Solución numérica de la ecuación de Laplace

Gustavo Segundo[1]

En Física los problemas que involucran la resolución de ecuaciones diferenciales aparecen en casi todas las asignaturas de la especialidad. En muchos casos de interés la solución matemática exacta no puede lograrse. Debemos por tanto enfocar la situación desde otro punto de vista. Los métodos numéricos son una poderosa herramienta para lograr nuestro cometido. En general son sencillos de programar, aunque poseen ciertas dificultades a las que no nos referiremos aquí. Resolver una ecuación diferencial a través de un método numérico significa encontrar el valor aproximado de la función incógnita de la ecuación para un conjunto discreto de valores de la(s) variable(s) independiente(s).

Siempre que he podido he introducido en los cursos que imparto en el *Instituto de Profesores* alguna situación para la cual sea necesario utilizar algún método numérico para su resolución. Esto me permite presentarles a los alumnos algunas técnicas de programación en la computadora. La adquisición de estas herramientas será sin duda extremadamente útil en su futura labor como docente.

En este artículo utilizaremos un *método numérico* para determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace. La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial en derivadas parciales que aparece es diferentes áreas de la Física y la Ingeniería como por ejemplo en Electromagnetismo, la Mecánica de los Fluidos, y la Conducción del Calor. Su solución en una región queda determinada si se conocen ciertas condiciones que la función desconocida debe verificar en la frontera de dicha región.

Introduciremos el tema a partir de una situación electrostática. Consideremos un conjunto de conductores fijos, cargados y relativamente próximos entre sí. Supongamos que el valor del potencial en cada uno de ellos es fijado. Esto último puede parecer un poco artificial, pero puede llevarse a la práctica fácilmente conectando los conductores a baterías o a cualquier otra fuente de voltaje constante. El potencial eléctrico V en los puntos exteriores a los conductores satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$. En coordenadas cartesianas ésta se escribe

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

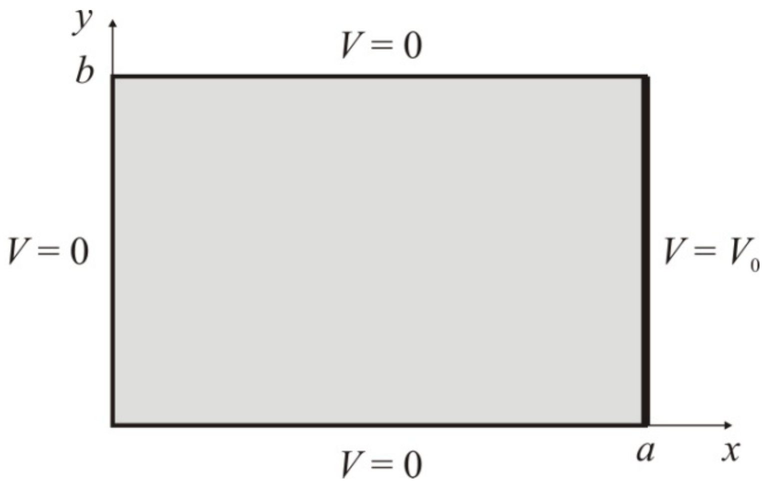
Nuestro problema será encontrar una función V que satisfaga la ecuación de Laplace y las condiciones de contorno especificadas por los voltajes de los conductores.

Trabajaremos concretamente en un problema bidimensional. La ecuación de Laplace se reduce en este caso a

1 Profesora de Física. Docente de Física del Instituto de Profesores "Artigas".

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Consideremos cuatro conductores formando un rectángulo cuyos lados tienen longitudes a y b como se muestra en la figura siguiente.



Los potenciales de los conductores se supondrán fijados a los valores
$V(x, 0) = 0$, $V(x , b) = 0$, $V(0 , y) = 0$, $V(x , a) = V_0$ = constante.

Las baterías que mantienen fijos los potenciales de los conductores no se muestran para simplificar la figura. Evidentemente el conductor vertical derecho con $V = V_0$ debe estar aislado eléctricamente de los demás.

La región rectangular interior $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ será nuestra región de interés. Existen diferentes métodos numéricos para resolver nuestro problema, nosotros utilizaremos el llamado *método de relajación*, el cual está basado en una propiedad de las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace. El valor de la función V en un punto cualquiera (x_0 , y_0) es igual al promedio de los valores de dicha unción en los cuatro puntos $(x_0 + \delta, y_0)$, $(x_0 , y_0 + \delta)$, $(x_0 - \delta, y_0)$ y $(x_0 , y_0 - \delta)$ esto es

$$V(x_0, y_0) = \frac{V(x_0 + \delta, y_0) + V(x_0, y_0 + \delta) + V(x_0 - \delta, y_0) + V(x_0, y_0 - \delta)}{4}$$

La igualdad es válida hasta el tercer orden en δ. Para ver que efectivamente es así desarrollamos V en serie de potencias en cada uno de los cuatro puntos antes mencionados hasta el tercer orden en δ

$$V(x_0 + \delta, y_0) = V(x_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial x}\delta + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\delta^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\delta^3$$

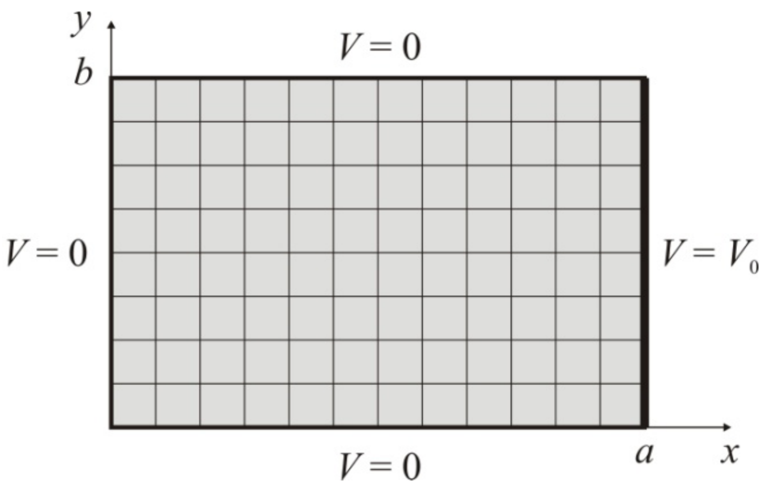
$$V(x_0, y_0 + \delta) = V(x_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial y}\delta + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\delta^3$$

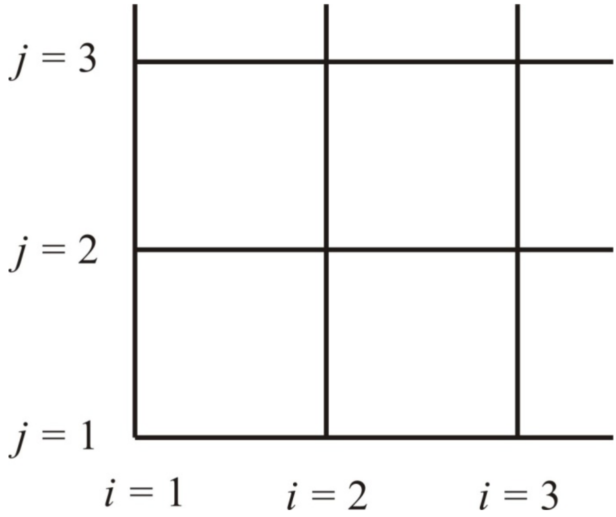
$$V(x_0 - \delta, y_0) = V(x_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial x}(-\delta) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(-\delta)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(-\delta)^3$$

$$V(x_0, y_0 - \delta) = V(x_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial y}(-\delta) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(-\delta)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}(-\delta)^3$$

en donde las derivadas deben evaluarse en el punto (x_0 , y_0). Sumando miembro a miembro estas cuatro igualdades y despejando $V(x_0, y_0)$ se obtiene la propiedad antes mencionada.

Para hallar la solución numérica comenzamos dividiendo la región rectangular con una red constituida por cuadrados.





Cada punto de la red estará identificado por dos índices (i, j) como se muestra en la figura de abajo.

Nosotros implementaremos el programa de computación en MATLAB, que es muy accesible y tiene comandos que permiten graficar las funciones directamente.

Los valores de las coordenadas x e y estarán guardados en matrices xn e yn respectivamente, el índice n es nemotécnico para la palabra *numérico*:

xn(i) = a*(i–1)/M con i = 1, 2, 3, ….. M + 1

yn(j) = b*(j–1)/N con j = 1, 2, 3, ….. N + 1

De esta forma

xn(1) = 0, xn(2) = *a*/M, xn(3) = 2**a*/M ……. xn(M+1)= *a*,

yn(1) = 0, yn(2) = *b*/N, yn(3) = 2**b*/N ……. yn(N+1)= *b*,

Para implementar esto en la computadora simplemente tenemos que hacer dos bucles con el comando FOR

```
for i=1:M+1
 xn(i) = a*(i–1)/M
end
for j = 1:N+1
 yn(j) = b*(j–1)/N
end
```

Los valores del potencial estarán almacenados en una matriz vn(i,j). Imponemos primero los valores de los voltajes en los conductores

```
for i = 1:N+1
vn(i,1)=0
vn(i,N+1)=0
end
for j=1:N+1
vn(1,j)=0
vn(M+1,j)=V0
end
```

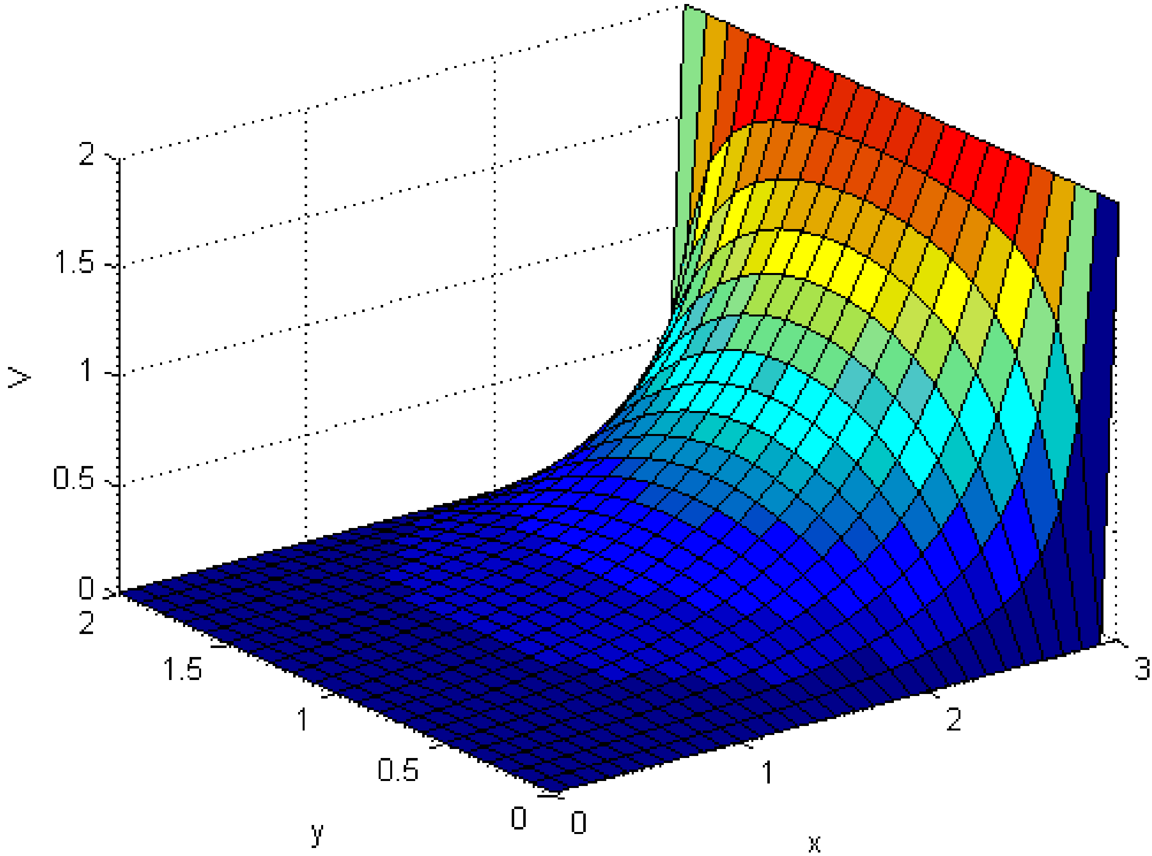
y le asignamos los puntos interiores de la red valores, que en principio pueden ser arbitrarios. Nosotros le asignaremos un valor nulo.

```
for i=2:M
for j=2:N
vn(i,j)=0;
end
end
```

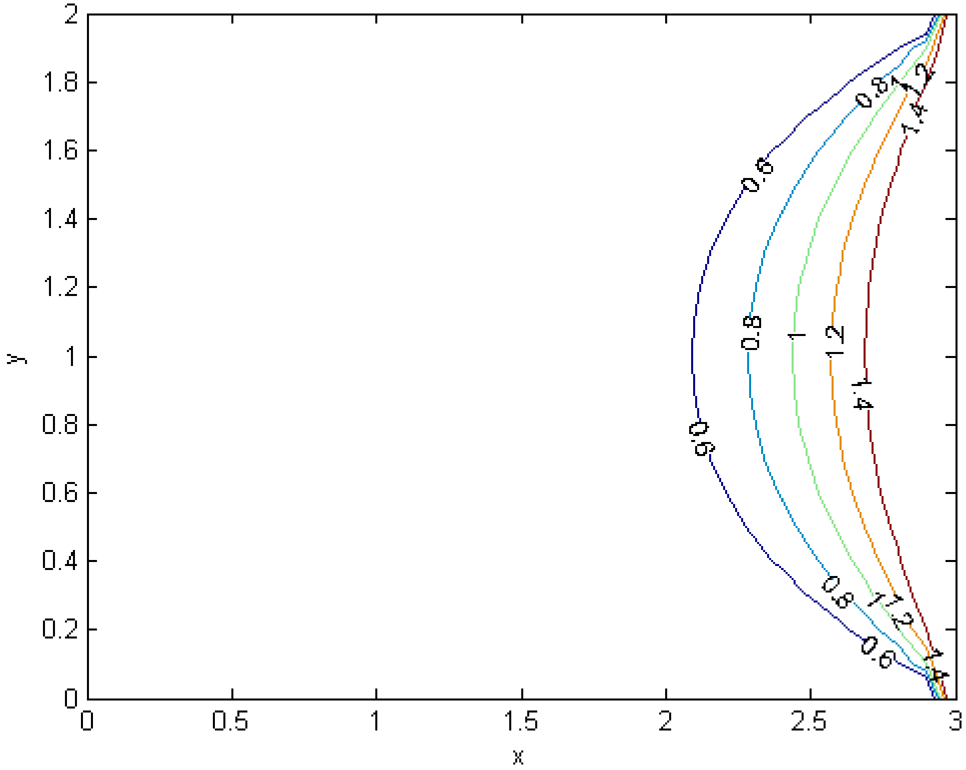
Luego, sistemáticamente reemplazamos el valor encada uno de estos puntos por el promedio de sus cuatro vecinos más próximos. Este último procedimiento se repite hasta que los cambios resultantes en un recorrido y el anterior sean satisfactoriamente pequeños.

```
for k=1:1500
for i=2:M
for j=2:N
vnn(i,j)=(vn(i,j+1)+vn(i-1,j)+vn(i,j-1)+vn(i+1,j))/4;
end
end
for i=2:M
for j=2:N
vn(i,j)=vnn(i,j);
end
end
end
```

Los resultados obtenidos con a = 3, b = 2, y V0 = 2 de los voltajes se muestran en la siguiente figura



Las líneas equipotenciales, también obtenidas en nuestro programa, se muestran en la siguiente figura



Esto se implementa en la forma siguiente
vv = [0.6,0.8,1,1.2,1.4];
[cs,h]=contour(xn,yn,vn,vv);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('V')
clabel(cs,h)
En este caso se puede obtener la solución exacta (que puede obtenerse utilizando el método de Fourier) es

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

Comparando los resultados obtenidos numéricamente y los de la solución matemática exacta anterior encontramos un error menor al 0,6 %.