PONGO LA COMA Y AGREGO UN CERO…
¿Qué esconden los algoritmos convencionales de la Multiplicación y la División?

Prof. Carla Damisa
carladamisa@gmail.com
Institutos Normales de Montevideo- Uruguay

Modalidad: Taller
Nivel educativo: Primaria (6 a 11 años)
Tema: 1. Formación de profesores y maestros
Palabras claves: Algoritmo, operaciones, propiedades, sistema de numeración decimal.
Resumen

Este taller está dirigido a inspectores de educación primaria, profesores de formación docente en el área magisterial, maestras, estudiantes de magisterio.
El objetivo es analizar las propiedades de las operaciones y del sistema de numeración decimal que subyacen al realizar el algoritmo convencional de la multiplicación y de la división.
Al realizar este análisis pretendemos reflexionar sobre el carácter hermético de estos algoritmos, las reglas que los sustentan y poner a discusión si es pertinente que éste sea la puerta de entrada al estudio de las operaciones en la educación primaria.
Se pretende también generar insumos para la reflexión en los colectivos docentes buscando para cambiar la mirada sobre la enseñanza de los algoritmos convencionales.

En la escuela primaria uno de los objetivos a lo largo del ciclo es que los alumnos aprendan a realizar cálculos con lápiz y papel utilizando los algoritmos convencionales entre otros. Estos algoritmos convencionales forman parte del producto cultural de la humanidad, a lo largo de siglos éstos fueron cambiando, evolucionando. Los cambios fueron fruto de hombres y mujeres para facilitar los cálculos según las necesidades de las diferentes épocas hasta llegar a los que conocemos hoy. Ya hace siglos que “son los mismos”.

A continuación proponemos analizar una multiplicación de números Naturales de dos cifras usando el algoritmo convencional.

```
  12
   75
x 25
  375
150
1875
```

Problema 1[1]**:** *Desarrollaremos a continuación los pasos que se suelen seguir para describir el algoritmo de multiplicación convencional:*

1) Multiplicar cada dígito de 75 por 5: 5x5 =25, pongo el 5 y "me llevo" el 2; 5x7 = 35, más 2 es 37.

2) Multiplicar cada dígito del 75 por 2, dejando un lugar libre: 2x5 = 10, pongo el 0 debajo del 7 y "me llevo 1". Luego, 2x7 =14, más 1 que me llevé, 15.

Reflexionar sobre las siguientes preguntas, fundamentando matemáticamente:

i) ¿Por qué se multiplica cada dígito y no el número entero? ¿Es lo mismo?

ii) ¿Qué significa la frase "me llevo 2"?

iii) ¿Por qué se deja un lugar al multiplicar por el segundo dígito?

El objetivo de proponer problemas como este es identificar las propiedades de las operaciones que aparecen en juego al desarrollar este algoritmo convencional de la multiplicación. En este caso, identificar o "ver en juego" la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Asimismo relacionar algunas propiedades con las reglas que rigen nuestro sistema de numeración decimal (SND), como por ejemplo la descomposición aditiva de uno o de los dos factores de forma conveniente. De igual manera poner de manifiesto algunos cálculos que consideramos como repertorio (x10), otras tablas de multiplicar y sumar y las reglas que se construyen en nuestro SND por ser base 10.

Hemos mencionado sintéticamente los elementos que aparecen al usar el algoritmo convencional, sin detenernos demasiado en la descomposición polinómica de los números en juego y las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y la multiplicación. Sin embargo lo analizado nos da pistas para pensar lo complejo que es este algoritmo aunque económico y eficaz.

El problema también nos permite analizar el hermetismo de este algoritmo para multiplicar. Esto significa que las propiedades y relaciones que establecemos, están implícitas, no se traslucen, no se evidencian para el que está ejecutando el algoritmo, sino que subyacen al mismo.

Esta opacidad en el algoritmo convencional deberá ser tenida en cuenta a la hora de considerarlo objeto de enseñanza. Por lo tanto será necesario cargar de significado estos procedimientos para que los alumnos de las escuelas primarias logren construir sentido y que no se torne un mecanismo cerrado, que si se olvida no se puede reconstruir.

Continuaremos con el análisis del **Problema 2:**

Desarrollaremos a continuación los pasos que se suelen seguir para describir el algoritmo convencional de la división:

```
53  / 4
13    13,25
 10
  20
   0
```

1) *"Cinco para cuatro es a uno, pongo el uno, 1 x 4 es 4 al cinco 1. Debajo del 5 pongo el 1 y bajo el 3.*
2) *13 para cuatro es a 3, 3 x 4 es 12 al 13 es 1, pongo el 1 debajo del 3 del 13 y coloco la coma porque "uno no me alcanza para 4" y agrego un 0 al 1.*
3) *10 para cuatro es a 2, 2 x 4 es 8, al 10 es 2, pongo el dos debajo del cero del 10.*
4) *Como 2 no me alcanza para cuatro pongo un 0 y obtengo 20, 20 para 4 es 5, 5 x 4 es 20, al 20 cero. Coloco el 0 debajo del 20 y terminé la división. El cociente es 13, 25".*

Reflexionar sobre las siguientes preguntas, fundamentando matemáticamente:

i) ¿Por qué se divide cada dígito y no el número entero? ¿Es lo mismo?

ii) ¿Qué significa la frase "bajo el 3"?

iii) ¿Qué significa la frase "coloco la coma porque "uno no me alcanza para 4" y agrego un cero al 1"?

iv) ¿Qué valor tiene el 2 debajo del 10? ¿Por qué se transformó en 20? ¿Es lo mismo dividir 2 por 4 que 20 por 4?

De la misma manera que propusimos analizar el algoritmo convencional de la multiplicación pretendemos estudiar el algoritmo convencional de la división con “todo lo que se dice” y se va dando por supuesto.

Obsérvese que las relaciones entre el SND y las operaciones quedan establecidas de hecho en esas frases que vamos usando y que damos por descontadas que “son claras”: “*5 para 4 es 1”*. ¿Dónde está el 5, si tengo 53? ¿A qué nos referimos con eso de 5? ¿5 qué? Si al multiplicar 1 x 4 el resultado es 4 ¿cómo es posible pensar en el 4 para restar debajo del 5 del 53 y ahí poner el 1? Como expresa H. Itzcovich (2007) ¿quién se hace cargo de la contradicción entre hacer esto y lo que los chicos han aprendido del funcionamiento del algoritmo de la resta?

Entre otras cosas este algoritmo de la división deja implícitos los repertorios de cálculo que posee el que lo ejecuta, las relaciones de la operación con el SND y las relaciones entre las operaciones. Por ejemplo para llevar a cabo la ejecución del algoritmo anterior estamos multiplicando y restando para dividir. Como ya lo expresamos anteriormente estamos restando de una “manera diferente[2]” a como se hace habitualmente cuando se pretender restar.

Al ser usuarios de este algoritmo pensamos que este es claro y no nos ponemos a pensar lo que oculta para el que lo está aprendiendo o para nosotros mismos si no nos detenemos a analizarlo y reflexionar sobre él.

Un breve análisis podría ser:

53 : 4 = (50 + 3) : 4, descompusimos aditivamente usando el SND, el 5 no es 5 sino 50 o 5 decenas o 5 dieces.

Cuando realizamos la división 5 para 4 resulta cociente 1, que no es uno sino 10 y un resto que escrituramos debajo del 5 como 1 pero sigue siendo un 10. Observar que nada de esto está escrito en el algoritmo sino que está oculto.

Luego decimos “bajo el 3” y queda “pegado al 1” que ya tenía como resto parcial y ahí aparece el 13, que es lo que va quedando para dividir del 53. Por eso decimos 13 para 4 y da 3 y resto 1, que con el cociente parcial anterior resulta 13 y nos esta quedando 1 como resto. Si estamos trabajando con la división entera, entonces quedaría por ahí.

 ISBN 978-9974-98-432-5

Pero si la situación que generó esa división admite salir del conjunto de los números Naturales o Enteros, según el caso y trabajar con los números Racionales, entonces podemos seguir dividiendo ese resto 1 por 4. En general se expresa que “1 para cuatro no me alcanza, entonces pongo la coma y agrego un cero al 1”, obteniendo en forma escrita un 10. ¿Cómo es posible si tenía 1 : 4 ahora tener 10 : 4? ¿Es lo mismo? ¿Cuál es la diferencia entre ese 1 y ese 10?

Será necesario entonces analizar que al dividir ese 1 por 4 no tendremos unidades enteras lo que lleva a trabajar con “parte de esa unidad”. Como nuestro sistema de numeración es en base 10, la huella de colocar la coma significa que “pasamos” a trabajar con décimos, centésimos, etc.

En este caso en particular ese 1 se transforma en 10 porque pusimos la coma y lo transformamos en décimos sin escribirlo: 1 = $\frac{10}{10}$, nunca se aprecia el 10 de denominador, está por sobreentendido en este algoritmo.

Por lo tanto ahora tiene “algo más de sentido” expresar 10 para 4 es 2. Decimos algo más de sentido porque ese 2 no es 2 sino $\frac{2}{10}$, aunque el denominador tampoco lo marcamos, lo damos por supuesto sin dejar marcas sobre ese 2. Solamente cargaremos el valor de ese 2, “cuanto vale ese 2”, si analizamos que ese 2 como está después de la coma corresponde a los décimos.

Un análisis similar podemos hacer con el 2 del resto parcial al expresar 2 x 4 es 8 al 10, 2. Ese 2 que colocamos debajo del 10 no es un 2 porque ya no era un 10 sino $\frac{10}{10}$ y entonces como $\frac{2}{10} x 4 = \frac{8}{10}$, al hacer la diferencia entre $\frac{10}{10} y \frac{8}{10} es \frac{2}{10}$, lo que solamente escrituramos es el 2 y no los $\frac{2}{10}$. Así podemos completar la ejecución del algoritmo entre la tensión de lo escriturado, lo que decimos y lo que esta subyacente.

¡Qué complejo! ¿Y pretendemos que los alumnos entren por allí al trabajo con la división?

Repensar estas cuestiones es esencial a la hora de la enseñanza de la división. Muchas veces al presentar directamente el algoritmo convencional de la división sin dar espacio para ciertas discusiones se puede llegar a correr el riesgo de quitarle todo el sentido que debe

 ISBN 978-9974-98-432-5

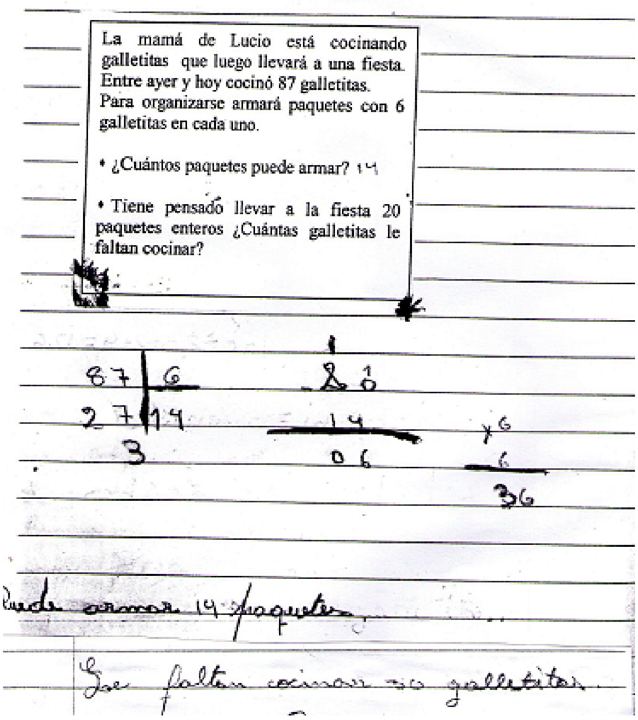
construirse. Podemos llegar a correr el riesgo, y es generalmente lo que sucede, de que se transforme solamente en un conjunto de pasos que se deben seguir y que si se olvidan no sean capaces de reconstruirlos. Quizás esta sea una de las causas de que los estudiantes tengan tantos problemas con el algoritmo convencional de la división.

No estamos planteando no enseñarlo, sino que sería deseable que surgiera a través de un proceso donde se realice un cierto recorrido, donde los alumnos puedan realizar la cuenta de dividir pudiendo argumentar matemáticamente los procedimientos usados a partir de lo que ellos ya saben.

Es así que surgen (no son enseñados), si se da el espacio en el aula, los algoritmos llamados "artesanales" donde cada una de las relaciones entre las operaciones, con el SND, con las propiedades, se evidencia explícitamente.

Para poner en evidencia lo afirmado anteriormente vamos a proponer comparar la resolución de un problema propuesto en un 3er año de escuela primaria en el que interviene una división (modelo matemático).

Problema 3: *i) Analizar las tres formas diferentes de resolver el siguiente problema propuesto en un 3er año de escuela.*


La mamá de Lucio está cocinando galletitas que luego llevará a una fiesta. Entre ayer y hoy cocinó 87 galletitas. Para organizarse armará paquetes con 6 galletitas en cada uno.

• ¿Cuántos paquetes puede armar? 14

• Tiene pensado llevar a la fiesta 20 paquetes enteros ¿Cuántas galletitas le faltan cocinar?

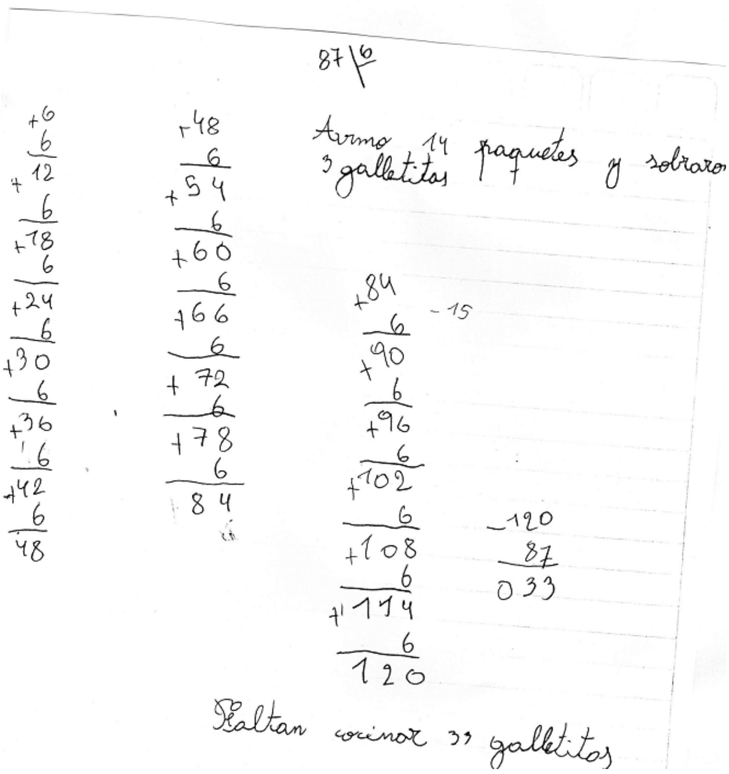
87 | 6
27 | 14
3

armar 14 paquetes

ii) Establecer qué conocimientos matemáticos maneja cada alumno.

Este alumno utiliza el algoritmo convencional para establecer cuántas bolsitas ha podido realizar con las 87 galletitas horneadas. Responde bien la primera pregunta. Podríamos preguntarnos porqué puede establecer correctamente la primera pregunta y no la segunda. Quizás una de las posibles razones es que está acostumbrado a que cuando un problema se resuelve por división la respuesta se encuentra en el cociente y no es necesario atender el resto.

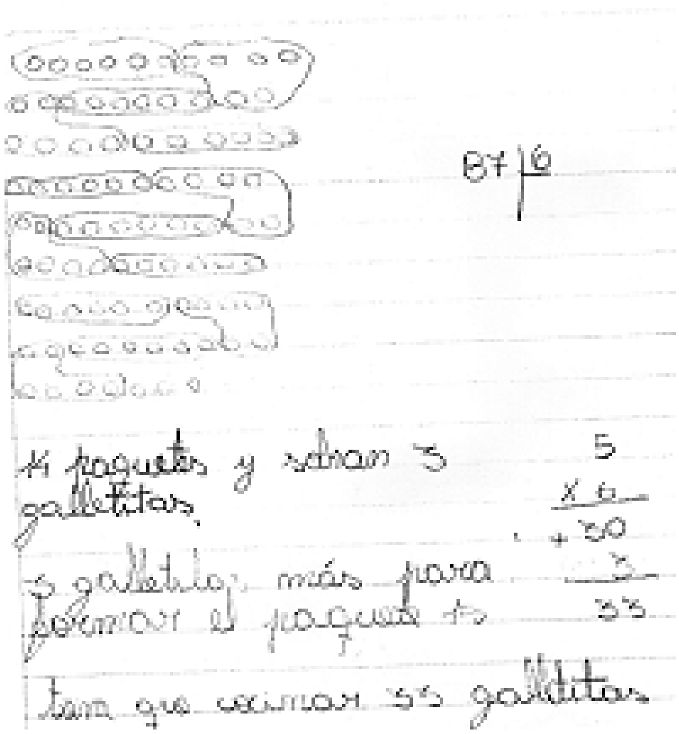
 ISBN 978-9974-98-432-5



En esta producción observamos que el alumno resuelve por sumas sucesivas de 6 (cantidad de galletitas de cada paquete) y controla hasta que llega muy cerca de 87 pero no se pasa de 87.

La cantidad de estas sumas correspondería al cociente de la división de 87 por 6, en este caso 14. En su respuesta explicita la cantidad de galletitas que sobran a diferencia del procedimiento anterior.

Para responder a la segunda parte de la consigna de las 84 a las que ya había llegado. Llega hasta las 120 que serían los 20 paquetitos de 6 (lo hace contando la cantidad de 6 hasta obtener 20) y resta las que ya tenía horneadas a las 120. No se olvida nunca de los referentes del problema. Está usando sumas sucesivas, resta, para encontrar la respuesta a la división 87 por 6.



Las producciones permiten identificar que los alumnos "saben" que el problema se resuelve por una división. Todos identifican la resolución del problema con el modelo matemático: división. Sin embargo no todos utilizan un mismo algoritmo para calcular lo que se pide. Están en juego relaciones con la adición, la multiplicación, con la sustracción. Algunos alumnos estudiaron el resto de la división para poder "saber lo que falta", porque algo sobró.

Estudiar estas producciones hace a la

 ISBN 978-9974-98-432-5

producción matemática y al hacer matemático. Estos alumnos dan cuenta de lo que saben sobre la división y a partir de aquí permitirá al docente establecer relaciones entre los diferentes algoritmos y poder cargar de significado los mismos en relación al convencional.

Hemos querido explicitar que manejar algunos algoritmos convencionales no es sinónimo de saber multiplicar y dividir. Cargarlos de significado es responsabilidad docente. Ejecutarlos adecuadamente es solamente una porción mecánica del saber que es importante pero no exclusiva y que si dejamos de atender el resto de los aspectos encontramos, con suerte, la repetición eficiente pero sin sentido.

Reflexionar sobre estos aspectos y tener claro que dentro de la matemática son necesarios los algoritmos porque simplifican el trabajo, pero que éstos surgen luego de una generalización, de observar pasos invariantes en diferentes formas de resolución, hacen al trabajo matemático en la escuela primaria.

Bibliografía de referencia

- Apostol, Tom (1973) – "Calculus" volumen 1. Barcelona. Editorial Reverté S.A.
- Apostol, Tom (1979) – "Análisis matemático". Barcelona. Editorial Reverté S.A.
- Charlot, B (1986) – Conferencia dictada en Cannes: "La epistemología implícita en las prácticas de la enseñanza de las matemáticas".
- Chevallard, Yves (1991) – "La trasposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado." Buenos Aires. Aique Grupo Editor.
- Itzcovich, h. (coord.) (2007) - "La Matemática escolar". Buenos Aires. Aique Educación.
- Rey Pastor J, Pi Calleja P; Trejo C (1969) – "Análisis Matemático" Tomo 1. Buenos Aires Editorial Kapeluz.
- Sadovsky, P. (2005) en "Enseñar Matemática hoy miradas, sentidos y desafíos". Buenos Aires. Editorial el Zorzal.
- Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (1999)- Documento general de matemática. Prediseño curricular para la Educación Básica.
- Vázquez Nelly, Tapia A, Tapia C (1985) – "Matemática 1". Buenos Aires. Editorial Estrada.

[1] Problema adaptado de "La matemática escolar" de Horacio Itzcovich (2007).
[2] Al expresar "maneras diferentes de restar" queremos decir que a veces uno "pide prestado" para restar y transforma el resto del minuendo, otras veces compensa lo pedido o prestado pero sumándoselo al sustraendo, en otros casos podemos llegar a sobrecontar, es decir hallar la diferencia directamente.

 ISBN 978-9974-98-432-5