Diploma en Matemática mención Enseñanza
ANEP-UdelaR

TESINA

De tareas estándar a tareas desafiantes: diseño de actividades para la enseñanza del álgebra lineal

Presenta
Silvina González

Tutoras
Verónica Molfino, Cristina Ochoviet

2021

Montevideo, Uruguay

Índice

Resumen 2

Capítulo 1. Introducción 3

Capítulo 2. Antecedentes temáticos y formulación de objetivos 5

Antecedentes temáticos 5

Formulación de objetivos 9

Capítulo 3. Marco conceptual 9

Tareas de final abierto 9

Tareas desafiantes 10

Clasificación de tareas en función a la exigencia cognitiva 13

Capítulo 4. Método 15

Capítulo 5. Análisis del práctico 16

Capítulo 6. Rediseño de tareas 22

Tareas desafiantes utilizando determinantes 22

Clasificación de las tareas y potencial para la enseñanza 24

Capítulo 7. Conclusiones 26

Referencias bibliográficas 28

Anexo 30

Resumen

Este trabajo pretende estrechar la brecha existente en la formación de futuros docentes de matemática, entre la matemática que se aprende durante la carrera y aquella que deberán enseñar quienes se están formando. Si al mismo tiempo el *qué* enseñar y el *cómo* hacerlo se entrelazan en la misma asignatura, la formación resulta más eficiente. Para esto consideramos incorporar la componente del desafío en las propuestas de enseñanza, y trabajar en particular con las tareas de final abierto. Además, explicitamos el rol del docente y de los estudiantes al proponer este tipo de tareas en el aula. Para ejemplificar el diseño de este tipo de tareas en la formación de profesores realizamos el análisis de un práctico de un curso de Geometría y Álgebra lineal de un instituto de formación docente, y clasificamos las tareas según si son tareas de final abierto o no y según el nivel de exigencia cognitiva. El tema principal del práctico es cálculo y propiedades del determinante de una matriz. A partir de esto seleccionamos dos tareas y las modificamos para transformarlas en tareas de final abierto, y justificamos por qué esas nuevas tareas pueden ser consideradas desafiantes. También realizamos el análisis a priori y elaboramos algunas recomendaciones.

Palabras clave: tareas desafiantes, geometría y álgebra lineal, determinantes, formación de profesores.

Summary

This work aims to narrow the existing gap in mathematics teachers training, between the mathematics that is learned during the career and the mathematics future teacher will teach in their teaching practice. If at the same time *what* to teach and *how* to teach it are intertwined in the same subject, the training is more efficient. For this we consider to incorporate the challenge component in teaching proposals, specifically working with open ended tasks. In addition, we explain the role of the teacher and the students when proposing this type of task in the classroom. To exemplify the design of this type of task in teacher training, we analyzed a series of exercises of a Geometry and Linear Algebra course, and we classified the tasks according to whether they are open-ended tasks or not and considering also the level of cognitive demand. The main subject of the series of exercises is calculus and properties of the determinant of a matrix. We selected two tasks and modified them to transform them into open-ended tasks, and we argued why they can be considered as challenging tasks. We also analyzed the tasks and made some recommendations.

Keywords: challenging tasks, geometry and linear algebra, determinants, teacher training.

Capítulo 1
Introducción

La carrera de Profesor de Matemática en Uruguay está estructurada en tres pilares que aportan formación en ciencias de la educación, en matemática y en su enseñanza. En mi experiencia personal como estudiante de esa carrera y como practicante noté que la mayoría de los futuros docentes no logran encontrar un vínculo entre las asignaturas de los tres pilares y su preparación para ser docentes en la enseñanza media. Al igual que Santaló (1994) creemos que las materias asociadas al *qué* enseñar y las que lo están al *cómo* hacerlo deben trabajar en forma conjunta, de esta manera la educación de profesores sería más efectiva y se ahorraría tiempo. La interacción entre el *qué* y el *cómo* enseñar va en la misma línea que lo planteado por Marcelo (1994) y Ochoviet (2009). Marcelo (1994) cita a Fernández Pérez (1994) quien afirma que los estudiantes de formación docente tienden a repetir los métodos que han recibido y no incorporan lo que se les es enseñado en la formación. Este fenómeno lo podemos relacionar con lo afirmado por Furió (1994), referenciado en Ochoviet (2009), que menciona que la forma en que los estudiantes de formación docente aprenden incide en sus futuras prácticas. Por estos motivos, en la formación de profesores se deben utilizar los métodos que se pretenden que los estudiantes utilicen al dictar sus clases. Actualmente, los estudiantes visualizan por un lado que los profesores de formación docente les enseñan de forma expositiva (sobre todo en las materias específicas) y por el otro que los profesores de didáctica (principalmente) apoyan otros métodos más centrados en los estudiantes.

Lawrence, según Marcelo (1994), afirma que los profesores deben tener un enfoque reflexivo del aprendizaje, de esta forma no tendrán dificultad para desarrollar su concepción y comprensión de cómo aprenderán los alumnos.

Santaló (1994) también hace referencia a que no se debe dar un curso para futuros profesores de igual manera que para licenciados en matemática, ingenieros o economistas.

Al respecto, una investigación que nos resultó iluminadora fue la de Ticknor (2012). La autora analiza los contenidos matemáticos desarrollados en un curso de álgebra abstracta, teniendo en cuenta que los estudiantes de profesorado encuentran difícil vincular los temas aprendidos del curso y los temas que deberán enseñar en Secundaria. Ticknor (2012) destaca el hecho que los estudiantes de profesorado toman el mismo curso que los estudiantes de licenciatura en Matemática pura y abstracta, lo que no parece favorecer la atención de recomendaciones tanto del *Committee on the Undergraduate Program Mathematics* como del

Conference Board of Mathematical Sciences sobre conectar los programas que se encuentran en los cursos de profesorado y los de enseñanza media; pues favorece a los estudiantes de profesorado y a los de enseñanza media.

Mediante esta tesina queremos impulsar el trabajo con tareas que puedan utilizarse en la formación docente para vincular el qué y el cómo enseñar, mediante la consideración de un tipo de tareas denominadas *desafiantes*. Estas tareas pueden ser implementadas en las asignaturas de formación matemática de la carrera. Para dar un ejemplo seleccionamos un práctico de Geometría y Álgebra lineal de un instituto de formación docente y modificamos dos tareas para transformarlas en desafiantes, apoyándonos en los aportes relativos a tareas de final abierto de Zaslavsky (1995). De este modo aportamos ideas para que los docentes de los futuros profesores se motiven a crear sus propias tareas desafiantes en diferentes cursos.

En el capítulo 2 presentamos algunos antecedentes relativos al diseño de tareas para la formación de profesores y formulamos los objetivos que nos planteamos.

En el capítulo 3 desarrollamos el marco conceptual. Allí definimos a qué le llamamos tareas de final abierto, caracterizamos las tareas desafiantes y exponemos el potencial que tiene trabajar con tareas desafiantes en la formación docente, y explicitamos la clasificación de tareas que tendremos en cuenta para el análisis de las tareas del práctico elegido.

En el capítulo 4 presentamos el método empleado.

En el capítulo 5 realizamos el análisis de las tareas presentes en el práctico y las clasificamos según el criterio detallado en el capítulo 3.

En el capítulo 6 rediseñamos dos tareas del práctico para convertirlas en tareas de final abierto junto a sus posibles resoluciones, clasificación y análisis a priori.

En el último capítulo se encuentran las conclusiones. Allí reflexionamos acerca del valor de este trabajo para la formación de profesores de matemática.

Al final del proyecto, en el Anexo, exponemos imágenes del práctico que se trabajó en el curso.

Capítulo 2
Antecedentes temáticos y formulación de objetivos

2.1 Antecedentes temáticos

En este capítulo presentamos antecedentes relativos al diseño e implementación de tareas para la enseñanza de la matemática, en particular en cursos de formación docente. Las investigaciones reportan el potencial que tienen para la enseñanza de la matemática y el aporte pedagógico que les brinda a los futuros docentes. Se encuentran ordenadas en forma cronológica.

Zaslavsky (1995) define las tareas de final abierto como aquellas que tienen múltiples respuestas correctas. En un taller de formación docente presentó una actividad sobre intersección de recta y parábola, la cual denomina estándar, y la modificó eliminando la ecuación de la recta, para generar así una tarea de final abierto.

La autora analiza la respuesta de la tarea estándar y las diferentes respuestas de la tarea modificada, indicando las preguntas que agregó en cada estrategia que los estudiantes presentaron. Concluye que, si bien los conocimientos implicados en la tarea ya eran conocidos, luego de la modificación se pudo generar una experiencia nueva de aprendizaje. La tarea de final abierto permitió que los estudiantes comparen, validen y relacionen sus respuestas, promoviendo las conexiones entre conocimientos y otras situaciones de aprendizajes que según menciona Zaslavsky siguen los estándares planteados por NCTM (1989, 1991). Esta experiencia provocó que los estudiantes generen tareas similares para sus cursos, compartan las experiencias y cumplieran sus aspiraciones de cambiar sus prácticas.

Oktaç, García y Ramírez (2007) trabajaron en el diseño de actividades y preguntas para un curso de álgebra lineal. Los autores toman la clasificación de Zazkis y Hazzan (1999), a la que luego agregan una categoría. Mencionan siete tipos de actividades y preguntas, que son: *preguntas de desempeño*, de *"por qué"* inesperadas, *de giro, de reflexión*, *actividades de construcción*, de *"dar un ejemplo"* y *novedosas* (categoría que agregan Oktaç et al.). Afirman que la implementación de este tipo de tareas permite a los docentes generar un espacio donde poder "observar el comportamiento de los estudiantes, con actividades diseñadas según las necesidades específicas de cada grupo y tomando en cuenta la naturaleza de los temas matemáticos tratados" (Oktaç et al., 2007, p. 11). Los autores mencionan que la aplicación recurrente y la modificación de las preguntas aumentan la experiencia del profesor y a los estudiantes les permite adaptarse a diferentes tareas y generar nuevas conexiones entre los objetos matemáticos y sus representaciones, lo que ocasiona mayor flexibilidad frente a distintos contextos y situaciones, mejorando así sus aprendizajes.

Zaslavsky (2008), para ejemplificar el proceso que conlleva el diseño de una tarea para la formación de profesores, tomó una actividad que fue modificando en un mismo grupo y detalló los beneficios y la utilización de diferentes herramientas de cada tarea modificada. A la primera tarea la nombró *tarea espiral, que* involucra el concepto de congruencia y pone en jugo la intuición errónea de los estudiantes según la cual si dos triángulos poseen cinco elementos congruentes entonces son congruentes. La primera vez que presentó la tarea casi no le realizó modificaciones. La segunda vez eliminó los ejemplos y modificó las herramientas de medición. La tercera vez proporcionó las conexiones y cuestionó la coexistencia de ellas centrándose en la posibilidad de construcción.

Concluyó que trabajar con las tres tareas mejora la adaptabilidad de los futuros profesores y genera un espacio natural para discutir sobre las herramientas utilizadas, comparar los tipos de tareas y algunas creencias de los estudiantes y profesores con respecto a las matemáticas. Además, la autora les pidió a los estudiantes que sugirieran variaciones de la tarea para sus propias clases y reporta el caso de una alumna que lo hizo e invitó a colegas a que observaran la clase donde la implementó.

Guberman y Leikin (2013) reportan una investigación sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos y pedagógicos de futuros docentes de matemática al trabajar sistemáticamente con tareas de múltiples soluciones correctas, en un curso de resolución de problemas.

Concluyeron que los alumnos mejoraron significativamente el éxito en la resolución de problemas y la cantidad de caminos para llegar a distintas soluciones posibles no convencionales, independientemente de si el rendimiento del estudiante era alto o bajo. A su vez, demostraron que las tareas de múltiples respuestas correctas son una herramienta efectiva para el desarrollo de competencias, mejoran el potencial para el monitoreo flexible de la discusión matemática y la flexibilidad mental al desarrollar conexiones matemáticas entre representaciones de los conceptos, entre diferentes herramientas, temas y conceptos del mismo campo.

Maldonado (2016) diseñó actividades de final abierto e implementó una de ellas, enfocada en similitudes y diferencias (Zaslavsky, 2008), en un curso de Geometría y Álgebra lineal de la formación de profesores de matemática. Analizó la elaboración de conjeturas y las conexiones entre conceptos trabajados por los futuros docentes. La autora destaca que el docente responsable del curso, que participó como observador de todo el proceso de experimentación, afirma que los estudiantes recurrieron a varios conceptos previamente estudiados, el trabajo en subgrupos fue acertado y la puesta en común logró pulir lo que cada subgrupo trabajó; además, que este tipo de actividades revela dificultades de los estudiantes que las actividades tradicionales no permiten observar.

En las conclusiones la autora refiere, entre otras, al potencial de este tipo de tareas y lo que los estudiantes vivenciaron: argumentar ante sus compañeros, vincular conceptos, sentir incertidumbre en los caminos de resolución y lidiar con proposiciones conflictivas.

Mesa (2016) realizó una intervención en Matemática Educativa orientada a las prácticas docentes en un curso de Profundización en Geometría, asignatura del último año de la carrera de profesorado de matemática. La intervención derivó en el diseño y puesta en práctica de una actividad de generalizar y particularizar un objeto matemático, trabajando en forma colaborativa con el docente del curso. La autora describe que los estudiantes en el transcurso de la clase lograron extraer conclusiones y realizar justificaciones y generalizaciones.

En las consideraciones finales, la autora menciona que los estudiantes pudieron vincular contenidos trabajados en el nivel superior y los que trabajarán en educación media, además aprendieron justificaciones relacionadas a distintos niveles, profundizando en el conocimiento especializado del contenido.

Ochoviet y Rodríguez (2018) realizaron una experiencia con dos docentes de formación de profesores. Les presentaron *actividades novedosas*, según las definen Oktaç et al. (2007), analizando el potencial de las actividades y la reacción de los futuros docentes. Las autoras afirman que las actividades novedosas "desestabilizan al estudiante, hacen que deba recurrir a la definición del concepto matemático involucrado y que ponga en juego diferentes maneras de pensar los objetos matemáticos" (p. 312).

Algunas de las conclusiones que obtuvieron fueron que a partir del análisis de las tareas se generaron aprendizajes vinculados con concepciones, concepciones erróneas y la reflexión sobre los registros de representación; y que los formadores pudieron decidir sobre el potencial para trabajar los errores conceptuales tenidos en cuenta a priori. Además, consideran factible continuar diseñando y aplicando este tipo de tareas, pues los docentes se mostraron interesados y receptivos y notaron el potencial que tienen frente a otras tareas que se utilizan con más frecuencia.

Ricart, Beltrán-Pellicer y Estrada (2019) propusieron una actividad del tipo *Which One Doesn't Belong* (WODB), en una universidad española a 94 futuros docentes de tercer grado de Educación Infantil, en la asignatura Aprendizajes de las Matemáticas. Su objetivo fue analizar los argumentos, conexiones y vocabulario de los estudiantes en geometría del espacio. Como ya habían trabajado con este tipo de actividades, sabían de antemano que todos los objetos pueden ser el que no pertenece (o el intruso) por algún criterio. Es decir que este tipo de tareas admiten múltiples respuestas correctas.

Entre las conclusiones, Ricart et al. (2019) destacan "el potencial de la tarea WODB para los docentes, pues permite fácilmente captar los significados personales logrados, así como focalizar errores y dificultades del alumnado." (p. 9) A su vez beneficia el desarrollo de las conexiones y la argumentación.

Todas estas investigaciones, si bien fueron implementadas en distintos países y años, concuerdan en el potencial que tienen las tareas de final abierto, las tareas novedosas, y las de atención a similitudes y diferencias al trabajarlas con futuros docentes. Nos hablan de la importancia del diseño cuidadoso de las tareas con el fin de potenciar los aprendizajes. Esto nos impulsa a profundizar en las tareas desafiantes para poder implementarlas en la enseñanza uruguaya en cualquier nivel, pero fundamentalmente en la formación docente.

2.2 Formulación de objetivos

Objetivos generales

Desarrollar estrategias didácticas para transformar tareas en tareas desafiantes y aportar al diseño de los cursos de matemática de la formación de profesores.

Objetivos específicos

- Clasificar las tareas propuestas en un práctico de la asignatura Geometría y Álgebra Lineal de un instituto de formación docente, en función de la cantidad de respuestas que admiten y de la exigencia cognitiva que demandan, y analizar su potencial.
- Transformar dos tareas de ese práctico en tareas de final abierto y analizar el potencial para el aprendizaje.

Capítulo 3
Marco conceptual

Para este trabajo consideraremos las tareas de final abierto y justificaremos que son tareas desafiantes. Además, presentamos una clasificación de las tareas según su exigencia cognitiva que usaremos en el desarrollo de la tesina.

3.1 Tareas de final abierto

Zaslavsky (1995) define las tareas de final abierto como aquellas que poseen múltiples respuestas correctas. Esto permite a los estudiantes utilizar diferentes métodos de resolución, comparar, validar y relacionar las respuestas con sus compañeros. A su vez, da lugar a generar conexiones de conocimientos matemáticos en diferentes niveles de generalización y abstracción, dependiendo de los conocimientos involucrados en las resoluciones.

Estas tareas favorecen que los estudiantes observen el rol y la legitimidad de los errores, destaquen las individualidades (al plantear diferentes soluciones, utilizar métodos variados o niveles de abstracción y profundización), trabajen en conjunto al momento de comparar y verificar, desarrollen las prácticas de explicar y justificar, generen el sentimiento de involucramiento y el logro en conjunto que no se podría haber llegado de manera individual. Estas características resultan especialmente relevantes en la formación de profesores.

Por otra parte, al trabajar con conocimientos matemáticos que luego deberán enseñar, fomenta que los futuros profesores piensen en cómo utilizar las tareas de final abierto en sus prácticas.

El rol que cumple el docente es de facilitador del discurso matemático, interfiriendo lo indispensable en el intercambio de ideas de los estudiantes y sin redireccionar la discusión. Puede realizar preguntas a los alumnos sin saber previamente su respuesta para avanzar en la reflexión.

Estas tareas de final abierto pueden surgir al realizar “pequeños cambios” a las tareas que se utilizan cotidianamente, que son extraídas de libros de texto o materiales didácticos. Con esto la autora se refiere a que una tarea se puede modificar para que sea de final abierto. Zaslavsky (1995) presenta ejemplos en los cuales se pueden distinguir tres estrategias para realizar las modificaciones. Algunos de los ejemplos son:

- eliminar parte de la información dada,

Una tarea estándar	Una tarea modificada
Factoriza $x^2 - 3x - 4$	Encuentra un último término que haga $x^2 - 3x - ?$ factorizable

(Zaslavsky, 1995, p. 20)

- rerredactar la consigna,

Una tarea estándar	Una tarea modificada
Encuentra el punto de intersección entre las gráficas de $y = 3x - 8$ y $y = -2x + 7$	Encuentra una ecuación de una línea recta que pase por el punto (3,1)

(Zaslavsky, 1995, p. 20)

- solicitar un ejemplo:

Una tarea estándar	Una tarea modificada
Halla la función inversa de $f(x) = 2x + 1$	Da un ejemplo de una función que sea igual a su inversa

(Zaslavsky, 1995, p. 20)

3.2 Tareas desafiantes

3.2.1 Características y gestión de las tareas desafiantes

En esta sección desarrollamos algunas características de las tareas consideradas desafiantes y qué se espera de los alumnos al resolverlas y de los docentes al proponerlas, puesto que son atípicas con respecto a las tareas que suelen aparecer en los libros de matemática.

Consideremos las tareas desafiantes de gran importancia para la implementación en la carrera de formación docente pues:

> Según Jaworski (1992, 1994) el desafío matemático es uno de los tres elementos centrales de la enseñanza (junto con la sensibilidad hacia los estudiantes y la gestión del aprendizaje). La elección del maestro de las tareas matemáticas para la clase y las formas en que se les pide a los estudiantes que las aborden determinan la calidad de las matemáticas en el aula. (Guberman y Leikin, 2013, p. 36)

<u>¿Cuáles son las características de una tarea desafiante?</u>

Para que una tarea sea desafiante debe ser motivadora, admitir múltiples respuestas correctas, lo que genera diferentes estrategias de resolución, todos los estudiantes deben tener la posibilidad de acceder a al menos una respuesta correcta y no deben acceder a procedimientos fácilmente, lo que ocasiona que la tarea sea percibida como desafiante (al menos por la mayoría) (Guberman y Leikin, 2013; Livy, Muir y Sullivan, 2018; Russo, 2018).

Para que la tarea sea motivadora no debe ser ni muy fácil ni muy difícil, más bien debe incentivar a que los estudiantes la resuelvan, desarrollando curiosidad matemática e interés en el tema, promoviendo así la naturaleza constructiva del aprendizaje de la matemática (Guberman y Leikin, 2013). Como plantea Russo (2018) las tareas desafiantes son tareas exigentes y estimuladoras, con el objetivo de que la mayoría de los estudiantes puedan acceder a alguna respuesta correcta.

Las tareas desafiantes aumentan la complejidad y el desafío, fomentando el desempeño de soluciones no convencionales junto con las convencionales, pues incluyen la implementación de diferentes estrategias y técnicas, abarcando modelado, búsqueda de patrones y justificación (Livy et al., 2018).

¿Qué requieren del estudiante?

Livy et al. (2018, p. 20) entienden que las tareas desafiantes requieren de los estudiantes:

- planear su enfoque, especialmente secuenciando más de un paso;
- procesar múltiples piezas de información, con una expectativa de que hacen conexiones y ven conceptos matemáticos de nuevas maneras;
- elegir sus propias estrategias, objetivos y nivel de acceso a la tarea;
- dedicar tiempo a la tarea y registrar su pensamiento;
- explicar sus estrategias y justificar su pensamiento al profesor y a otros alumnos.

Dos sugerencias que realizan Sullivan (2007) y Livy et al. (2018) para el desarrollo de la tarea es sugerir a los estudiantes que registren el proceso de resolución grabando los pasos efectuados y, al momento de exponer sus ideas al resto de los compañeros, resaltan la importancia de escucharse atentamente entre sí y aportar ideas.

Gestión docente

Como mencionan Sullivan et al. (2015), referenciando a (Lappan et al., 2006) el rol docente se puede distinguir en tres momentos: iniciar, explorar y resumir.

En el primer momento el docente puede hacer una pequeña introducción a la tarea, explicando alguna notación o concepto a trabajar. Los estudiantes pueden realizar preguntas aclaratorias.

En el segundo momento, al implementar las tareas desafiantes es importante que los estudiantes tengan una orientación mínima por parte del docente (Livy et al., 2018), para permitirles la exploración de los conceptos. Podríamos decir que el rol docente es de observador, a menos que sea necesaria una explicación (Sullivan, 2007).

Por último, en la puesta en común el rol pasa a ser de monitor, donde solamente organiza la discusión de los estudiantes, pero es clave en la elección, secuenciación y conexión de las resoluciones que se compartirán (Livy et al., 2018). Luego realiza un resumen de los hallazgos, para estructurar la lección en forma general (Sullivan et al., 2015).

A modo de resumen podemos decir que una tarea es desafiante si tiene múltiples respuestas correctas y estrategias de resolución; les permite a los estudiantes elegir una estrategia y secuenciarla en pasos; es motivadora y accesible a todos. Por último, contempla la puesta en común, en la cual uno o varios estudiantes explican el método de resolución que utilizaron justificando todos sus pasos, sin necesidad que el docente dé la o las respuestas, más bien realiza preguntas u ordena la participación de los estudiantes.

Se puede observar que las tareas de final abierto mencionadas por Zaslavsky (1995) y las tareas desafiantes comparten varias características. Ambas tareas poseen múltiples respuestas correctas, por lo cual también múltiples métodos de resolución. El docente cumple el mismo rol, de no intervenir en la búsqueda de conocimientos de los estudiantes y monitorear el intercambio de ideas de la puesta en común. Por último, en las tareas de final abierto los estudiantes tienen los mismos beneficios que al trabajar con las tareas desafiantes. Por lo cual podemos concluir que las tareas de final abierto, como las define Zaslavsky (1995), son en general tareas desafiantes.

Del mismo modo observamos que las tareas desafiantes implican un alto nivel de exigencia cognitiva, pues se promueve una participación autónoma de los estudiantes, quienes deben analizar y relacionar los elementos presentes en la tarea, atendiendo al desarrollo del procedimiento y comprendiendo los conceptos e ideas matemáticas en juego. Además, en la puesta en común deben reflexionar, comunicar y emplear de manera flexible los conocimientos, estrategias y habilidades.

3.2.2 Potencial para los futuros docentes al trabajar con tareas desafiantes

Trabajar con tareas desafiantes en formación docente beneficia a los formadores y a los estudiantes, tanto para su aprendizaje como para su práctica docente.

Para los formadores este tipo de tareas permite develar los conceptos erróneos de los alumnos, los que deben ser reelaborados de forma significativa. También pueden ser utilizados como introducción a un concepto, para trabajar la intuición o ideas previas. Aumenta la demanda de planificación y disminuye la explicación de las tareas por parte del docente (Sullivan et al., 2015).

Desde la perspectiva de los estudiantes, trabajar con este tipo de tareas permite vincular conceptos, comparar y contrastar ideas, considerar su uso en diferentes contextos para generar una red de ideas interconectadas, siendo un desafío conectar las ideas y planificar sus propias estrategias de resolución, desarrollando sus razonamientos y estrategias (Sullivan, 2007; Powell et al., 2009).

Como las tareas desafiantes tienen múltiples respuestas correctas y estrategias de resolución, permiten a los estudiantes fortalecer sus justificaciones y observación, dando la aprobación o poniendo en duda las respuestas de los demás compañeros (Sullivan, 2007; Livy et al., 2018). Además, cuando un estudiante o un grupo expone sus métodos de resolución se fortalece la vinculación e interacción social, que son elementos importantes para el aprendizaje (Powell et al., 2009).

Por último, al no promover la competencia en el desempeño hay mayor probabilidad de que los estudiantes tengan actitudes positivas hacia el aprendizaje (Sullivan et al., 2015).

Para la futura práctica docente de quienes se están formando como profesores, Livy et al. (2018), citando a Polya (1973), mencionan que el docente debe ponerse en el lugar del alumno para tener la experiencia de enfrentarse a las tareas desafiantes. Teniendo en cuenta que los futuros docentes están más influenciados por la forma en la que se les enseña que la forma en que los docentes les dicen cómo deben enseñar (Ochoviet, 2009), creemos que este tipo de tareas son las que se deben promover. Igualmente, la experiencia de trabajar con este tipo de tareas les permitirá a los estudiantes observar un rol docente atípico, donde su rol es de iniciar la actividad realizando una pequeña introducción, si es necesaria, observar mientras los estudiantes trabajan con las tareas y en caso de ser necesario realizar aclaraciones, y resumir seleccionando a estudiantes determinados para que expliquen y justifiquen las estrategias y soluciones que implementaron (Livy et al., 2018); cuando lo común es que el formador explique la tarea, brinde ejemplos y realice la corrección él o un alumno.

3.3 Clasificación de tareas en función de su exigencia cognitiva

Para esta clasificación de las tareas consideramos lo descrito por Smith y Stein (1998), referenciados en Chávez (2017), quienes proponen cuatro niveles de exigencia:

1. tareas de *memorización*, en este caso implican la reproducción exacta de lo visto anteriormente, como pueden ser fórmulas, reglas, hechos o definiciones, por lo general son preguntas de una única solución, sin ambigüedades;
2. tareas de *procedimiento sin conexión*, en este tipo de tareas los estudiantes demuestran comprensión del contenido para resolver la tarea, no hay conexiones entre conceptos o significados, se utilizan algoritmos expresados de manera específica o instrucciones de una tarea previa, se indica qué hacer y cómo, existe poca ambigüedad;
3. tareas de *procedimientos con conexión*, aquí los estudiantes deben analizar y relacionar los elementos presentes en la tarea, atendiendo al desarrollo del procedimiento y comprendiendo los conceptos e ideas matemáticas en juego, sugieren vías a seguir (de manera explícita o implícita) de procedimientos generales donde hay conexiones a ideas conceptuales subyacentes;
4. tareas *para hacer matemática*, los estudiantes visualizan e integran los elementos de la tarea para implementar un plan que puedan ejecutar, además puede involucrar la realización de resumir, organizar, diseñar, elaborar, reconstruir, reflexionar, comunicar, emplear de manera flexible los conocimientos, estrategias y habilidades, promoviendo una participación autónoma.

Según *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2014), referenciado en Chávez (2017), los dos primeros niveles corresponden a un bajo nivel de complejidad, mientras que los dos últimos a un alto nivel de complejidad.

Capítulo 4
Método

Seleccionamos un práctico que se trabaja en formación docente en el segundo año de la carrera de profesor de matemática. Se trata del práctico 3 de Geometría y Álgebra Lineal del año 2020, de un instituto de formación docente en Uruguay.

Luego analizamos las tareas del práctico, el potencial que poseen y las clasificamos según la cantidad de soluciones posibles y la exigencia cognitiva que demandan (Chávez, 2017).

Finalmente, intervenimos dos tareas del práctico para transformarlas en tareas de final abierto y desarrollamos un análisis a priori en el que exponemos algunas de las posibles soluciones y sugerencias didácticas para su uso en clase.

Capítulo 5
Análisis del práctico

En este capítulo analizamos y clasificamos las actividades del práctico 3 del curso de Geometría y Álgebra Lineal del año 2020, de un instituto de formación de profesores en Uruguay en la especialidad Matemática (ver Anexo). El práctico tiene un total de 9 ejercicios, numerados del 1 al 9.

Para la clasificación utilizaremos las dos categorías mencionadas en el marco teórico, tareas de final abierto y exigencia cognitiva. Presentamos una tabla de doble entrada, donde en las columnas se encuentran los diferentes niveles de exigencia cognitiva y en las filas si son tareas de final abierto o no. Más adelante analizamos cada actividad individualmente.

	Memorización	**Procedimientos sin conexión**	**Procedimientos con conexión**	**Para hacer matemática**
Tareas de final abierto		7iii		8iii
Tareas que no son de final abierto	1 – 4	2 – 3ii – 5 – 6	3i – 8i – 8ii – 9	7i – 7ii

Ahora detallamos la clasificación de cada tarea. En primer lugar presentamos el enunciado, y a continuación el análisis.

1) Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{i)}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ii)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{iii)}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{iv)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{v)}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{vi)}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{vii)}\begin{vmatrix} 1 & 1-i & -i \\ i & i & 1+i \\ 1 & i-1 & i \end{vmatrix} \quad \text{viii)}\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En la tarea 1 deben calcular diferentes determinantes utilizando la definición. Como la respuesta que obtienen los estudiantes es única no son tareas de final abierto. Si bien puede existir más de un camino para calcular los determinantes de orden mayor a dos, no son variados, puesto que serían variaciones de las propiedades para llegar a una única solución. Es decir, los estudiantes deben aplicar las definiciones vistas en la clase, sin ningún tipo de ambigüedad. Por lo que consideramos que esta tarea es de memorización.

2) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = 5$, calcular los siguientes determinantes:

i) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & j \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -j \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}$ iv) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2j \end{vmatrix}$

En la tarea 2 teniendo en cuenta el valor del determinante cuyas entradas están conformadas por variables, deben calcular el valor de otros determinantes aplicando propiedades. Los estudiantes obtendrán una única solución en cada caso, por lo que no es una tarea de final abierto. Además, la exigencia cognitiva es de procedimientos sin conexión, puesto que deben observar el nuevo determinante, establecer su relación con el original, ver qué tienen de diferente y qué de similar, identificar la propiedad a emplear. No es aplicación inmediata, como en el caso anterior.

Esta tarea podría ser considerada, eventualmente, como de procedimientos con conexión pues los estudiantes tienen que vincular el cálculo de un determinante con propiedades, pero dada la cantidad de partes que tiene el ejercicio, podríamos decir que deviene, en el transcurso de su resolución, en una tarea de procedimientos sin conexión. Esto nos alerta acerca de la formulación de una tarea y la necesaria reflexión que implica su diseño, aún en la cantidad de partes que se incluyen.

3) Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

i) $\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & -2 \\ x^2 & 4 & 9 & 4 \\ x^3 & 8 & 27 & -8 \end{vmatrix} = 0$

La tarea 3 es una combinación de las tareas 1 y 2, ya que si los estudiantes deciden aplicar la definición el ejercicio será engorroso para resolverlo, pero si deciden aplicar primero las propiedades para “generar” cero y luego aplicar la definición obtendrán ecuaciones más sencillas. Las ecuaciones tienen una única respuesta correcta, para la primera parte el conjunto solución es {0,1,2,3} y para la segunda parte es {-2,2,3} por lo que esta tarea no es de final abierto. Al igual que en los ejercicios anteriores los alumnos deben aplicar conocimientos ya trabajados, con la diferencia de que en vez de llegar a un valor del determinante inmediatamente después de aplicar propiedades y la definición, deben resolver ecuaciones, incorporando conocimientos algebraicos, resolución de ecuaciones y conjunto solución. Consideramos, entonces, que la parte i) de la tarea es de procedimiento con conexión y la parte ii) es procedimiento sin conexión, porque deben aplicar los mismos procedimientos que la parte anterior. Esto nos estaría hablando de un devenir de la exigencia cognitiva a medida que el estudiante resuelve la tarea.

4) Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Hallar el determinante de A, A^t, A^{-1} y de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

En la tarea 4 se presenta una matriz diagonal inferior particular y se les pide calcular el determinante de esa matriz, de la matriz transpuesta y el de la matriz inversa. En este caso pueden aplicar las propiedades o aplicar la definición. Nuevamente las respuestas son únicas, por lo que no es una tarea de final abierto y al implementar fórmulas o reglas ya conocidas la consideramos como tarea de memorización.

5) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones con derivadas de todos los órdenes y sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(t)=\begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$.

Probar que $\varphi'(t)=\begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f''(t) & g''(t) \end{vmatrix}$.

6) Sean $b_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $c_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $c_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones derivables y sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(t)=\begin{vmatrix} b_1(t) & c_1(t) \\ b_2(t) & c_2(t) \end{vmatrix}$. Llamaremos $B(t)$ y $C(t)$ a sus columnas. Probar que $\varphi'(t)=\det\left(B'(t),C(t)\right)+\det\left(B(t),C'(t)\right)$.

Las tareas 5 y 6 consisten en calcular los determinantes indicados, calcular la derivada y verificar que los resultados coinciden, si bien existe conexión con temas trabajados en otros cursos no se les otorga significado. En estos casos los estudiantes demuestran una comprensión de los contenidos, pero no se conectan los conceptos trabajados. Los algoritmos son utilizados de forma específica sin necesidad de una discusión posterior. Por último, como en los casos anteriores, no existe ambigüedad en las tareas, por lo que consideramos que no son tareas de final abierto y que son de procedimientos sin conexión.

7) i) Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonal. ¿Qué se puede asegurar de su determinante?

ii) Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior (es decir: todas sus entradas situadas por debajo de la diagonal son nulas). ¿Qué se puede asegurar de su determinante?

iii) Probar que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$.

En la tarea 7, en las partes i y ii, los estudiantes deben caracterizar el determinante de una matriz cuadrada de orden *n* diagonal y triangular superior, respectivamente. En estos casos los alumnos pueden considerar casos particulares y generalizar el resultado, o tomar una matriz genérica y aplicar propiedades para llegar a una conclusión. Las preguntas demandan a los estudiantes probar, conjeturar y demostrar. Consideramos que en el contexto del curso ambas partes son de hacer matemática. Mientras que en la última parte pide demostrar una igualdad utilizando las propiedades, no requiere de una reflexión posterior o comparación de resultados, deben establecer conexiones entre la definición de cada tipo de matriz y las propiedades sobre las que se pide conjeturar, por lo que consideramos que es una tarea de procedimiento sin conexión.

En las dos primeras partes las respuestas son únicas, por ende, las tareas no son de final abierto. La última parte, que pide probar una proposición, eventualmente podría tener más de una respuesta correcta si los estudiantes elaboran diferentes demostraciones, por ejemplo utilizando las propiedades, inducción completa o utilizando una matriz particular y para luego generalizar los resultados. Por lo que la consideramos como tarea de final abierto.

8) i) Probar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es antisimétrica y n es impar entonces $\det(A) = 0$.

ii) Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.
Mostrar que el determinante de una matriz nilpotente es cero.

iii) La matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llama *idempotente* si $A^2 = A$.
¿Qué valores puede tener el determinante de una matriz idempotente?
Construir un ejemplo de cada uno de los valores posibles.

En la tarea 8 se trabaja con nuevas definiciones, tales como nilpotente e idempotente, en las que los estudiantes deben probar tres igualdades diferentes y en el último caso dar un ejemplo para cada valor posible. Para resolverla deben aplicar definiciones, noción de ecuaciones y propiedades de los números reales. En las partes i) y ii) las respuestas son únicas por lo que la tarea no es de final abierto. Sin embargo, en la parte iii) hay infinitas respuestas correctas, las matrices idempotentes poseen determinante 0 o 1, y son infinitas las posibles respuestas que se pueden brindar con matrices con esos determinantes. También pueden emplearse métodos variados para crear dichas matrices.

Esta tarea requiere que los estudiantes establezcan conexiones entre propiedades, conceptos conocidos y estas nuevas definiciones. Podríamos considerarlas como procedimientos con conexiones a las dos primeras partes, en el sentido de que requieren que se establezca conexiones con otros temas y relacionar los elementos presentes, y la tercera parte de hacer matemática, porque deben explorar, conjeturar y justificar.

9) Se consideran los puntos del plano $A(a,b)$, $B(c,d)$ y C tal que $OACB$ es un paralelogramo, donde O es el origen de coordenadas.

i) Hallar las coordenadas de N, punto de corte de BC con el eje Oy.

ii) Sea M tal que $OAMN$ es paralelogramo. Probar que $OACB$ y $OAMN$ tienen igual área y que ésta es igual al valor absoluto del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Por último, la tarea 9 tiene una única respuesta correcta, a pesar de trabajar las coordenadas con parámetros, por lo que consideramos que la tarea no es de final abierto. Por otra parte, requiere conexiones con geometría analítica y no la aplicación de definiciones y propiedades directamente. En la parte ii se pueden utilizar los criterios de congruencia de triángulos. Pese a ello no existe la conexión con el significado, en ningún momento se pide determinar por qué motivo se cumple esa igualdad, los elementos no se relacionan. Consideramos que esta tarea es de procedimientos con conexión.

En síntesis, de las nueve tareas presentes la mayoría no son tareas de final abierto, exceptuando las terceras partes de los ejercicios 7 y 8. El práctico presenta dos tareas de memorización, tres tareas completas de procedimiento sin conexión y una tarea completa de procedimiento con conexión, mientras que las otras tres tareas poseen algunas partes de procedimientos sin conexión, otras de procedimientos con conexión y otras de hacer matemática o con partes de final abierto y el resto no. Por lo tanto, la mayoría de los ejercicios presentan un nivel bajo de exigencia cognitiva (Chávez, 2017).

Podemos decir que las tareas del práctico, en general, no admiten diferentes métodos de resolución, no generan conexiones potentes entre conocimientos matemáticos, ni fomenta el vínculo entre el *qué* enseñar y el *cómo*. Exceptuando la parte 8iii que, al ser una tarea de final abierto y el nivel de exigencia cognitiva es de hacer matemática, puede ser considerada como una tarea desafiante.

Capítulo 6

Rediseño de tareas

En esta sección mostraremos cómo partiendo de las actividades originales del práctico pueden obtenerse actividades de final abierto, y el potencial para la enseñanza que esa modificación representa. Consideramos dos actividades del práctico y las transformamos en tareas de final abierto, empleando las estrategias sugeridas por Zaslavsky (1995). Adicionalmente, presentamos algunas de las posibles resoluciones que pueden presentarse en la clase. En otro apartado reflexionamos sobre el nivel de exigencia cognitiva de las tareas y su potencial para la enseñanza.

6.1 Rediseño de tareas

Tarea 1 reformulada

Tarea del práctico	**Tarea modificada**
1) Calcular los siguientes determinantes: i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ v) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 & 1 \end{vmatrix}$ vi) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ vii) $\begin{vmatrix} 1 & 1-i & -i \\ i & i & 1+i \\ 1 & i-1 & i \end{vmatrix}$ viii) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$	Escribir una matriz de orden 3 cuyo determinante sea 0.

En la primera tarea del práctico los estudiantes deben aplicar la definición para calcular los determinantes presentes. Observamos que los determinantes de las partes v y vi resultan ser cero, por lo que decidimos aplicar la estrategia de rerredactar la consigna, brindándoles a los estudiantes el resultado para que ellos escriban alguna matriz que cumpla esa condición.

Esta tarea modificada posee múltiples respuestas correctas, pues existen infinitas matrices de orden 3 cuyo determinante es 0. Para ofrecer una respuesta correcta el alumno necesita saber cómo calcular un determinante. Por este motivo, consideramos que demanda poner en práctica el conocimiento que requiere la resolución de la tarea original.

A modo de ejemplo ilustramos algunas posibles resoluciones:

- Prueba y error: pueden considerar diferentes matrices y calcular su determinante, hasta obtener una que de cero.

- <u>Utilizando propiedades:</u> pueden escribir dos filas o dos columnas de la matriz y que la tercera sea una combinación lineal de esas dos o que la tercer fila o columna sea de ceros. Otra estrategia es pensar en una matriz que sepan que su determinante es cero y escribir la transpuesta para generar una nueva, o intercalar las filas o columnas.

- <u>Empleando la definición:</u> escribiendo una matriz cuyas entradas son variables, aplicar la definición y utilizar propiedades de los números reales para que el resultado sea cero.

- <u>Utilizando las diagonales principales:</u> si consideran que las diagonales principales están formadas por ceros, independientemente de los otros elementos de la matriz, el determinante resulta ser cero, lo que tendrán que demostrar.

Estimamos que esta tarea es motivadora, pues la consigna es comprensible y todos los estudiantes tienen la posibilidad de acceder a al menos una respuesta correcta. Además, no presenta indicios de cómo resolverla, y probablemente sea la primera vez que el estudiante se enfrente a este tipo de tarea, lo que puede parecerle un desafío.

Se espera que los estudiantes no se conformen con encontrar una sola respuesta correcta, más bien que encuentren todas las respuestas que les sean posibles. Esto se propiciará también mediante la gestión de aula, invitando a los estudiantes a compartir sus respuestas con el resto del grupo. Para ello es importante considerar la mayor cantidad posible de respuestas y resoluciones diferentes. De esta manera se asegura el intercambio de ideas entre los estudiantes.

<u>Tarea 2 reformulada</u>

Tarea del práctico	Tarea modificada
3) Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones: i) $\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & -2 \\ x^2 & 4 & 9 & 4 \\ x^3 & 8 & 27 & -8 \end{vmatrix} = 0$	Presenta una ecuación equivalente a $\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 0$

Posibles resoluciones:

- <u>Ensayo y error:</u> pueden sustituir alguna entrada, fila o columna por polinomios con las mismas raíces y comprobar que ambas ecuaciones tienen el mismo conjunto solución.

- Aplicando la definición: pueden calcular el determinante utilizando el método de Gauss o Sarrus, simplificar la expresión y plantear la ecuación $-2x(x-1)(x-2)(x-3)=0$. Luego utilizar diferentes propiedades para obtener ecuaciones equivalentes a esa, ya sea multiplicar ambos miembros por una constante, sumar una constante a ambos miembros o multiplicarlo por un polinomio que no posee solución real.

- Aplicando propiedades:

1. Al multiplicar una fila o columna de la matriz por una constante k distinta de 1, el determinante queda multiplicado por k, lo que significa que la ecuación queda multiplicada por k. Esto no varía el conjunto solución si k no es 0. Este procedimiento se puede aplicar más de una vez en un mismo determinante y con diferentes constantes.
2. Si se intercambian filas o columnas el determinante queda del signo opuesto. Por lo tanto, si se intercambia una cantidad impar de veces, la ecuación obtenida será opuesta a la ecuación original y por ende serán equivalentes.

Esta tarea puede ser abordada desde distintos grados de abstracción, puesto los estudiantes pueden trabajar con matrices numéricas o matrices genéricas.

Cuando se trabaja con la primera propiedad mencionada, se puede discutir el rango de la variable k y el motivo de las restricciones.

Consideramos que esta tarea es de final abierto, porque tiene múltiples respuestas correctas y genera una conexión entre determinantes y ecuaciones equivalentes. Los estudiantes deben seleccionar las propiedades que les sean útiles y justificar que las ecuaciones obtenidas sean equivalentes. Aplicando la definición todos los estudiantes pueden acceder a una respuesta correcta, lo que puede motivarlos para obtener más respuestas. Para eso los estudiantes deben generar estrategias, pues la tarea no insinúa algún método o dirección para su resolución.

6.2 Clasificación de las tareas y potencial para la enseñanza

Las tareas propuestas poseen, ambas, múltiples respuestas correctas y, como explicitamos anteriormente, existen múltiples métodos de resolución, los cuales permiten generar conexiones de conocimientos matemáticos en diferentes niveles de generalización y abstracción, dependiendo de los conocimientos involucrados en las resoluciones. Por lo cual consideramos que ambas tareas son de final abierto.

Mientras que según la exigencia cognitiva consideramos que son tareas para hacer matemática, puesto que los estudiantes deben, en forma autónoma, elaborar un método de resolución, determinar un enfoque, registrar el método a su manera, visualizar e integrar los elementos de las tareas y conectar conceptos trabajados. A su vez en la puesta en común deben comunicar, justificar su razonamiento y reflexionar sobre los métodos y soluciones obtenidas.

Estas tareas de buscar un elemento que cumpla con un requisito o presentar un ejemplo son poco usuales en el discurso matemático en general, y, en particular, en la experiencia como estudiantes que han transitado los alumnos de este curso, al menos a juzgar por este práctico. Ello genera un nivel de complejidad mayor, por ser una de las primeras veces que los estudiantes se enfrentan a estas situaciones. Como mencionan Sullivan et al. (2015), las tareas desafiantes son inusuales para los estudiantes en el sentido de que es poco probable que se hayan presentado previamente de esa manera. Esta característica, además de la de ser tareas de final abierto y de una exigencia cognitiva alta, nos permiten concluir que, en el contexto del curso, constituyen tareas desafiantes.

Estas tareas promueven un aprendizaje sólido (Sullivan, 2007), ya que los estudiantes conectan ideas entre sí, determinan sus propias estrategias de resolución en vez de seguir las instrucciones previamente presentadas en clase y reflexionan sobre los contenidos involucrados.

En síntesis, transformamos tareas de bajo nivel de complejidad en tareas de alto nivel de complejidad, mediante pequeños cambios. Esto genera, a nuestro entender, un mayor aprovechamiento del tiempo de clase y puede redundar en mejores aprendizajes por parte de los estudiantes.

Para finalizar se puede preguntar a los estudiantes sobre la experiencia. Por ejemplo, una opción es solicitar a los estudiantes que reflexionen acerca del potencial de trabajar con este tipo de tareas en la enseñanza media. Así, se podrían intercambiar ideas y enriquecer la discusión, produciendo un vínculo entre las matemáticas y su enseñanza. Consideramos que es una manera de generar vínculos entre las asignaturas de matemática y de enseñanza al discutir sobre las herramientas utilizadas en la clase.

Capítulo 7
Conclusiones

En este trabajo desarrollamos estrategias didácticas para transformar tareas de uso corriente en el aula en tareas de final abierto y aportar al diseño de tareas de los cursos de matemática de la formación de profesores.

Escogimos un práctico de la asignatura Geometría y Álgebra Lineal de un instituto de formación docente para clasificar las tareas propuestas en función de la cantidad de respuestas que admiten y de la exigencia cognitiva que demandan, y analizamos su potencial. Luego elegimos dos tareas de ese práctico para transformarlas en tareas de final abierto y analizamos el potencial para el aprendizaje.

Del análisis del práctico surge que los ejercicios que se proponen a los estudiantes, en su mayoría, no son de final abierto, a excepción de las últimas partes de los ejercicios 7 y 8. A su vez, el práctico presenta tareas de memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión y tareas de hacer matemáticas. Apenas tres partes (7i, 7ii y 8iii) podrían ser consideradas tareas de hacer matemática. En suma, el nivel de exigencia cognitiva del práctico es de nivel medio bajo. Y solo una parte, la 8i, la podemos considerar como tarea desafiante.

Podemos apreciar que un mismo ejercicio puede ser incluido en más de una categoría, ya sea por la forma en que está planteado o porque reitera procedimientos en sus distintas partes.

En este trabajo ilustramos cómo es posible modificar tareas que utilizamos habitualmente en el aula para transformarlas en otras más potentes. Para ello aplicamos dos de las estrategias propuestas por Zaslavsky (1995) y diseñamos dos tareas de final abierto a partir de dos ejercicios del práctico. Se analizó también su potencial didáctico y la exigencia cognitiva que estas transformaciones conllevan para el aprendizaje.

Consideramos que las tareas modificadas son desafiantes, aunque para lograr su máximo potencial serán necesaria una adecuada intervención del formador y una participación activa de los estudiantes. El formador debe proponer y organizar las tareas para que los estudiantes investiguen y busquen procedimientos y estrategias de resolución, interactúen entre ellos, lleguen a una respuesta (o en este caso a más de una) y construyan el saber.

Este trabajo representa un aporte a los efectos de poner en evidencia que es posible enseñar las materias específicas de la formación de profesores utilizando los aportes de la investigación en el campo de la Matemática Educativa. Estos aportes, como el rediseño de tareas, seguramente impacten, también, en las futuras prácticas de aula de quienes se están formando en la tarea de enseñar matemática en la educación media.

Referencias bibliográficas

Chávez, Y. (2017). Elevar la complejidad de las tareas matemáticas: la evaluación formativa como herramienta formativa. En R. M. Torres (presidente). *XIV Congreso Nacional de Investigación Educación*. México: San Luis Potosi.

Guberman, R. y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 33-56.

Livy, S., Muir, T. y Sullivan, P. (2018). Challenging tasks lead to productive struggles. *Australian Primary Mathematics Classroom, 21*(1), 19-24.

Maldonado, A. (2016). *Las tareas enfocadas en similitudes y diferencias en el aprendizaje de las transformaciones lineales en la formación inicial de formación de profesores de Matemática* (Tesina de diplomatura). CFE- Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Marcelo, C. (1994). Investigaciones sobre prácticas en los últimos años: qué nos aportan para la mejora cualitativa de las prácticas. *Ponencia presentada al III Symposium Internacional sobre Prácticas Escolares*, Poio.

Mesa, V. (2016). *Actividades de generalizar y particularizar como medio para vincular la Matemática avanzada y la Matemática escolar en la formación de profesores de Matemática* (Tesina de diplomatura). CFE – Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Ochoviet, C. (2009). ¿Quiénes serán los futuros formadores? *Actas del II Congreso Nacional e Internacional de Formación Docente* (pp. 41-45). Montevideo: ANEP-CFE.

Ochoviet, C. y Rodríguez, D. (2018). El análisis de las actividades novedosas para enriquecer el conocimiento didáctico del contenido del profesor. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de profesorado, 22*(4), 306-325.

Oktaç, A., García, C., Ramírez, C. (2007). Diseño de Actividades: Ejemplos de Álgebra lineal. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López, C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 315-327). México: Ediciones Díaz de Santos.

Powell, A., Borge, I., Fioriti, G., Kondratieva, M., Koublanova, E. & Sukthankar, N. (2009). Challenging Tasks and Mathematical Learning. In Edward J. Barbeau and Peter J.

Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study* (pp. 133-170). NewYork: Springer.

Ricart, M., Beltrán-Pellicer, P. y Estrada, A. (2019). Actividad Scaffolding en geometría para desarrollar habilidades de argumentación y clasificación en futuros maestros de educación infantil. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 503-512). Valladolid: SEIEM

Russo, J. (2018). The challenges of teaching with challenging tasks: Developing prompts. In G. FitzSimons (Ed.), *Proceedings of the 55th Annual Conference of the Mathematics Association of Victoria* (pp. 91–96). Melbourne, Australia: MAV.

Santaló, L. y colaboradores. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires: Troquel Educación.

Sullivan, P. (2007). *Challenging Mathematical Tasks.* Recuperado de https://www.oup.com.au/__data/assets/pdf_file/0018/105804/CHALLENGING_MATHEMATICAL_TASKS_SAMPLE_CHAPTER_web_secure.pdf

Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A.,Roche, A. y Walker, N. (2015). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 123–140.

Ticknor, C. (2012). Situated learning in an abstract algebra classroom. *Educ Stud Math, 81*, 307-323.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*, 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. B. Jaworski and T. Wood (eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional,* (pp. 93–114). Rotterdam: Sense Publishers.

Anexo

GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA LINEAL

Práctico 3 **Curso 2020**

I.P.A

1) Calcular los siguientes determinantes:

i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

v) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 & 1 \end{vmatrix}$ vi) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ vii) $\begin{vmatrix} 1 & 1-i & -i \\ i & i & 1+i \\ 1 & i-1 & i \end{vmatrix}$ viii) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = 5$, calcular los siguientes determinantes:

i) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & j \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -j \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}$ iv) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2j \end{vmatrix}$

3) Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

i) $\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & -2 \\ x^2 & 4 & 9 & 4 \\ x^3 & 8 & 27 & -8 \end{vmatrix} = 0$

4) Consideramos la matriz $A=\begin{pmatrix}4&4&8&8\\0&1&2&2\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

Hallar el determinante de $A,\ A',\ A^{-1}$ y de $B=\begin{pmatrix}0&0&0&3\\0&0&2&6\\0&1&2&2\\4&4&8&8\end{pmatrix}$.

5) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones con derivadas de todos los órdenes y sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(t)=\begin{vmatrix}f(t)&g(t)\\f'(t)&g'(t)\end{vmatrix}$.

Probar que $\varphi'(t)=\begin{vmatrix}f(t)&g(t)\\f''(t)&g''(t)\end{vmatrix}$.

6) Sean $b_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $c_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $c_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones derivables y sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(t)=\begin{vmatrix}b_1(t)&c_1(t)\\b_2(t)&c_2(t)\end{vmatrix}$. Llamaremos $B(t)$ y $C(t)$ a sus columnas. Probar que $\varphi'(t)=\det\left(B'(t),C(t)\right)+\det\left(B(t),C'(t)\right)$.

7) i) Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonal. ¿Qué se puede asegurar de su determinante?

ii) Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior (es decir: todas sus entradas situadas por debajo de la diagonal son nulas). ¿Qué se puede asegurar de su determinante?

iii) Probar que: $\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1&1\\1&0&1&\dots&1&1\\1&1&0&\dots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\dots&0&1\\1&1&1&\dots&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$.

8) i) Probar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es antisimétrica y n es impar entonces $\det(A) = 0$.

ii) Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.
Mostrar que el determinante de una matriz nilpotente es cero.

iii) La matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llama *idempotente* si $A^2 = A$.
¿Qué valores puede tener el determinante de una matriz idempotente?
Construir un ejemplo de cada uno de los valores posibles.

9) Se consideran los puntos del plano $A(a,b)$, $B(c,d)$ y C tal que $OACB$ es un paralelogramo, donde O es el origen de coordenadas.

i) Hallar las coordenadas de N, punto de corte de BC con el eje Oy.

ii) Sea M tal que $OAMN$ es paralelogramo. Probar que $OACB$ y $OAMN$ tienen igual área y que ésta es igual al valor absoluto del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.