



## Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional

### Mathematical models mediated by GeoGebra for the development of variational thinking

Mathías Tejera Cardozo<sup>1</sup>



#### RESUMEN

La siguiente investigación basada en diseño se enmarcó dentro de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional. La preocupación inicial vino dada por las dificultades ampliamente reportadas en la literatura que afrontan los estudiantes al enfrentarse a sus primeros cursos de cálculo en la universidad. Se advirtió en la revisión bibliográfica que estas están asociadas a una excesiva mecanización y poco desarrollo de las ideas fundantes del cálculo. Es por eso que se trabajó en el diseño y validación de una serie de tareas, mediadas por GeoGebra, centradas en lo conceptual, la conexión entre registros de representación y con la idea de variación como eje. La secuencia permitió a los estudiantes desarrollar sus ideas variacionales a través de diferentes registros asistidos por los recursos tecnológicos, y conectarlas de forma significativa para elaborar sus propios argumentos variacionales dando respuesta a las tareas. Por lo que se considera que el trabajo desde una mirada variacional del cálculo escolar aporta significativamente a la construcción de significados ricos sobre los conceptos centrales del mismo.

**PALABRAS CLAVES:** pensamiento variacional, razonamiento covariacional, cálculo, investigación basada en diseño.

#### ABSTRACT

The following design-based research was framed within the research line of Variational Thinking. The initial concern was given by the difficulties widely reported on the literature about students' difficulties when facing their first calculus courses at university. It was noted in the literature review that these are associated with excessive mechanization and little development of the grounding ideas of calculus. That is why we worked on the design and validation of a series of tasks, mediated by GeoGebra, focused on conceptual ideas, the connection between representation registers, and with the idea of variation as an axis. The sequence allowed students to develop their variational ideas through different records assisted by technological resources, and connect them in a meaningful way to elaborate their own variational arguments responding to the tasks.

<sup>1</sup> Magíster en Matemática Educativa (IPN, México), Profesor de Matemática (IPA, Uruguay).

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

Therefore, it is considered that the work from a variational perspective of school calculus contributes significantly to the construction of rich meanings on the calculus' central concepts.

KEYWORDS: variational thinking, covariational reasoning, calculus, design-based research.

¿QUÉ TIENEN QUE VER LOS CAMBIOS, LA MODELIZACIÓN DE LA REALIDAD Y EL SURGIMIENTO DE LA CIENCIA, CON LA MATEMÁTICA ESCOLAR?

A lo largo de la historia, la humanidad ha sentido una intensa atracción por lo desconocido, por explicar y comprender lo que sucede a su alrededor, por predecir y dominar la naturaleza. Esto ha conducido al surgimiento y desarrollo de la ciencia a través de las preguntas y respuestas que se han planteado para entender, cuantificar y predecir. La clave, es que estos fenómenos no se presentan de forma estática, y entenderlos implica estudiar los cambios, las regularidades, los patrones. Para esto es necesario cuantificar, representar, modelar y analizar dicha variación. Y desde allí es que cobra vital importancia el desarrollo de herramientas que permitan realizar dichos procesos.

Una herramienta que adquiere trascendental valor en estos procesos y cuyo surgimiento está íntimamente ligado a ellos, es el cálculo. A pesar de este vínculo directo entre el origen del cálculo y el estudio de la variación (Sánchez y Molina, 2006), la enseñanza de esta área de la matemática en el bachillerato se caracteriza por una fuerte componente formal, centrada en lo algorítmico y algebraico (Becerra et al., 2018; Vrancken y Engler, 2014; Abrate et al., 2006; Carlson et al., 2003; Artigue, 1995; Tall, 1992), lo que trae consigo que “la mayoría de los estudiantes piensan que la manera más segura para tratar satisfactoriamente con este dominio es tratar de no de comprender, sino funcionar mecánicamente” (Artigue, 2002, p. 213), “por lo que se hace necesario reenfocar la atención a la génesis de los conceptos y desarrollar propuestas que potencien el cálculo como herramienta para comprender fenómenos que impliquen variación” (Tejera, 2021, p.3)

Para transitar este camino es que utilizamos a los modelos matemáticos como un medio para que los estudiantes desarrollen su pensamiento variacional, por lo que podríamos decir que su uso se enmarcó en lo que Trigueros (2009) califica como *perspectiva cognitiva*. Afinando un poco esta idea y observando el proceso desde la teoría de *Modelos y Modelación* (Lesh y English, 2005) en la que se plantea que la búsqueda de patrones es una parte vital de la matemática como disciplina, es que entendemos que la matemática escolar debe proporcionar un ambiente donde los estudiantes se enfrenten a tareas que admitan producir ideas matemáticas que permitan analizar la situación, y posteriormente ser aplicadas como herramientas conceptuales.

Desde allí es que la investigación abordó el diseño, análisis y validación de un dispositivo didáctico con la intención de favorecer el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes y así facilitar la adquisición significativa de conceptos vinculados al cálculo diferencial tal como plantean Carlson et al. (2003). El trabajo desde los modelos matemáticos y desde una óptica variacional permitió aprovechar la intuición y los conocimientos adquiridos independientemente del *discurso matemático de la enseñanza* (Cantoral y Montiel, 2001) para construir o reconstruir las *imágenes conceptuales*, en el sentido de Vinner (1992), de los objetos matemáticos trabajados en el curso, de la forma más completa posible.

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

En línea con esto, la tecnología se utiliza desde un enfoque instrumental (Arzarello et al., 2011; Borba y Villarreal, 2005; Artigue, 2002), que parte de la idea de que los medios empleados para una tarea matemática condicionan la forma de pensar sobre la matemática misma, por eso son claves en el diseño las decisiones sobre los medios a emplear y la interacción que se busca generar en los estudiantes con ellos. Geogebra tiene la potencialidad de la interacción en tiempo real entre diversos *registros de representación* (Villa y Ruíz, 2010) y dado que un bajo nivel de conexión entre registros aparece en estudios previos como un posible causante de las dificultades asociadas al pensamiento variacional buscamos propiciar estas conexiones.

De estos elementos es que se desprende la pregunta de investigación que se planteo al comenzar esta investigación: ¿qué tipo de actividades con modelos matemáticos mediadas por GeoGebra contribuyen al desarrollo del pensamiento variacional?

#### EL PENSAMIENTO VARIACIONAL COMO GUÍA PARA EL DISEÑO Y MARCO DE INTERPRETACIÓN PARA EL DISCURSO DE LOS ESTUDIANTES

Tal como dice su nombre, el pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, percepción y caracterización de la variación y el cambio en diversos contextos. A pesar de que una primera mención a este constructo podría llevar a pensar que trabajar con funciones implica necesariamente al mismo, esto no es así. De hecho, muchas veces el trabajo que habitualmente se realiza con funciones se convierte en un obstáculo epistemológico y didáctico para el desarrollo del pensamiento variacional. Por ejemplo, la definición habitual de función como conjunto de pares ordenados, es claramente estática; la memorización de leyes matemáticas de procesos físicos tampoco aporta a lo variacional por más que estén íntimamente ligadas a los procesos a los que hacen referencia, “más aún, estas leyes, entendidas solo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía, con qué y cómo, antes de escribir nada, y mucho menos, antes de memorizar fórmulas.” (Vasco, 2006, p.62).

Desde diversas tradiciones teóricas se aborda el estudio de los procesos vinculados al desarrollo del pensamiento variacional. Para este estudio combinamos la mirada de la Teoría Socioepistemológica sobre el *Pensamiento y Lenguaje Variacional* (Barajas et al., 2018; Cabezas y Mendoza, 2016; Vranken y Engler, 2014; Cantoral y Caballero, 2013; Dolores et al., 2013, 2009; Salinas, 2003) con aportes al marco interpretativo desde la investigación sobre *covariational reasoning* (Carlson et al., 2003; NCTM, 2000). En este sentido un planteo esclarecedor sobre la interpretación que hacemos en este trabajo es el realizado por Cabezas y Mendoza (2016):

Pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

variables involucradas, manifestada en algún tipo de soporte material (registro ostensivo). (p.15)

Tal como mencionan Carlson et al. (2003), una mirada de la función que incluya la covariación es “escencial para la comprensión de los conceptos del cálculo” y plantean que este tipo de pensamiento está íntimamente ligado, por ejemplo, a la comprensión de los conceptos de límite, derivada y al teorema fundamental del cálculo. Si bien desde nuestra mirada, el pensamiento variacional no se encuentra restringido al trabajo con funciones, ni exclusivamente al cálculo, lo consideramos como una condición necesaria para la comprensión de este.

Desde allí es que se diseña, considerando lo sistematizado en el trabajo de Cantoral y Caballero (2013), una secuencia de *Tareas Variacionales* enmarcadas en la *Situación Variacional* del llenado de frascos utilizando como referencia la actividad propuesta en el trabajo elaborado por Shell Centre for Mathematical Education (1990, p.32). A efectos de esta investigación las Tareas Variacionales utilizadas en el diseño son las presentadas en la tabla 1.

Tabla 1  
*Clasificación de las Tareas Variacionales (Cantoral y Caballero, 2013)*

TAREAS VARIACIONALES	DESCRIPCIÓN
Tabulación como variación numérica (TVN)	Acción de proporcionar valores distintos a una variable para observar y analizar sus efectos en cuanto a comportamiento, forma, posición o valor de algún sistema.
Análisis de datos en tablas numéricas (ADT)	Dada cierta información en forma de datos agrupados, se realiza un análisis de esos datos fijándose en patrones de comportamiento y relaciones entre datos.
Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia (CGV)	Construcción de gráficas apoyándose en el análisis de las variaciones. El objetivo no es hallar algún patrón o relación, sino bosquejar una gráfica que modele lo más cercanamente posible la situación que representa.
Análisis de gráficos con la variación como punto de referencia (AGV)	Búsqueda de patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos. A diferencia de ADT el análisis está sobre gráficas, así como elementos que surgen de ella, como tangentes, alturas, asíntotas, entre otros.

Para la interpretación del discurso matemático generado por los estudiantes sobre la variación y el cambio, se analizaron los *Argumentos Variacionales* de los estudiantes. Estos son argumentos que hacen uso del análisis del cambio y la cuantificación del mismo, y refieren a cuando las personas utilizan “maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando” (Cantoral, 2000, p.54). Estos argumentos son lo que permiten a los estudiantes dar una explicación a la Situación Variacional presentada.

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

A la interna de los Argumentos Variacionales se analizaron elementos que permitieron establecer una narrativa sobre el desarrollo de los mismos a lo largo de la secuencia. En primer lugar se utilizaron aspectos del marco conceptual presentado por Carlson et al. (2003) en donde se identifican cinco niveles de razonamiento covariacional y cinco *Acciones Mentales* asociadas a ellos que se pueden observar en la tabla 2. Además se analizó la conexión entre los argumentos extraídos desde diferentes *registros de representación* y el proceso apropiación de las *Estructuras Variacionales Específicas* vinculadas a cada tarea.

Tabla 2  
*Acciones Mentales presentadas por Carlson et al. (2003)*

ACCIÓN MENTAL	DESCRIPCIÓN	COMPORTAMIENTOS
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad.

---

independiente para todo el dominio de la función.	Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).
---	--

---

#### INVESTIGACIÓN BASADA EN DISEÑO

El trabajo parte de la concepción de la educación matemática debe trabajar para mejorar los aprendizajes, y en esta línea es que se concibe como una *ciencia del diseño* en el sentido que plantea Wittmann (1998) cuando dice que la educación matemática solo puede avanzar si se ubica en su núcleo enlaces entre la investigación y la práctica, y cuando las mejoras en la práctica se encuentran vinculadas a los avances del campo. Según Godino et al. (2013) la investigación basada en diseño:

Trata de superar la brecha entre las investigaciones científicas desligadas de la práctica educativa de las innovaciones realizadas de manera poco, o nada rigurosas. Asume que la investigación educativa separada de la práctica puede no tener en cuenta la influencia de los contextos sobre la naturaleza compleja de los resultados, o no identificar adecuadamente las restricciones y factores condicionantes. (p. 3)

En este trabajo, la inspiración metodológica se desprende directamente de un tipo particular de investigación basada en diseño, la *Ingeniería Didáctica*. La noción de ingeniería didáctica surge vinculada a la didáctica francesa en la década de los 80. El uso del término ingeniería viene dado por el paralelismo que se hace entre el trabajo del investigador en didáctica con el trabajo de un ingeniero, en el sentido de que se buscan soluciones a problemáticas más complejas que las que puede abordar la ciencia, haciendo uso del conocimiento científico relevante y sometiéndose a controles de carácter científico. Esta tiene como característica, al igual que el resto de la investigación basada en diseño, un esquema experimental basado en *realizaciones didácticas* en clase, y sigue el mismo esquema de; *concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza*. (Artigue, 1995)

Otra característica esencial de la ingeniería didáctica surge por las formas de validación asociadas a la misma, mucha de la investigación que se realiza dentro del aula utiliza un enfoque de validación externa, principalmente el análisis estadístico de resultados entre grupos experimentales y grupos de control. Por el contrario, la ingeniería didáctica se basa en el registro de estudios de caso y en la validación interna por confrontación del análisis a priori y a posteriori.

En la ingeniería didáctica se distinguen cuatro fases (Artigue, 1995); *análisis preliminar, concepción y análisis a priori* de la situaciones didácticas de la ingeniería, *experimentación, análisis a posteriori y evaluación*.

#### IMPLEMENTACIÓN

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

El trabajo se organizó en 6 sesiones de trabajo con un grupo de 9 estudiantes del último año de enseñanza media superior de la opción *matemática y diseño*. Dicha orientación apunta a estudiantes que continuarán sus estudios en carreras vinculadas a la arquitectura y el diseño, y confluyen en ella estudiantes que provienen de orientaciones científicas y artísticas. Durante estas 6 sesiones la cantidad de estudiantes fluctuó entre siete y nueve, siendo seis estudiantes los que participaron en la totalidad de la sesiones.

Las actividades se dieron en el marco del curso de Matemática 1 de los estudiantes, un curso anual en el que se abordan temas de cálculo y geometría analítica. Es relevante señalar que tanto la institución como los estudiantes cuentan con los equipos informáticos y la conexión a internet necesaria para realizar las actividades planteadas, tanto en las instancias presenciales como en las virtuales.

Las actividades que analizamos en detalle en este escrito son las realizadas durante la primera sesión de trabajo. Esta tuvo la particularidad de que debido a un brote de COVID-19 en la institución la sesión se realizó de forma virtual a través de una plataforma de video conferencias. Las instancias de trabajo individual, con todos los estudiantes en la misma sala para poder tener un intercambio “como en el salón de clases”, y para el momento de trabajo en equipo se crearon salas para cada equipo de tres integrantes, que el docente iba recorriendo a demanda de los estudiantes. A pesar del cambio de modalidad todo el trabajo se realizó de acuerdo a lo planificado para la sesión en formato presencial, fue registrado en video, y las respuestas de los estudiantes se registraron en la plataforma de GeoGebra.

#### ANÁLISIS DEL TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES EN LA PRIMERA SESIÓN.

En esta tarea se presentó como primer elemento el video del llenado de un vaso con flujo constante de líquido, esto buscó evocar una situación real para conectar el trabajo matemático con la experiencia vital de los estudiantes y que estos puedan pensar las representaciones posteriores como un modelo de una situación a analizar. Ver figura 1.



Figura 1. Situación y su representación pictórica para la tarea 1.

En un primer momento, luego del video se presenta el modelo plano de la situación (ver figura 1) y se realizan pregunta *¿Qué observas?*. Observamos que hay dos respuestas que si bien hacen mención al proceso de llenado no hacen referencia a la relación entre dos

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

variables, y si bien el uso del término constante en una de ellas puede indicar una referencia a una variable independiente de forma implícita, no hay evidencias de ello en su respuesta y tampoco en la grabación de ese momento de trabajo.

En virtud de eso, y analizando las respuestas en términos de Acciones Mentales, se identifica que 7 estudiantes realizan la AM1. Son 5 los estudiantes que realizan la AM2, identificándose esto en expresiones como “a medida que muevo el deslizador hacia la derecha, el vaso se va llenando. La altura del rectángulo celeste aumenta. Y lo contrario pasa al moverlo a la izquierda”. Solamente una de las estudiantes realiza una afirmación que podemos vincular con la AM3 al decir que “el vaso se llena de forma constante y proporcional al movimiento del deslizador”, podemos observar en esta respuesta un primer intento por cuantificar la variación.

En cuanto a *qué cambia y qué se mantiene constante al modificar el ancho del recipiente*, se observa que la mayoría de los estudiantes hacen referencia a la velocidad con la que ingresa el agua, lo que podríamos considerar el caudal, dando cuenta que este elemento es independiente del ancho del recipiente. Si bien esto no es lo que originalmente se esperaba como elemento a destacar, entra dentro de lo que Vasco (2006) menciona como parte fundamental del pensamiento variacional al tratarse de un análisis de “lo que cambia, lo que permanece constante, y los patrones que se repiten” (p. 63). Esto aporta el elemento clave de una variable independiente en la situación, incluso en las respuestas de las estudiantes que no habían hecho referencia a una relación entre dos variables en la pregunta anterior.

Luego de esta exploración inicial se plantean dos tareas variacionales más. Una TVD en donde los estudiantes extraen de la representación dinámica, información para construir una tabla y analizar los datos para construir su explicación de la situación variacional. En esta tarea, dos estudiantes no logran coordinar el sentido del cambio completando la tabla siguiendo un modelo de proporcionalidad inversa, pudiendo explicarse esto en la desconexión con la situación modelada. Mientras que los siete restantes hacen planteos que se pueden incluir en AM1, AM2, AM3 y AM4, mencionando todos ellos la proporcionalidad directa, a pesar de que solo cuatro de ellos hacen mención explícita al área como variable independiente y los otros tres explicitan que entienden que la altura es la variable independiente. Lo que deja en evidencia la desconexión presente entre las distintas representaciones a la interna del modelo, y entre la situación real y el modelo matemático.

Y una AGV en la que, a partir del estudio de una representación gráfica los estudiantes buscan determinar patrones de comportamiento de las variables en la situación. En esta totalidad de los estudiantes observa la linealidad de la situación no solo asociándolo con la alineación de los puntos, también a través del análisis de la variación y la conexión con la tabla construida en la tarea anterior que podemos observar en esta transcripción del diálogo entre tres estudiantes; “En realidad, si vos trazas la recta que pasa por todos esos puntos. Es una recta con pendiente, y esa pendiente tendría que ser la constante entre los valores consecutivos de... que tabulaste en la tabla ahí” (Tejera, 2021, p.76)

En la puesta en común de la actividad los estudiantes concuerdan en la presentación de elementos de la AM3 y AM4 concluyendo que el inverso del ancho del recipiente es la pendiente de la recta, e integran el aporte de una de las estudiantes que planteó en su respuesta



Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

escrita que “Cuanto menor es el ancho del recipiente, mayor es la pendiente de la recta. Lo que quiere decir que a menor ancho, más rápido se va a llenar el vaso”, infiriendo a través de la explicación de la estudiante que la pendiente de la recta es una medida de la velocidad de llenado.

## CONCLUSIONES

Las respuestas a las tareas dan cuenta de un creciente proceso de elaboración de argumentos variacionales en los estudiantes. Por lo que podemos decir que el tipo de actividades planteadas y la secuenciación de estas van en la línea de las recomendaciones de los autores consultados para este diseño, y promueven un ambiente que posibilita y motiva la exploración de ideas variacionales.

Durante el transcurso de la actividad se recolectaron evidencias de cómo los estudiantes conectan los diferentes registros para elaborar sus argumentos variacionales, lo que se considera clave para la comprensión de algunos de los conceptos centrales del cálculo, y de la matemática en general. Se observa que los estudiantes usan esta conexión para la supervisión de sus resultados, aspecto que se reporta como una dificultad en la literatura. También es interesante cómo los estudiantes utilizan en esta tarea argumentos sobre la pendiente para analizar la variación de primer orden.

El hecho de no partir de la función como un objeto, hace que la tarea no se centre allí sino en el proceso y en la relación entre las variables. Sabemos que muchas veces el tratamiento que se hace de las funciones las convierte en el objeto central de las tareas y el contexto termina siendo simplemente un adorno en una situación puramente intra-matemática. Con esto no se está planteando que las tareas deban ser exclusivamente de naturaleza extra-matemática, pero sí que una tarea que busca desarrollar ideas variacionales no puede tener como principal protagonista a una mirada estática de la función.

Como establecimos oportunamente, la elección de GeoGebra se sostiene en la firme convicción de que los medios utilizados para desarrollar la tarea matemática son determinantes en el tipo de actividad y pensamiento matemático que desarrolla durante la misma. El pensamiento variacional necesita de los estudiantes construyendo modelos mentales de situaciones dinámicas, y si bien hay ejemplos de interesantes trabajos que desarrollan ideas variacionales utilizando medios estáticos como el de Vrancken y Engler (2014), hemos observado que la naturaleza dinámica e interconectada de las representaciones en GeoGebra ha permitido a los estudiantes llegar a interiorizar la situación de variación y sus representaciones para luego dar el salto a las representaciones estáticas con pocas dificultades.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33-60.
- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>

- Arzarello, F., Bussi, M. G. B., Leung, A. Y. L., Mariotti, M. A. y Stevenson, I. (2011). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 15, pp. 97-143). Springer Netherlands. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6\\_5](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_5)
- Barajas Arenas, C., Parada Rico, S. E. y Molina Zavaleta, J. G. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. *Educación Matemática*, 30(3), 297-323. <https://doi.org/10.24844/EM3003.12>
- Becerra, M., Bermúdez, E. y Ochoa, J. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia*, 14, 115-126. <https://doi.org/10.18634/sophiaj.14v.2i.629>
- Borba, M. C. y Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation*. Springer.
- Cabezas, C. y Mendoza, M. R. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación Universitaria*, 9(6), 13-26. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062016000600003>
- Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). Trillas.
- Cantoral, R. y Caballero-Pérez, M. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En *Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar* (pp. 1197-1206).
- Carlson, M., Jacobs, S. y Coe, E. (2003). Razonamiento Covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de estudio. *Revista EMA*, 8(2), 121-156.
- Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. Díaz de Santos, UAGro.
- Dolores, C., Chi, A., Canul, E., Cantú, C. y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Unión. Revista iberoamericana de educación Matemática*, 18, 41-57.
- Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á. y Estepa, A. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. *CERME* 8, 16, 1-15.
- Lesh, R. y English, L. D. (2005). Trends in the evolution of models & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 37(6), 487-489. <https://doi.org/10.1007/BF02655857>
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. [Tesis de Maestría]. IPN.
- Sánchez Aguilar, M. y Molina Zavaleta, J. (2006). *Pensamiento y lenguaje variacional. Una aplicación al estudio de la derivada*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 739-745.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de Publicaciones.
- Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Published in Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7, Québec, Canada, (1993), 13-28.*

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, 24, 39-49.

Tejera, M. (2021). *Diseño de una secuencia didáctica basada en la modelación para fomentar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes* [Tesis de Maestría]. CICATA-IPN.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En *Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos*. (pp. 134-148). Universidad Pedagógica Nacional.

Villa, J. A. y Ruiz, H. M. (2010). Pensamiento variacional: Seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 514-528.

Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: Resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 449-468. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22>

Wittmann, E. Ch. (1998). Mathematics Education as a 'Design Science'. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (Vol. 4, pp. 87-103). Springer Netherlands. [https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3\\_6](https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3_6)