Wasserman, N (2018). Exploring Advanced Mathematics Courses and Content for Secondary Mathematics Teachers. En *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers*. New York: Springer.

Watson, A. y Ohtani, M. (2021). *Task Design in Mathematics Education. ICMI Study 22*. Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers´ professional development. *For the Learning of Mathematics, 15* (3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En Jaworsky, B. y Wood, T. (eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, 93-114.

Zaslavsky, O. y Sullivan, P. (2011). Setting the stage: a conceptual framework for examining and developing tasks for mathematics teacher education. En O. Zaslavsky y P. Sullivan (Eds.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics. Tasks to Enhance Prospective and Practicing Teacher Learning. Mathematics Teacher Education* (Vol. 6, pp. 1 – 22). Springer.

Anexo

Protocolos de observación de clase

Protocolo de observación de la clase implementada en primer año de profesorado de matemática, en el curso de Geometría I

Contenido	- En qué medida las discusiones matemáticas son precisas y coherentes	Hubo coherencia en la discusión sobre los objetivos matemáticos de la clase y la búsqueda y obtención de las condiciones para que un polígono cubra el plano (sin huecos ni superposiciones). Hubo imprecisiones en el lenguaje matemático en los estudiantes al explicar sus construcciones. Esto era previsible ya que son estudiantes que ingresan al profesorado, aunque el contenido abordado se trabaja en primaria y ciclo básico. Dichas imprecisiones llevan a que no se comprendan algunas argumentaciones. Ante las dificultades para expresar sus ideas verbalmente muchas veces los estudiantes recurren a hacer gestos con sus manos.
	- Qué relaciones se establecen entre el contexto, los conceptos y los procedimientos	Se establecieron relaciones entre el contexto del problema y los conceptos involucrados en la teselación del plano. En algunas ocasiones el contexto impedía acercarse al contenido (tejer la red en el aire, la L y la imposibilidad que veían estos en el tejido). La intervención docente adecuada permitió pasar de las redes al plano. Se hicieron conexiones de los procedimientos utilizados por los estudiantes para representar diseños con los conceptos que sostenían esas representaciones: suma de ángulos interiores de cada polígono, división de un rectángulo en dos triángulos iguales.
	Las actividades de clase* (la tarea, la intervención docente y la participación de los estudiantes)*:	
	- generan y mantienen un ambiente de producción intelectual desafiante	La tarea generó interés y fue aceptada por los estudiantes. Representó un desafío en la medida en que tuvieron que interpretar el contexto y "traducir" al lenguaje de la matemática. La tarea fue

Demanda cognitiva		intelectualmente demandante en la medida que no había un camino predeterminado para resolverla y los estudiantes tuvieron que realizar un trabajo de interpretación y análisis de la situación que los llevó al abordaje y resolución de la tarea. La intervención docente colaboró con el mantenimiento del ambiente de producción a través de preguntas, cuestionamientos, repreguntas. En el trabajo en equipos se constataron discusiones y argumentaciones sobre qué es un polígono, clasificación de polígonos, condiciones que deben cumplirse para formar una red, los tipos de polígonos que cumplían dichas condiciones, entre otras. Durante la puesta en común los estudiantes se esforzaron en generar argumentos ante los cuestionamientos del docente.
	- generan un desarrollo matemático de los estudiantes	Las discusiones entre estudiantes, el diálogo del profesor con los integrantes de los distintos grupos y la puesta en común generaron una ampliación en el repertorio de figuras que tenía cada estudiante, en la clasificación de las figuras, pudieron transitar una evolución en la comunicación de sus ideas matemáticas a instancias de los requerimientos del docente.
	Las actividades de clase (tareas, intervención docente):	
	- invitan a una activa participación de todos los estudiantes	La planificación de la clase incluyó la previsión del uso de papelógrafos por parte de los estudiantes para presentar sus producciones. Asimismo, se llevaron sobres con polígonos en papel, de distintos tipos, a ser entregados en caso de ser necesario. La tarea, al no ser estándar, no tenía un camino preconcebido de resolución, lo que implicó que los primeros 5 o 10 minutos fueron desconcertantes para los estudiantes. Esta primera instancia llevó a que los estudiantes tengan que buscar en sus conocimientos previos y a partir de su interpretación de la consigna, elementos y herramientas que le permitieran buscar una posible estrategia de resolución. Dentro de cada equipo había distintos grados de iniciativa y propuestas diferentes, en el acierto o en el error. En esta instancia,

Acceso equitativo al contenido		el docente monitoreó el trabajo de los equipos sin intervenir, salvo en lo que refería a la interpretación de la letra de la tarea propuesta. Es así que dentro de cada equipo, en diferente medida, todos los estudiantes presentaban sus ideas hasta llegar a un acuerdo. A pesar de todo esto se podrían implementar estrategias docentes que propiciaran una mayor participación de los estudiantes más tímidos, tanto en la instancia del trabajo en equipo como en la puesta en común. Considerando que la clase fue propuesta en las primeras semanas del curso, el docente todavía no contaba con información suficiente acerca de las características tanto individuales como grupales. La organización de la puesta en común por parte del docente favoreció la participación de la mayoría de los estudiantes en diferentes grados.
	- ¿Quién propone ejemplos?	Mayoritariamente fueron propuestos por los estudiantes. En la instancia del trabajo en equipo, excepto un grupo, todos trabajaron con sus herramientas propias. En el equipo restante, ante la dificultad para comprender la tarea y abordarla (consideraron poliedros en lugar de polígonos) el docente intervino proporcionando material concreto con determinados polígonos que les dieron oportunidad de seguir avanzando.
	- ¿quién explica?	Cada equipo dio justificaciones de los diseños presentados por ellos o por otros equipos. El docente intervenía para moderar la discusión y, cuando fue necesario, propuso ejemplos y contraejemplos para que los estudiantes avanzaran y brindaran explicaciones más fundamentadas.
	Los estudiantes, en qué medida tienen oportunidad de:	
	- conjeturar	Mucha oportunidad (la necesidad de “cubrir” 360 grados alrededor de cada vértice, que no haya superposiciones, cuadriláteros con eje de simetría, a partir de que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º, ángulos alternos internos, ángulos correspondientes entre paralelas, etc.)

Disponibilidad, domino e identidad	- explicar	Los estudiantes desarrollan sus ideas en la puesta en común a partir de la guía del docente. Sus intervenciones carecen de una sólida fundamentación, cuestión que era previsible por el momento en que la actividad es llevada adelante.
	- representar	Los estudiantes utilizaron representaciones (sobre todo figurales) para resolver la tarea, ya que la consigna y la necesidad de comunicar sus resoluciones lo promovía. En gran medida logran efectuar distintos diseños a partir de las ideas que fueron apareciendo luego de la discusión grupal.
	- generalizar	Si, en la medida de sus conocimientos y experiencias previas y de su confianza en poder generalizar. Particularmente durante la puesta en común se arribó a algunas generalizaciones, producto del trabajo colectivo del grupo con el profesor.
	- refutar o aceptar ideas ajenas	En algunas ocasiones, durante la puesta en común, se dieron algunas refutaciones de ideas de otros, y también aceptación. La puesta en común fue organizada de tal manera que fueron tomadas primero las voces de aquellos grupos donde la fundamentación no era tan sólida como en otros. Esto colaboró para que los propios estudiantes construyan su conocimiento y elaboren sus propias ideas.
	- refutar o aceptar ideas propias	Se observó en algunos estudiantes
	Las actividades de clase	
	- ¿dejan en evidencia las contribuciones de los estudiantes?	Sí, los estudiantes realizaron contribuciones durante la resolución de la tarea, y a través de sus explicaciones en la puesta en común. Las distintas voces fueron complementando a las anteriores y construyen el aprendizaje.
	- animan al estudiante a involucrarse (desarrollo de la *disponibilidad*)	Tanto la propuesta de la tarea como las intervenciones docentes animaban a los estudiantes a la participación.
	- posibilitan que el estudiante evolucione en el *domino* del contenido	Sobre todo durante la puesta en común. El trabajo en clase facilita el acceso a futuros contenidos que se deben retomar a lo largo del curso

	- permiten que el estudiante genere una *identidad* como pensador matemático	La actividad mostró la capacidad y la fortaleza de las actividades de final abierto dado que el trabajo desarrollado implicó la necesidad de poner en juego múltiples variables que relacionan a la geometría plana y a los polígonos en particular.
Evaluación formativa	*La tarea presentada*:	
	¿revela el estado real de entendimiento del estudiante?	Sí, todos los estudiantes pudieron abordarla desde sus conocimientos disponibles, y a partir de sus abordajes pudo determinarse el estado real de la comprensión de los distintos estudiantes.
	¿permite atender asertivamente las dificultades grupales e individuales?	Como parte importante de la planificación se previeron distintos dispositivos (figuras en cartulina para facilitar los diseños) que el docente utilizó cuando lo consideró en un único grupo.
	El docente:	
	- a partir del monitoreo de la actividad de los estudiantes, ¿interviene para ajustar el nivel de la demanda cognitiva? -	Sí, por ejemplo en el caso de los estudiantes que pensaron la tarea inicialmente en el espacio, el docente intervino con explicaciones, y les proporcionó un sobre con polígonos en papel para ayudarlos a centrarse en la consigna. El docente percibe que algunos estudiantes no pudieron formalizar ideas hasta la puesta en común. Luego de finalizada la clase se puede afirmar que hay distintos grados de hábitos de pensamiento. Por ejemplo, algunos estudiantes parecen tener familiaridad con el pensamiento deductivo, y son más claros en las explicaciones. Otros, en tanto, presentan un nivel de pensamiento más intuitivo. Algunos estudiantes no pudieron formalizar ideas hasta la puesta en común. Sin embargo, la tarea y la forma de trabajo permitieron la conjeturación y cierta evolución de ideas, acorde al inicio del curso.

Protocolo de observación de la clase implementada en primer año de magisterio, en el curso de Matemática I

Contenido	- En qué medida las discusiones matemáticas son precisas y coherentes	Son coherentes, se busca su profundización por parte de la docente. Con el lenguaje que los estudiantes tenían disponible, lograban explicitar su pensamiento y discutirlo. .
	- Qué relaciones se establecen entre el contexto, los conceptos y los procedimientos	Se establecieron relaciones entre el contexto del problema y los conceptos involucrados en la teselación del plano. El contexto estuvo siempre presente y ayudaba a los estudiantes a seguir pensando y argumentando. En diferentes momentos de la clase se hicieron conexiones de los procedimientos utilizados por los estudiantes para representar diseños Los con los conceptos que sostenían esas representaciones: suma de ángulos interiores de un triángulo, división de un rectángulo y de un paralelogramo en dos triángulos iguales.
Demanda cognitiva	*Las actividades de clase* (la tarea, la intervención docente y la participación de los estudiantes)*:*	
	- generan y mantienen un ambiente de producción intelectual desafiante	En todo momento. Existieron ciertas imprecisiones del lenguaje en los estudiantes y la profesora decidía en el momento corregir o no en la medida que su intervención no afectara la discusión que se estaba llevando adelante. Los estudiantes se mantuvieron sumamente activos en todas las discusiones, discutían entre ellos, y estaban muy centrados en cada discusión que surgía. La tarea se mostró desafiante y dio lugar a todas estas discusiones.
	- generan un desarrollo matemático de los estudiantes	Si, en la medida en que surgieron muchas propiedades, planteos y preguntas. La discusión entre los grupos junto con la intervención

		docente hacían evolucionar y precisar las ideas matemáticas que iban surgiendo.
Acceso equitativo al contenido	*Las actividades de clase (tareas, intervención docente):*	
	- invitan a una activa participación de todos los estudiantes	Cada uno de los estudiantes, en la medida de sus conocimientos previos, tuvo la oportunidad de explicitar sus ideas y ponerlas en discusión con las de otros compañeros.
	- ¿quién propone ejemplos?	Los estudiantes en general. Cuando era necesario para el avance en las discusiones, la docente proponía ejemplos y contraejemplos.
	- ¿quién explica?	Tanto los estudiantes como la docente pero los estudiantes tuvieron múltiples oportunidades de explicar sus razonamientos.
Disponibilidad, domino e identidad	*Los estudiantes, en qué medida tienen oportunidad de:*	
	- conjeturar	Los estudiantes realizan conjeturas durante el trabajo en grupos, la docente les proporciona recursos para que las pongan a prueba. También conjeturan durante la puesta en común.
	- explicar	Tanto en el trabajo en grupos como en la puesta en común, los estudiantes dan explicaciones de sus ideas.
	- representar	La propia tarea promueve el uso de representaciones, sobre todo figurales.
	- generalizar	El trabajo de la docente y la propia tarea presentada hacen que los estudiantes busquen hacer generalizaciones.
	- refutar o aceptar ideas ajenas	Se evidencia en la puesta en común mayoritariamente.
	- refutar o aceptar ideas propias	También es visible, sobre todo en la puesta en común, y durante el trabajo en grupos, a partir de los recursos que les da la docente.
	Estas actividades	

	- ¿dejan en evidencia las contribuciones de los estudiantes?	Sí, las contribuciones se dan durante el trabajo con los diseños, y en las discusiones de la puesta en común.
	- animan al estudiante a involucrarse (desarrollo de la *disponibilidad*)	En gran medida, tanto la tarea, como la gestión de la docente.
	- posibilitan que el estudiante evolucione en el *domino* del contenido	Si, en la medida que lo permiten sus experiencias previas (temor al fracaso, no gusto por la asignatura). La tarea diseñada se mostró promovedora de una actitud positiva hacia la matemática.
	- permiten que el estudiante genere una *identidad* como pensador matemático	Los estudiantes defendieron sus planteos, discutieron las afirmaciones de sus compañeros y generaron criterios propios en sus conjeturas.
Evaluación formativa	*La tarea presentada*:	
	¿revela el estado real de entendimiento del estudiante?	La tarea se presta para poner en evidencia cuál es el estado real de la comprensión de cada estudiante.
	¿permite atender asertivamente las dificultades grupales e individuales?	Como parte importante de la planificación se previeron distintos dispositivos (figuras en cartulina para facilitar los diseños) que la docente utilizó cuando lo consideró necesario.
	El docente:	
	- a partir del monitoreo de la actividad de los estudiantes, ¿interviene para ajustar el nivel de la demanda cognitiva?	Si, interviene en distintos momentos y de diversas maneras. Por ejemplo, entregando los materiales, repreguntando, presentando ejemplos y contraejemplos, entre otros.