Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Volumen V

Compiladoras

Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

Uruguay

Estrechando lazos
entre investigación y formación
en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Volumen V

Compiladoras

Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

Uruguay

1ª edición: diciembre de 2018

Diseño de portada: Imprenta Mastergraf

Edición: Verónica Molfino y Cristina Ochoviet

ISBN 978–9974–8577–8–0

Departamento de Matemática

Montevideo, Uruguay

Por sugerencias o comentarios acerca del contenido de esta obra dirigirse a: depdematematica@gmail.com

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Gianni Rodari (2013) afirma que el germen para la creación de una historia proviene de un «binomio fantástico»:

> Para provocar una chispa, no basta un solo polo eléctrico, hacen falta dos. Una palabra sola «actúa» únicamente cuando encuentra otra que la provoca, que la obliga a salir de su camino habitual y a descubrir su capacidad de crear nuevos significados. No hay vida donde no hay lucha. (p. 18)

Este quinto volumen de *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa* ya empieza a contar una historia que da cuenta de que la escritura conjunta de experiencias formativas en torno a la investigación es posible e instala una línea original de trabajo. Nos preguntamos: ¿Cuál habrá sido la chispa que generó cada una de las ideas vertidas en este volumen? ¿Qué palabras habrán dado lugar a estas historias que se concretan hoy en este quinto volumen? Pues creemos identificar la presencia de un «polinomio fantástico» que pudo haber encendido el proceso creativo: formación – investigación – estudiantes – docentes. ¿Y qué es lo que ha permitido tejer esa historia enlazando estas palabras? Pues, una manera de entender cómo la investigación se combina con la formación. Ya no es solo el formador el que escribe sus experiencias o reportes de investigación en la línea de la formación de profesores, sino que son los formadores en conjunto con sus estudiantes, quienes elaboran escritos utilizando la investigación como detonador, ya sea como punto de partida para el diseño didáctico y su experimentación en el aula o para el desarrollo de investigación en matemática educativa, entre otras posibilidades.

Ahora bien, tal como lo señala Rodari, para que la reacción de las dos palabras sea productiva, es necesario que las palabras que forman ese binomio fantástico sean lo suficientemente extrañas entre sí para que puedan originar una historia sorprendente:

> Es necesaria una cierta distancia entre las dos palabras, que una sea suficientemente extraña a la otra, y su unión discretamente insólita, para que la imaginación se ponga en movimiento, buscándoles un parentesco, una situación (fantástica) en que los dos elementos extraños puedan convivir. (p. 19)

Utilizando la metáfora de estos polinomios fantásticos, nos preguntamos: ¿Será tan insólito en el campo de la matemática educativa enlazar la investigación con la formación y a su vez estas con lo producido por estudiantes y formadores? Quizás el adjetivo no debiera ser insólito sino inexplorado y de ahí que hayamos encontrado un campo fértil para la producción en matemática educativa y que estemos festejando un quinto volumen. Al decir de Rodari (2013), cuando las palabras son lanzadas unas contra otras en un ámbito en el que no se habían encontrado previamente es «cuando se hallan en las mejores condiciones para generar una historia» (p. 20).

Este volumen se estructura en tres secciones que organizan maneras de vincular la investigación con la formación. Dos de ellas fueron iniciadas en volúmenes anteriores. En la sección *Diseños de enseñanza* presentamos dos artículos que reportan secuencias didácticas empleando la historia de la matemática como recurso, otro que desarrolla un recurso novedoso empleado para el diseño de tareas: las viñetas conceptuales, y por último un artículo que se centra en el uso de material manipulativo y su relación con el conocimiento matemático que se pretende enseñar. Estos últimos dos trabajos reportan experiencias que se han implementado en clase, por lo que sus autores reflexionan sobre dicha implementación. En la sección *Análisis del Discurso Matemático Escolar* presentamos un ensayo en el que un estudiante de profesorado reflexiona sobre su discurso a la luz de un marco teórico–metodológico específico: el Análisis

Crítico del Discurso. Por último, en la sección *Micro diseños de investigación* presentamos un estudio sobre la comprensión del concepto de variable en estudiantes de segundo año de enseñanza media.

Estos trabajos dan cuenta de cómo el quehacer de la investigación y la formación, de los profesores en formación y formadores, puede estrecharse, bajo ciertas circunstancias, para generar algo nuevo. Es como un velero que por velas porta alas, solo con verlo comenzamos a imaginar nuevas historias.

Diciembre de 2018

GABRIELA BUENDÍA, VERÓNICA MOLFINO, CRISTINA OCHOVIET

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Rodari, G. (2013). *Gramática de la fantasía*. Buenos Aires: Ediciones Colihue.

Sección 1

Diseños de enseñanza

APORTES PARA LA INCORPORACIÓN DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO

LUCÍA BESSONART, ALEJANDRO FERNÁNDEZ, JIMENA LEMES,
CÉSAR ROQUETA, ELENA SÁNCHEZ

Resumen

Presentamos dos secuencias de enseñanza de la matemática para la formación de profesores elaboradas en un curso de posgrado. Pretendemos aportar a la reflexión de cómo y por qué incorporar historia de la matemática en la clase de matemática. Procuramos promover conexiones entre el conocimiento matemático y su contexto de creación. Estas conexiones pueden enriquecer el bagaje cultural de los futuros profesores.

Palabras claves: historia de la matemática, fuentes históricas, educación matemática, abordajes de la historia de la matemática.

Abstract

We present two mathematics teaching sequences for teacher training developed in a postgraduate course. We intend to contribute to the reflection of how and why to incorporate the history of mathematics in the mathematics class. We want to promote connections between mathematical knowledge and its context of creation. These connections can enrich the cultural background of prospective teachers.

Keywords: history of mathematics, historical sources, mathematical education, approaches of the history of mathematics.

PANORAMA INTERNACIONAL DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DOCENTE

A comienzos del siglo XX y en el contexto de las actividades matemáticas coordinadas a nivel internacional, algunos matemáticos como Klein y De Morgan, que se dedicaban a la investigación matemática pero también a la docencia y a la historia de la matemática, y algunos historiadores como Tannery remarcaron la importancia de una componente histórica en la educación (Barbin y Tzanakis, 2014). Ese consenso que existió a comienzos del siglo XX en la comunidad matemática perdió su vigencia por falta de objetivos claros y una metodología específica para la integración de la historia de la matemática (HM) en las clases. Presentamos tres citas para ilustrar el estado actual de esta problemática. La primera la tomamos de una tesis de doctorado en Colombia que analiza la situación latinoamericana:

> […] señalamos la coincidencia de varios autores en reseñar la insuficiencia en los materiales que puedan ser apropiados por los profesores para favorecer el conocimiento histórico relacionado con su ejercicio docente, asunto que ahora reconocemos de manera más precisa como la carencia –o al menos escasez– de materiales que puedan favorecer el estudio de una aproximación histórica específica. (Guacaneme, 2016, p. 276)

En el contexto brasileño:

> En las últimas décadas, la inclusión de asignaturas de historia de las ciencias se ha incrementado en los cursos de formación inicial y continua de profesores, así como en las licenciaturas en ciencias naturales y exactas. Sin embargo, aún no existen materiales especializados orientados a la enseñanza de la historia de las ciencias en la educación superior. (Beltran, Saito y Trindade, 2014, p. 9)

Guillemette, desde el contexto francófono, aporta otro punto importante a la discusión actual, argumentando que es necesario centrarse en las dificultades metodológicas, ya que es en este nivel en el que la investigación es frágil:

> […] hemos señalado debilidades metodológicas en la mayoría de ellas [las investigaciones]. Observamos el uso de una sola herramienta de recopilación de datos que en la mayoría de los casos es insuficiente y muy limitada, la ausencia de triangulaciones de observaciones, la ausencia de una cierta sistematización de la recopilación y comparación de datos y la ausencia de un marco analítico preestablecido y coherente para la lectura e interpretación de los resultados de la investigación. A estos elementos se añade una cierta incoherencia entre las opciones metodológicas y la perspectiva exploratoria del trabajo en cuestión. (Guillemette, 2011, p. 22)

Como se puede percibir, el problema no es solo la falta de materiales sino también el abordaje metodológico.

OBJETIVOS DEL CURSO *HISTORIA DE LA MATEMÁTICA: ABORDAJES PARA LA ENSEÑANZA SUPERIOR*

Frente a este contexto internacional –al que no escapa Uruguay– y con la posibilidad de ofrecer un curso de ocho semanas de historia de la matemática en el Posgrado Diploma en Matemática (ANEP–UDELAR), se decidió elaborar un plan de trabajo que incluyera como objetivos, que el estudiante:

– reconozca las diferentes vertientes de estudio que vinculan la HM con la educación matemática;
– adquiera un panorama general sobre la HM en la formación docente y su problemática internacional;
– discuta con base en publicaciones internacionales diferentes propuestas de clase que integran la HM;
– aprenda a buscar y utilizar diferentes recursos (fuentes históricas, películas, materiales de divulgación, etcétera) para integrar HM en sus clases;
– tenga la experiencia de diseñar una actividad empleando como recurso la HM;
– elabore, intercambie, reformule y replanifique una actividad diseñada desde la HM con el objetivo de ser propuesta en formación docente para la enseñanza de un contenido matemático.

En lo que sigue se presentan dos trabajos que incorporan la HM en el aula, diseñados por estudiantes del curso para ser implementados en formación de profesores de matemática.

Uso de fuentes originales

Las fuentes históricas son un recurso fundamental para dimensionar a la matemática como una ciencia humana. A continuación se desarrolla una propuesta de trabajo basada en el diseño de módulos de Jankvist (2013). Para este autor un módulo es un diseño de clase que se basa en tres componentes en torno a un contenido matemático: Historia, Aplicaciones Modernas y Filosofía (HAPh por su sigla en inglés). Jankvist (2013) sostiene que es importante que los estudiantes se aproximen al conocimiento matemático contextualizado; para eso, el uso de fuentes primarias es fundamental ya que favorece la comprensión de tal contenido en un contexto científico, social e histórico determinado.

Debemos destacar algunas consideraciones que Jankvist (2013) tiene en cuenta al momento de planificar un módulo:

a. Los estudiantes prefieren una HM que no esté demasiado distante en el tiempo de su propia historia y que incluya ejemplos de aplicación de los temas matemáticos en cuestión, preferiblemente en relación con su vida cotidiana (Janckvist, 2009).

b. La necesidad del uso de fuentes originales primarias: ellas juegan un papel central en la propuesta de módulos. Su utilización permite que la matemática se vea como algo más que un cúmulo de conocimientos y técnicas acabadas, permitiendo situar su desarrollo en un contexto científico, social e histórico determinado. Además, las fuentes originales están abiertas a la interpretación, propiciando que los estudiantes realicen reflexiones y desarrollen su visión propia (Jankvist, 2013).

c. La importancia de elaborar materiales didácticos usando fuentes originales primarias. Sus propuestas exigen a los estudiantes realizar un ensayo a partir de preguntas guía, que buscan llevar a trabajar activamente las tres dimensiones consideradas.

Módulo 1: curva de Koch

Presentamos un módulo compuesto por cuatro actividades, que permite desarrollar una planificación en y desde la HM. Para ello, se utilizará la fuente histórica de Helge von Koch, *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes* (1906).

Con este módulo es posible acercar a los estudiantes de profesorado de matemática, en sus primeros años, al trabajo con una fuente primaria ya que permite contextualizar el aprendizaje y este tipo de fuente es más propenso a la interpretación que los libros de texto. Esto ayuda a que los estudiantes realicen reflexiones y desarrollen su propio juicio. Como argumentan Barnett, Lodder y Pengelley (2016), la lectura de la fuente histórica aprovecha el trabajo realizado por el autor y aporta una mayor comprensión del contenido analizado. En este caso particular, la curva de Koch es de por sí una construcción con un fin didáctico, como él mismo lo explica. La lectura guiada y el trabajo en equipo serán el fuerte de la actividad.

Las actividades que se presentan a continuación también permiten realizar un aprendizaje conjunto entre los estudiantes y el docente acerca del contexto en el que Koch realiza su aporte, y sus semejanzas y diferencias con lo planteado por Karl Weierstrass sobre las curvas continuas y no diferenciables en ningún punto. Por otro lado, y sobre todo con la actividad final denominada *tarea global*, también es posible proponer a los estudiantes que realicen, de forma autónoma, una pequeña indagación vinculando aspectos históricos y aplicaciones modernas del concepto matemático nuevo (fractal), que surgirá en la síntesis de la actividad.

El módulo es propuesto para el curso Análisis I del profesorado de matemática (Plan 2008). Emplea como recurso la fuente histórica de Koch (1906), páginas 145, 146, 148 y 149, en las que describe la curva que luego dará lugar al fractal de Koch y al copo de nieve. A continuación presentamos el enunciado y una breve explicación de las actividades.

Actividad 1

> *Leer la introducción que realiza Koch a su artículo Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes (1906).*
>
> *Buscar información sobre Koch y también sobre las afirmaciones de Koch acerca de lo planteado por Weierstrass.*
>
> *¿Consideran que tienen los suficientes conocimientos matemáticos para comprender lo planteado por Weierstrass? ¿Están de acuerdo con el relato que realiza Koch acerca de la no visualización geométrica de la curva propuesta por Weierstrass?*

En esta actividad se pretende que los estudiantes se interioricen sobre lo realizado por Weierstrass y los diferentes niveles de comprensión que conlleva.

Actividad 2

> *Leer la descripción de la curva planteada por Koch (páginas 148 y 149). Explicar por qué podemos intuir que dicha curva no es diferenciable en ningún punto.*

La expectativa en esta actividad es fortalecer la imagen conceptual acerca de funciones continuas no diferenciables en ningún punto. Tanto por lo planteado por Koch (1906) como por la experiencia misma, creemos que cuando pensamos en curvas continuas no diferenciables, las imaginamos diferenciables salvo en algunos puntos. El valor didáctico del artículo en el que se basa la actividad 2 es reconocido por el autor y se relaciona con pensar en contraejemplos sencillos.

Actividad 3

> *Realiza una aproximación del perímetro y del área de la figura planteada por Koch.*

Al realizar esta actividad, es posible que los estudiantes propongan que el perímetro es infinito y el área finita. De ser así se puede deducir el perímetro y llegar a la conclusión de que es una suma infinita, para luego analizar las condiciones que debe cumplir dicha suma para que sea convergente y de esta manera comenzar a trabajar con series.

Actividad 4: Tarea global

> *Buscar la definición de fractal y presentar ejemplos. ¿Qué es la dimensión de un fractal?*
> *Eligir un fractal y calcular su dimensión.*
> *Buscar una aplicación para fractales y explicar lo novedoso de esa aplicación en su contexto.*
> *La tarea es para entregar al finalizar el curso. Puedes consultar con tus docentes de Geometría y Álgebra Lineal o Análisis cualquier duda que tengas. Todo el material que utilices para la tarea debe estar debidamente referenciado. Puedes utilizar libros, videos o cualquier recurso que creas necesario.*

Es interesante plantear una actividad de carácter global que vincule distintas asignaturas del segundo año de profesorado e implique que los estudiantes realicen un trabajo autónomo. Se espera promover así un aprendizaje significativo de un tema específico de matemática.

En el ejemplo de tarea global presentado, una de las posibles aplicaciones de estos fractales está en las telecomunicaciones, también en cálculo de áreas y perímetros terrestres. Otra aplicación podría ser la no cuadratura del círculo planteada por el mismo Koch como un posible tema a trabajar. La propuesta es flexible e invita a aprender junto con los estudiantes. La planificación realizada buscará conectar diversos aspectos del curso de Análisis. Permite relacionar ejemplos geométricos y series, con curvas continuas no diferenciables.

Uso de recursos audiovisuales

El uso de los recursos audiovisuales, como elemento motivador o disparador del trabajo en el aula, es una práctica aceptada entre los profesores. Entre los factores que motivan su uso entre docentes encontramos: la atracción que produce a los estudiantes el uso de películas, la difusión con la que se cuenta y su fácil acceso. El uso de recursos audiovisuales, es una forma de estimular e interesar a los estudiantes. Según Abud (2003), la película crea posibilidades de construcción del conocimiento histórico en el aula pues moviliza operaciones mentales que conducen al estudiante a desarrollar una conciencia histórica, una forma de conciencia humana relacionada inmediatamente con la vida.

Abordaremos aquí el potencial de las películas para el trabajo en HM a partir de Rezende (2008) que propone un marco para utilizar recursos audiovisuales, considerándolos documentos para la historia de las ciencias: «Una importante y promisoria posibilidad de uso de estos acerbos todavía está poco explorada: discutir y enseñar la historia de las ciencias» (p. 1). Para la HM este recurso didáctico es importante porque generalmente los estudiantes desconocen los personajes y contextos en que surgen los conocimientos; esta modalidad les acerca la dimensión humana de la matemática y les permite contrastar la visión idealizada que usualmente tienen de esta disciplina.

Sería un error realizar el análisis de la producción fílmica únicamente como portadora de contenido histórico y aquí cobra importancia el rol docente, en el sentido de que la película debe estar acompañada por una propuesta didáctica que atienda las diferencias:

> […] cabe al profesor discutir con los alumnos cómo son presentadas y reconstruidas las «versiones» de la historia presentes en una película. Cabe también al profesor explicitar bajo qué perspectiva la película va a ser vista y tratada, es decir, dejar claro a partir de qué contexto, perspectivas y presupuestos los alumnos deben verla, de forma de evidenciar que nunca se trabaja con la historia como un todo, sino con recortes y análisis que dependen de los objetivos y de las herramientas del analista. (Rezende, 2008, p. 2)

Rezende propone tres enfoques de trabajo para el estudio de la Historia de las Ciencias a partir de medios audiovisuales, ellos son: historia factual, historia epistemológica e historia arqueológica.

La historia factual entiende la historia con un abordaje cronológico destacando fechas, lugares y bibliografías de personajes y sus trabajos (que han pasado a la historia por ser considerados verídicos). Señala Rezende (2008) que el análisis factual ayuda a la comprensión de la ubicación y el contexto histórico en el que transcurre un determinado hecho científico ayudando a una mejor comprensión de la ciencia. Este enfoque cobra dimensión en conjunción con otras perspectivas de la historia de las ciencias (epistemológica y arqueológica) y amplía la visión del estudiante.

La historia epistemológica propone la evolución científica como un proceso lineal, en el que la ciencia avanza hacia una mayor racionalidad. Tiene carácter normativo, entiende la ciencia como un modelo objetivo y juzga los acontecimientos desde la actualidad. Para el trabajo en el aula, su potencialidad se basa en la confrontación de momentos históricos diferentes. Rezende (2008) afirma que la contribución de esta propuesta es generar una reflexión epistemológica que llame la atención del estudiante sobre el proceso de construcción de la ciencia, contribuyendo a la formación de una imagen de la ciencia que contemple su carácter político–social.

El enfoque arqueológico no parte de la premisa de progreso continuo de la ciencia, ni de que esta evoluciona linealmente: un saber posterior no es necesariamente mejor a uno anterior. Rezende (2008) indica que la historia arqueológica no se preocupa en juzgar la cientificidad de un discurso, ni plantear la cuestión de su racionalidad a partir de la ciencia actual. El arqueólogo intenta reconstruir los hechos en el contexto que ocurrieron, sin caer en anacronismos. El análisis arqueológico de las películas de divulgación científica puede mostrar cómo estas expresan dimensiones sociales de la producción científica que son importantes para comprender la relación de la ciencia con la política, la sociedad y la cultura en que se desarrolla.

Módulo 2: Einstein y Eddington

A continuación desarrollamos un módulo que podría guiar el análisis de la película *Einstein y Eddington* de Philip Martin (2008) desde los tres enfoques planteados. Este módulo ha sido pensado para trabajar en segundo año de Profesorado de Matemática (Plan 2008). Si bien trasciende los objetivos curriculares de los programas de matemática de ese nivel, la propuesta fue pensada para trabajar en coordinación con la asignatura Teoría del Conocimiento y Epistemología, en la que se problematiza sobre el conocimiento científico, los métodos de la ciencia, la objetividad y neutralidad.

Preguntas desde la historia factual

¿Qué motivos llevaron a los científicos y empresarios a atraer a Einstein nuevamente a Alemania? ¿Qué ocurría en la Universidad de

Prusia mientras Einstein desarrollaba su teoría y cuál era su posición al respecto?

Estas preguntas buscan analizar el contexto histórico de la Alemania en la que transcurren los trabajos de Einstein pero no indaga en la construcción científica propiamente dicha ni en las implicaciones que ese contexto pueda tener en la producción científica.

Preguntas desde la historia epistemológica

¿Qué problemas presenta la teoría de Newton que la de Einstein puede solucionar? ¿Cuál consideras que es el hecho más importante para probar la Teoría de la Relatividad?

La primera pregunta se enmarca en la noción de que la ciencia avanza linealmente hacia una mayor racionalidad: compara dos momentos históricos de forma atemporal, sin tener en cuentas las especificidades de cada uno. Se deja entrever además que la teoría de Einstein mejora la de Newton, en sintonía con la noción de evolución lineal. A partir de esta pregunta se puede cotejar el hecho de que Newton incluya a dios en sus justificaciones en contrapartida a las justificaciones que actualmente valida la ciencia moderna. La segunda pregunta pretende destacar el carácter de construcción colectiva de la ciencia, puesto que el trabajo de Eddington es fundamental para solventar la teoría de Einstein.

Preguntas desde la historia antropológica

¿Cuáles eran las principales producciones científicas en la Universidad de Prusia y cómo se posicionó Einstein al respecto? ¿Crees que responden a una misma manera de concebir la ciencia? ¿De qué manera las posturas política e ideológica de Einstein y Eddington frente a la guerra colaboraron en el desarrollo de la Teoría de la Relatividad?

Las preguntas indagan en el contexto social y político en que se desarrolló la Teoría de la Relatividad y su influencia en la producción científica: el trabajo de Einstein carecía de una prueba empírica que probara su veracidad y es la colaboración de Eddington lo que le permite que cobre validez y reconocimiento en la comunidad científica. Sin embargo, por el contexto político, solo la posición ideológica de ellos permitió que esto ocurriera.

El autor concluye su propuesta invitando a combinar dos o más perspectivas, argumentando que cada una posee objetivos diferentes y no es posible jerarquizarlas.

A MODO DE CONCLUSIÓN

¿Por qué HM? ¿Para qué HM? Las respuestas a estas preguntas están directamente relacionadas con la concepción de la matemática que defendemos para la formación de profesores. En Torres, Guacaneme y Arboleda (2014) se reconoce que la HM tiene un potencial formativo al adquirir un rol funcional en tres ámbitos del quehacer del profesor. Un ámbito micro, referido al lugar consciente que le asigna el profesor en sus prácticas; un ámbito meso, que lleva al docente a reorientar y transformar el currículo escolar de matemática, relacionándolo con otras disciplinas y saberes, y uno macro, que permite superar una concepción algorítmica y utilitaria de la matemática, reconociéndola como una forma de razonar, conocer, sentir y crear. Agregamos, una forma de vincularse con el mundo. La HM es una herramienta desde la que trascender una concepción de la matemática puramente técnica, lugar desde el que se la presenta de forma acabada, atemporal e incuestionable; negando así su origen en prácticas sociales. La construcción humana de la disciplina es lo que le da significado y ha permitido su desarrollo en un determinado contexto económico, social y político.

Creemos que la HM como objetivo (Jankvist, 2013) encierra las mayores potencialidades para el aula permitiendo mostrar a la matemática como una ciencia humana, desmitificándola y permitiendo contextualizar el surgimiento de los saberes; también puede ayudar a diseñar caminos para aproximarse al conocimiento y visualizar lazos con otras asignaturas. Entendemos que para utilizar la HM como objetivo es necesario replantearse los contenidos de la educación matemática, buscando evitar la inclusión habitual de la HM como algo superficial, tangencial o anecdótico, proponiendo en contrapartida el uso de fuentes originales y de recursos audiovisuales en el sentido de Rezende.

El trabajo hecho por Koch (1906) surge para dar un ejemplo *visual*, propuesto en esos términos por el propio autor, que busca con esta obra dar una imagen visual de curva continua y no diferenciable que Weiertrass no consiguió (Weiestrass logra demostrar que la continuidad no asegura la diferenciabilidad en un entorno, cosa que se intuía que sucedía, tal como relata Koch en su obra en 1906). Creemos que esto es valioso para la formación de profesores y agrega aún más valor a esta fuente histórica particular. La curva de Koch se constituyó, posteriormente, en parte importante de la geometría fractal, siendo un ejemplo de cómo la educación matemática ejerce un papel protagónico en la actividad matemática. Este hecho reafirma lo señalado por Chevallard, Bosch y Gascón: «todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial» (1997, p. 4) y evidencia cómo la HM juega un rol fundamental en la educación matemática.

Si bien la tarea de incorporar HM en el aula de formación docente más allá de lo puramente anecdótico puede sentirse como algo difícil de implementar, hay propuestas como las de Jankvist (2013), Barnett, Lodder y Pengelley (2016) y Rezende (2008), que proponen herramientas concretas para hacerlo posible. La HM debe constituir una línea fundamental en la formación de profesores y trascender los cursos específicos de HM. Para ello es necesario repensar los modos de hacer en el aula, lo que conlleva formación e investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abud, K. M. (2003). A construção de uma Didática da História: algumas idéias sobre a utilização de filmes no ensino. *História*, *22*(1), 183–193.

Administración Nacional de Educación Pública, Consejo de Formación en Educación. (2008). *Programa de Teoría del Conocimiento y Epistemología– 2do año núcleo de formación común – Plan 2008*. Recuperado de: <http://bit.ly/2RphSax>.

Barbin E. y Tzanakis C. (2014). History of Mathematics and Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics* education (pp. 255–260). Dordrecht: Springer.

Barnett, J. H., Lodder, J. y Pengelley, D. (2016). Teaching and learning mathematics from primary historical sources. *PRIMUS*, *26*(1), 1–18.

Beltran, M., Saito, F. y Trindade, L. (2014). *História da Ciência para formação de professores*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas* (Tesis doctoral no publicada). Universidad del Valle, Colombia.

Guillemette, D. (2011). L'histoire dans l'enseignement des mathématiques: sur la méthodologie de recherche. *Petit x*, *83*, 5–26.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71*(3), 235–261.

Jankvist, U. (2013). History, Applications, and Philosophy in Mathematics Education: HAPh– A Use of Primary Sources. *Science & Education*, *22*(3), 635–656.

Pybus, M. (productor) y Philip M. (director) (2008). *Einstein y Eddington* [Ficción histórica]. Reino Unido: BBC.

Rezende, L. A. (2008). História das ciências no ensino de ciências: contribuições dos recursos audiovisuais. *Ciência em tela*, *1*(2), 1–7.

Torres, L., Guacaneme, E. y Arboleda, L. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, *16*(2), 203–224.

Von Koch, H. (1906). Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta mathematica*, *30*(1), 145–174.

LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL AULA

ENRIQUE VÁZQUEZ, JIMENA LEMES, INÉS MIGLIARO

Resumen

Los esfuerzos por explicitar cómo y por qué integrar la historia de la matemática en la enseñanza continúan vigentes en la comunidad académica internacional. En este trabajo se proponen dos ejemplos de secuencias para incluir historia de la matemática en diferentes cursos de formación de profesores de matemática. Basados en investigaciones, se busca enseñar contenidos matemáticos desde la historia, trascendiendo el uso de esta como herramienta de motivación.

Palabras clave: historia de la matemática, formación de profesores, educación matemática.

Abstract

The efforts to explain how and why to integrate the history of mathematics in education are still valid in the international academic community. In this paper we propose two examples of learning sequences that include the history of mathematics in different mathematics teacher training courses. Based on research, we propose to teach mathematical contents from history, transcending the use of the history as a motivation tool.

Keywords: history of mathematics, teacher training, mathematics education.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta algunas ideas para incluir la historia de la matemática (HM) en las clases de formación de profesores de matemática. Surge en el marco del curso Historia de la matemática: abordajes para la enseñanza superior, del Diploma en Matemática (ANEP – UDELAR).

A partir de la bibliografía sugerida en el curso es posible conocer algunas investigaciones (Baroni, Teixeira y Nobre, 2011; Torres, Guacaneme y Arboleda, 2014; Jankvist, 2009 y 2013) que se centran en la definición del dominio de estudio, aspectos metodológicos y propuestas concretas de integración de la

HM en la clase de matemática. Este dominio de investigación se consolida en el año 2000 (Fauvel y van Maanen, 2002), y se definen allí algunos de los desafíos a trabajar como: las concepciones de los profesores respecto a la inclusión de la HM en el aula, la HM en la formación de profesores, los materiales de apoyo para el profesor, acceso a recursos históricos, la HM en los libros de texto, entre otros. Algunos de estos estudios han sido inspiradores de las propuestas que se realizan en este artículo.

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

¿Por qué incluir HM en el aula de matemática? Varias son las razones: motivación, comprensión, interdisciplinariedad. Jankvist (2013) plantea que la HM puede ser usada como herramienta (para enseñar y para aprender ideas matemáticas, conceptos, teorías, métodos, algoritmos, formas de argumentación y prueba, etcétera) o como objetivo (contribuye a ver a la matemática como una construcción, como un desarrollo humano que depende de lo cultural).

Basado en investigaciones llevadas a cabo en Dinamarca, con estudiantes de educación secundaria, el autor subraya la importancia de abordar un concepto matemático desde la Historia, las Aplicaciones y la Filosofía, propuesta que denomina módulos HAPh (por su sigla en inglés). Según Jankvist (2013), estas tres dimensiones favorecen que el estudiante comprenda el concepto matemático en su contexto de creación (dimensión histórica), que se sienta próximo por medio de las aplicaciones (dimensión de las aplicaciones), y que logre interpretar esa construcción de conocimiento como una construcción colectiva y dependiente de una cultura (dimensión filosófica).

¿Qué lugar y qué papel debería jugar la HM en la formación de profesores? Existe cierto consenso sobre incluirla, pero existen diferencias en el lugar que debe ocupar. Torres, Guacaneme y Arboleda (2014) lo plantean «haciendo uso de la analogía propuesta por Siu y Tzanakis, en los siguientes términos: ¿La HM constituye la *entrada*, el *plato fuerte* o el *postre* en la cena que deguste el futuro profesor de matemática en su formación?» (p. 208). Entendemos que la HM en la formación de profesores debería ocupar un lugar de plato fuerte, entendiendo como tal a la HM como una línea fundamental de formación del conocimiento del profesor de matemática, en un nivel semejante al asignado a la matemática o a la didáctica de la matemática. De hecho, observamos que en la formación de profesores (Plan 2008), existen asignaturas en las que se sugiere una posible integración de una perspectiva histórica: Fundamentos de la Matemática, Didáctica III, Análisis del Discurso Matemático Escolar y Física. Este plan de estudios cuenta además con la asignatura Historia de la Matemática en el último año.

¿Cómo trabajar HM en la formación de profesores? La HM permite dar una visión más humana de la ciencia, contextualizada con la época en que se desarrolla y con las preguntas que las originan. Los problemas surgen de la experiencia y del mundo externo a la matemática, pero el «espíritu humano» los independiza, los combina con la lógica y desarrolla la ciencia; y nuevamente el mundo exterior se hace sentir y propone nuevas interrogantes. En la creación hay un continuo intercambio entre teoría y práctica. Los porqués y los cómos están íntimamente ligados, tal como lo plantea Jankvist (2013). Para atender el cómo, el autor propone un trabajo en módulos, basado en la lectura guiada a través de preguntas de tres fuentes primarias (una de cada dimensión HAPh) y la posterior elaboración de ensayos por parte de los estudiantes. El autor entiende que la conciencia de los estudiantes sobre la naturaleza de la matemática no se desarrolla por sí misma sino que debe ser «fertilizada». Hay que aportar ejemplos concretos y ofrecer un escenario adecuado para que pueda llevarse a cabo.

¿Qué materiales utilizar? Entre los recursos a utilizar destacamos las fuentes originales y los audiovisuales. Barnett, Lodder y Pengelley (2016) plantean que la utilización de fuentes primarias constituye muchas veces un factor importante de motivación y puede ser utilizada en diferentes niveles de la formación en matemática. Para los autores las fuentes primarias posibilitan una mirada de la matemática ubicada en un contexto y tiempo histórico que permite su evolución; a partir de ellas los estudiantes pueden interpretar y crear sus propios juicios. Una buena selección de fuentes originales puede contribuir a responder el porqué como objetivo y el trabajo en módulos HAPh puede resultar una estrategia adecuada para llevar adelante el cómo. Por otra parte, según Rezende (2008), los recursos audiovisuales pueden ser utilizados para la enseñanza de la historia de las ciencias desde tres perspectivas: factual, epistemológica o arqueológica. Este autor sostiene que el rol del profesor es vital, pues todos los materiales presentan una visión particular de la historia –la del autor– pero es el profesor quien debe reflexionar con los estudiantes sobre las diferentes perspectivas y los contextos históricos.

PROPUESTAS PARA TRABAJAR HM EN EL AULA DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Módulo 1: Elementos y las geometrías no euclídeas

Esta propuesta es diseñada para ser abordada en el curso de Geometría de primer año del profesorado de matemática en Uruguay. Emplea como recursos dos fuentes históricas: el libro 1 de *Elementos* de Euclides (300 a. C.), *Crítica de la razón pura* de Kant (1781) y un video de Sáenz de Cabezón (2005).

Elementos de Euclides es sin duda una de las obras más importantes en la HM, pese a su antigüedad. Su interés no es únicamente histórico. Su influencia perdura y es referencia al discutir el origen de conceptos geométricos, la teoría de números, cuestiones de axiomatización. Por otra parte, proponemos una reflexión sobre el estatus filosófico de las geometrías no euclidianas en relación con la filosofía idealista de Immanuel Kant, a través de la lectura de algunos fragmentos de *Crítica de la razón pura.*

Consideramos que estas fuentes pueden presentar ciertas dificultades para el acercamiento por parte de los estudiantes, por lo que es importante que la propuesta sea acompañada por el docente. En relación al libro *Elementos*, las dificultades podrían radicar en el léxico anticuado, en la redacción poco clara y su particular estilo en el que se enuncia y justifica pero no se explica, también en la tipografía antigua. En relación a *Crítica de la razón pura*, podrían consistir en el lenguaje filosófico específico; las diferencias entre los juicios analíticos y los sintéticos en la filosofía kantiana.

Este módulo tiene como objetivos, por un lado, que los estudiantes comprendan la organización de *Elementos*, diferenciando entre los términos definición, proposiciones, lemas, postulados y nociones comunes; por otro lado, busca reflexionar sobre el alcance filosófico de las geometrías no euclidianas, en relación con la concepción apriorística del espacio planteada por Kant.

Para lograr esos objetivos el módulo aborda la noción de paralelismo presentada por Euclides y propone analizar las proposiciones del Libro I de *Elementos* en las que se aplica el postulado de las paralelas por primera vez en el texto (27 y 29). A continuación plantea una discusión en torno a la proposición 32 del Libro I, sobre la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, uno de los problemas históricos motivador del desarrollo de las geometrías no euclidianas. El postulado de las paralelas ha sido germinador de ideas originales. Se espera que una mirada global a la historia del postulado y su discusión permita pensar acerca de la construcción de la matemática como campo científico particular. Se ha decidido un acercamiento a la filosofía kantiana debido a su concepción apriorística del espacio, como intuición pura, considerada como argumento en contra de las geometrías no euclidianas. De acuerdo con Jankvist (2013) se culmina el módulo con un ensayo escrito, como medio propicio para motivar reflexiones metamatemáticas, como el vínculo entre la realidad empírica y los conceptos matemáticos.

Se espera que los futuros profesores incorporen desde el inicio de su formación específica una perspectiva histórica de la matemática. Se busca motivar en el estudiante el asombro y la curiosidad, que la investigación forme parte activa del discurso a través de una construcción personal de este, permitiendo que reflexione sobre visiones acabadas o dogmáticas de la matemática.

Presentamos a continuación el enunciado de cada componente del módulo.

Parte I

1) Realiza la lectura del Libro 1 de Elementos de Euclides. Puedes recuperarlo del siguiente enlace: <http://bit.ly/2AfdroI>.

2) Transcribe tres definiciones. ¿Son nuevas para ti? ¿Te resultaron claras? ¿Son precisas?

3) ¿Por qué piensas que Euclides introdujo antes que nada definiciones? ¿Qué sentido crees que le atribuye Euclides a las definiciones?

4) Los postulados y las nociones comunes (o axiomas) son dos series de propiedades de los objetos matemáticos que se aceptan sin discusión. ¿Qué diferencias observas entre estas afirmaciones?

5) Enumera los cinco postulados incluidos en Elementos. ¿Qué observas?

6) Considera las proposiciones 27 y 29 del Libro I:

27. Si un segmento al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.

29. Una recta que corta a otras dos rectas paralelas hace que los ángulos alternos iguales, los ángulos externos iguales a los interiores y opuestos, y la suma de los ángulos internos por el mismo lado iguales a dos rectos.

¿Qué relación existe entre estas dos proposiciones? ¿Qué vínculo observas entre la Proposición 29 y el quinto postulado? Demuestra las proposiciones 27 y 29.

Parte II

Te proponemos el visionado de Los postulados de Euclides de Eduardo Sáenz de Cabezón (https://youtu.be/EPV-7cj8Ej8).

1) Reelabora el quinto postulado de las paralelas en su forma actual. ¿Qué formas de negarlo presenta el video?

2) ¿Qué postulado contrario al de las paralelas sirve de base para la geometría hiperbólica y cuál para la geometría esférica?

3) El matemático alemán Gauss (1777–1855) fue uno de los pioneros en trabajar sobre la independencia del quinto postulado. Cuenta en su diario que para corroborar si sus reflexiones estaban de acuerdo con la experiencia, midió el triángulo Hohenhagen–Brocken–Inselsberg, formado por las tres cimas de estas montañas, cuyos lados miden 69, 85 y 107 kilómetros, hallando una diferencia muy pequeña entre la suma de las medidas de los ángulos de este y dos rectos. Conjetura a qué se pudo deber la diferencia.

4) La proposición 32 de Elementos, en lenguaje actual se formula: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. ¿Qué sucede con esta proposición en las geometrías no euclidianas?

Parte III

El siguiente fragmento fue extraído del libro Crítica de la razón pura de 1781 del filósofo Immanuel Kant:

> *La Geometría es una ciencia que determina las propiedades del espacio sintéticamente y, sin embargo, a priori. ¿Qué tiene que ser pues la representación del espacio para que sea posible semejante conocimiento de él? Tiene que ser originariamente intuición, porque de un mero concepto no se pueden sacar proposiciones que vayan más allá del concepto. Esto es, sin embargo, lo que ocurre en la Geometría. Pero esa intuición tiene que hallarse en nosotros a priori, es decir, antes de toda percepción de un objeto y ser, por tanto, intuición pura, no empírica.*
> *Porque las proposiciones geométricas son todas apodícticas, es decir, están unidas con la conciencia de su necesidad, como por ejemplo: el espacio solo tiene tres dimensiones. Ahora bien, semejantes proposiciones no pueden ser juicios empíricos o de experiencia, ni ser deducidas de esos juicios. (Kant, 2007, p. 92)*

Elabora un ensayo de extensión máxima una carilla reflexionando sobre la cita anterior y teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

– Explica el significado del enunciado: «La Geometría es una ciencia que determina las propiedades del espacio sintéticamente y, sin embargo, a priori».

– Kant equipara el conocimiento espacial con el de la geometría, piensa en el postulado de las paralelas. ¿Existe una intuición a priori única?

– ¿Las geometrías no euclidianas niegan la euclidiana?

Reflexiona sobre el siguiente enunciado del matemático Julio Rey Pastor: «Ya no cabe hablar de formas a priori, como pretendía Kant, sino simplemente de costumbre engendrada por la educación».

Para mitigar las dificultades que pensamos podrían surgir, antes de plantear esta parte sería conveniente realizar un comentario general acerca de la filosofía kantiana y su relevancia histórica, aclarar las nociones de juicio analítico y sintético en la teoría de Kant, trabajar en grupos reducidos y con posterior puesta en común de las reflexiones generadas en ellos. Para finalizar se solicita a los estudiantes la realización de un ensayo escrito individual para potenciar y profundizar sobre las reflexiones que hayan adquirido en la propuesta.

Módulo 2: Poliedros regulares

Este módulo es diseñado para abordar el contenido *Poliedros Regulares* en el curso Geometría del primer año de profesorado de matemática. Con él se busca generar discusión y reflexión en torno a las características de los poliedros regulares a partir de una aproximación que involucra aspectos históricos y aplicaciones actuales.

La selección de recursos atiende los aspectos HAPh de Jankvist (2013): se propone en primer lugar el visionado de *Cosmos: un viaje personal, Capítulo 7: El espinazo de la noche* (Malone, 1980) en el que se presenta a los poliedros platónicos de acuerdo a la visión del hombre de la antigua Grecia, conjugando las perspectivas factual, epistemológica y arqueológica (Rezende, 2008). Además, se emplea como fuente histórica *Timeo o de la Naturaleza* (Platón, 1872), obra en forma de diálogo entre Sócrates, Critias, Hermócrates y Timeo que se trata de una fuente original de valor filosófico, histórico, epistemológico. Tal como plantean Barnett *et al*. (2016) tiene una auténtica riqueza pedagógica, es un estímulo para el estudiante y constituye un desafío para que interprete activamente la creación. En tercer lugar, el módulo propone la lectura de Extremiana, Hernández y Rivas (2001). Los autores, matemáticos del área de la geometría y la topología, proponen ejemplos en biología, química, arquitectura y matemática, que utilizan formas poliédricas, para describir y predecir propiedades. Aportan elementos que motivan y orientan nuevas búsquedas.

Sobre el artículo los autores dicen: «Aunque solo sea una pequeña muestra, puede servir para ilustrar hasta qué punto los poliedros están próximos a nosotros y siguen siendo unos objetos matemáticos fascinantes sobre los que merece la pena seguir avanzando en su estudio y utilización» (Extremiana, Hernández y Rivas, 2001, p. 28). Por último, se considera González Urbaneja (s. f.), fuente en la que el autor realiza una cita histórica del Libro XIII de *Elementos* en la que Euclides demuestra el teorema de existencia de solo cinco poliedros regulares.

Se espera el logro de un trabajo autónomo por parte de los estudiantes; una profunda reflexión sobre el tema, su historia, su actualidad y la diversidad de materiales existentes. Las preguntas constituyen una guía para identificar en el texto los conceptos matemáticos, el lugar de dios y de la inteligencia en las ideas platónicas, el paradigma científico de los griegos y para comparar esas ideas con las de nuestro tiempo. Se espera que el estudiante se asombre, descubra aspectos que no conocía, busque más información. Se pretende que el futuro profesor viva una experiencia en la que la HM sea sentida no solo como motivación sino como parte del aprender matemática, aspecto que podrá luego tener en cuenta al pensar sus clases.

Parte I

> *Visionado de Cosmos: un viaje personal, Capítulo 7: El espinazo de la noche, desde 34:15 a 38:34 minutos. Responder las siguientes preguntas: ¿Cuál es el planteo de Pitágoras sobre el cosmos? ¿Qué contradicciones existían en su pensamiento? ¿Qué lugar les atribuyeron los griegos a los sólidos regulares? ¿Cómo es posible que existiendo infinitos polígonos regulares solo haya cinco poliedros regulares?*

Al comienzo de la clase se reflexionará sobre la tarea previa y se motivará la próxima actividad.

Parte II

Trabajo en parejas y posterior discusión en plenario. Lectura en profundidad de Platón (1872, pp. 199–208). Interpretar el contenido desde los puntos de vista: antropológico, filosófico y matemático. Se plantearán las preguntas:

a) ¿Cómo interpretas las palabras del discurso de Timeo en los siguientes enunciados?

– «el fuego, el aire, la tierra y el agua son cuerpos; esto es evidente para todo el mundo. Todo lo que tiene la esencia del cuerpo, tiene igualmente profundidad. Todo lo que tiene profundidad, contiene necesariamente en sí la naturaleza de lo plano» (Platón, 1972, p. 200).

– «…Dios, por todos los medios a que se prestó la necesidad, convencida por la inteligencia, arregló y ordenó todas estas cosas con una perfecta exactitud, haciendo que reinaran por todas partes la proporción y la armonía» (Platón, 1871, p. 205).

b) En el discurso de Timeo: ¿Qué lugar ocupan los sólidos elementales? ¿Qué son los triángulos? ¿Cuáles son los triángulos que reconoce? ¿Cómo se vinculan los triángulos con «los cuatro hermosos cuerpos»? ¿Qué dice del quinto sólido? ¿Cuáles son los elementos constitutivos de la naturaleza y cómo ha generado dios la «diversidad infinita»?

Parte III

> *En equipos leer el artículo de Extremiana et al. (2001). Visitar los enlaces web sugeridos. Discutir sobre la actualidad del tema Poliedros.*

Como cierre de la clase se reflexionará sobre lo trabajado. Para la clase siguiente se propondrá la siguiente tarea:

> *Analizar la demostración de Euclides sobre la existencia de cinco y solo cinco sólidos platónicos, citado por González Urbaneja (s. f.). Compararla con la demostración de un texto de geometría actual.*

REFLEXIONES FINALES

En las aulas de matemática el conocimiento se presenta, a menudo, como algo organizado y acabado; sin embargo, no es así como ha surgido. La HM brinda una oportunidad de comprender la evolución del conocimiento, las dificultades que se han presentado y los acuerdos a los que se ha llegado como producto del trabajo de muchos hombres y mujeres a través del tiempo. Conocer y trabajar los contenidos a partir de las fuentes que le dieron origen o a través de material audiovisual favorece una visión de la matemática contextualizada y da cuenta de una creación humana. El curso nos ha permitido reflexionar sobre la importancia de incluir la HM en los diferentes programas del profesorado y nos ha motivado a realizar las propuestas que compartimos en este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnett, J. H., Lodder, J. y Pengelley, D. (2016). Teaching and Learning Mathematics from Primary Historical Sources. *PRIMUS*, 26(1), 1–18.

Baroni, R., Teixeira, M. y Nobre, S. (2011). História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. *BOLEMA*, 25(41), 153–171.

Euclides (300 a. C.). *Elementos*. Recuperado de: <http://bit.ly/2SW1Im4>.

Extremiana, J., Hernández, L. y Rivas, M. (2001). *Poliedros*. Logroño: Departamento de Matemáticas y Computación. Universidad de La Rioja. Recuperado de: <http://bit.ly/2A71xgw>.

Fauvel, J. y van Maanen, J. A. (Eds.). (2002). *History in mathematics education: The ICMI Study* (Vol. 6). Netherlands: Springer.

González Urbaneja, P. M. (s. f.). *Euclides* (El Teorema de los Poliedros en la última Proposición de Elementos de Euclides). Recuperado de: <http://bit.ly/2BrFQHW>.

Jankvist, U. (2009). A Categorization of the "Whys" and "Hows" of Using History in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235–261.

Jankvist, U. (2013). History, Applications, and Philosophy in Mathematics Education: HAPh—A Use of Primary Sources. *Science & Education*, *22*(3), 635–656.

Kant, I. (2007). *Crítica de la razón pura*. Buenos Aires: Ed. Colihue.

Malone, A. (Dir.), Andorfer, G., McCain, R. (Prod.), Sagan, C., Druyan, A., Soter, S. (Creadores) (1980). *Cosmos: un viaje personal. Capítulo 7: El espinazo de la noche*. Recuperado de: <http://bit.ly/2SUGXqE>.

Platón (1872). Timeo o de la Naturaleza. En Patricio de Azcárate (Ed.), *Obras completas de Platón. Tomo* 6 (pp. 129–264). Madrid: Medina y Navarro. Recuperado de: <http://bit.ly/2EAIGON>.

Rezende, L. A. (2008). História das ciências no ensino de ciências: contribuições dos recursos audiovisuais. *Ciência em Tela*, *1*(2), 1–7. Recuperado de: <http://bit.ly/2A6e9Vb>.

Sáenz de Cabezón, E. [Derivando]. (2015, 3 de diciembre). *Los postulados de Euclides*. Recuperado de: <https://youtu.be/EPV-7cj8Ej8>.

Torres, L., Guacaneme, E. y Arboleda, L. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu*, *Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 16*(2), 203–224.

LAS VIÑETAS CONCEPTUALES EN EL AULA DE MATEMÁTICA: UN RECURSO POTENTE PARA ENSEÑAR Y PARA APRENDER

IGNACIO DOLYENKO, DANIELA GONZÁLEZ, LAURA GONZÁLEZ, CRISTINA OCHOVIET

Resumen

En este artículo presentamos las tareas de aprendizaje denominadas viñetas conceptuales, y orientaciones metodológicas para su diseño y uso en el aula de matemática. Reportamos también la potencialidad detectada para el aprendizaje luego de la experimentación en aula con este tipo de tareas.

Palabras clave: viñetas conceptuales, diseño de tareas, aprendizaje de la matemática.

Abstract

In this article we present the learning tasks called concept cartoons, and methodological guidelines for their design and use in the mathematics classroom. We also report the potentiality detected for learning after classroom experimentation with this kind of tasks.

Keywords: concept cartoons, task design, mathematics learning.

INTRODUCCIÓN

Las viñetas conceptuales (en inglés *Concept Cartoons*) son tareas de aprendizaje en las que distintos personajes exponen su opinión acerca de un asunto matemático (Keogh, Dabell y Naylor, 2008). Los estudiantes deben analizar dichas opiniones y luego el docente organiza un debate que enriquece los puntos de vista de los alumnos y permite abordar errores comunes en los temas que se trabajan. A continuación presentamos un ejemplo de una viñeta conceptual que fue diseñada para estudiantes de segundo año de enseñanza media, con el objetivo de ilustrar este tipo de tareas y facilitar la comprensión de lo que se expondrá.

¿Cómo escribir $2x + x(-3 + x)$ sin paréntesis?

¿Qué piensas tú?

El formato de las viñetas conceptuales permite poner de manifiesto las ideas de los estudiantes, que deben exponer los argumentos correspondientes para validar o rechazar lo dicho por los personajes. De esta forma, se proveen «estímulos para la discusión y la argumentación» (Keogh, Dabell y Naylor, 2008, p. 8), lo que contribuye, mediante un adecuado clima de clase, a ir tejiendo un entramado de conversación matemática.

En este trabajo se profundizará en las características de las viñetas conceptuales y sus beneficios sobre los aprendizajes, se presentará el diseño de una viñeta que fue creada para trabajar con estudiantes de tercer año de enseñanza media y se reportarán las reacciones de estos alumnos. Además, se expondrán las reflexiones de lo que esta experiencia de diseño de viñetas y puesta en escena aportó a los profesores en formación que cursaban su práctica docente con grupo a cargo.

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Los artículos que analizamos abordan el uso de las viñetas conceptuales en la enseñanza de la matemática y las ciencias, y los efectos de su uso en la formación de docentes. Presentamos todos los resultados en forma cronológica para ilustrar cómo ha ido evolucionando el desarrollo de la investigación en el campo en torno al uso y diseño de viñetas. Finalmente, posicionamos este trabajo.

Keogh y Naylor (1996) son los creadores de las viñetas conceptuales, y decidieron investigar su uso en la enseñanza de las ciencias en forma sistemática debido a las respuestas positivas que fueron detectando por parte de los estudiantes, y al valor potencial de este material para los profesores. El diseño de las viñetas toma en cuenta los principios de una perspectiva constructivista y puede ser fácilmente incorporado a una clase típica de matemática. Los autores realizaron una evaluación de su uso en la que participaron unos 80 profesores–investigadores a lo largo de distintas instituciones educativas con estudiantes de entre 5 y 18 años, estudiantes con necesidades especiales, y profesores de inglés como segunda lengua, a través de la observación participante y no participante, grabaciones, cuestionarios, retroalimentación oral y escrita, y entrevistas.

Los autores llegaron a la conclusión de que las viñetas conceptuales estimulan la discusión y permiten que se hagan explícitas las ideas de los estudiantes, aún las de aquellos que son reticentes a expresar sus propias opiniones; hacen que muchos estudiantes reestructuren sus ideas, modificando muchas veces lo que inicialmente habían pensado ya que ponen de manifiesto errores frecuentes; promueven la investigación pues esta es desencadenada ante el estímulo de la viñeta; generan motivación y compromiso con la tarea. Además, los estudiantes toman contacto con sus propias ideas y también con puntos de vista alternativos, y dan explicaciones significativas sobre las situaciones planteadas.

Toh (2009) realizó un estudio sobre el uso de cómics y viñetas como herramientas para la enseñanza de la matemática. Concluyó que su uso generó una menor resistencia al aprendizaje de la matemática y motivó a los estudiantes que tienen dificultades para la lectura, haciendo que el lenguaje algebraico se volviera más natural para ellos.

Kabapinar (2009) realizó un estudio sobre la efectividad de distintos tipos de viñetas, en una escuela de Turquía, con estudiantes de entre 10 y 12 años. Concluyó que *nombrar* a los personajes puede mejorar la gestión de la clase. Por otro lado, señaló que es mejor el formato de *hoja de trabajo* –que implica la inclusión de la explicación del enunciado en el que se enmarca la conversación de los estudiantes–, que la simple conversación planteada en forma de póster, sin contexto. Por último, el autor manifiesta que no es necesario incluir el dibujo del contexto en el diseño y que alcanza con los personajes y sus conversaciones, lo que hace mucho más simple su utilización por parte del docente.

Sexton (2010) realizó un estudio sobre los enfoques preferidos por los estudiantes y por los profesores para aprender y enseñar matemática, a través del uso de viñetas con diálogos en las que varios personajes planteaban afirmaciones que podrían considerarse como estereotipos de enfoques conductistas o constructivistas. Se analizaron las preferencias de 75 estudiantes de entre 10 y 13 años de cuatro clases diferentes, teniendo en cuenta las preferencias de sus profesores, y en tres de las cuatro clases, se encontró una brecha epistemológica entre las preferencias del docente y la de los estudiantes, lo que hace confirmar al autor la importancia de conocer las preferencias de los alumnos para aprender matemática. Por otro lado, el autor concluyó que el uso de viñetas permitió a los estudiantes reflexionar sobre sus propias preferencias para aprender matemática, y a los investigadores conocerlas.

Birisci, Metin y Karakas (2010) realizaron una investigación con maestros en el año 2008 para analizar el impacto de las viñetas conceptuales en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de una escuela primaria. El estudio involucró una muestra de 40 docentes noveles de primaria de un centro universitario en Turquía. Se utilizó la recolección de datos por medio de cuestionarios y entrevistas a maestros, investigando de forma cuantitativa y cualitativa. Los datos demostraron que el uso de viñetas conceptuales en el aula ayudó a los maestros a mejorar sus clases, lograron motivar a sus estudiantes y generaron debates en clase. Los alumnos de estos docentes evidenciaron desarrollo del pensamiento crítico, y una actitud positiva hacia el estudio, la escuela y la mejora en los resultados académicos.

Cho (2012), en la misma línea, analizó los resultados generados por el uso de distintas viñetas a lo largo de diez semanas en un grupo de 17 estudiantes de 7° grado. La investigación implicó la realización de cuestionarios y entrevistas, antes y después de haber trabajado con viñetas, y el análisis de las percepciones que tanto los estudiantes como el profesor registraron en diarios que fueron proporcionados con ese fin. A través de este método, y comparando los distintos resultados, se llegó a la conclusión de que el uso de viñetas generó en los estudiantes sentimientos positivos sobre el aprendizaje de la matemática: la mayoría de los estudiantes consideró que «las actividades con viñetas fueron disfrutables, interesantes y divertidas de hacer» (p. 58); por otro lado, dichas actividades les resultaron «valiosas y útiles» (p. 60) y, en tercer lugar, muy pocos manifestaron que trabajar con este tipo de actividad les generara tensiones, frustración o ansiedad y, en cambio, respondieron que con ellas trabajaban más relajadamente. Además, los tres aspectos mostraron diferencias significativas entre las encuestas previas y posteriores al trabajo con viñetas. Por último, dichos resultados también fueron corroborados por el docente, quien planteó que las actividades con viñetas proporcionaron un ambiente de clase positivo, permitieron una nueva forma de enseñanza, combinando lo competitivo y lo cooperativo, y que se dio un mayor aprovechamiento del tiempo de clase.

Davidson y Askew (2012) compararon el aprendizaje significativo y el razonamiento matemático obtenido a partir del uso de mapas conceptuales y de viñetas conceptuales, en estudiantes de educación primaria, para el aprendizaje de decimales y fracciones. En su investigación afirman que el tratamiento de los temas a través de viñetas conceptuales tiene la ventaja de abordar directamente los errores más comunes.

Naylor y Keogh (2013) profundizaron sobre algunas características que se relacionan con el aprendizaje de los estudiantes: por un lado, explicaron el empoderamiento de los estudiantes debido a que el rol de adjudicar juicios a las ideas matemáticas pasa del docente a los estudiantes, que, como consecuencia, pierden el temor a ser juzgados. Por otro lado, plantearon que las viñetas conceptuales permiten la verificación de los conocimientos en la materia.

Además, las viñetas también tienen la cualidad de generar evaluaciones formativas concomitantemente con el aprendizaje.

Hejnova (2013) diseñó una serie de 17 viñetas para enseñar el tema «movimiento y fuerza», que fueron utilizadas por diez profesores con estudiantes de entre 13 y 15 años en la República Checa. Concluyó que su uso contribuyó al abordaje de errores frecuentes, promovió el compromiso y la motivación de los estudiantes, y permitió a los docentes conocer las ideas de los alumnos y las razones que las sustentan.

En síntesis, las viñetas conceptuales demuestran tener alto potencial para el aprendizaje tanto de la matemática como de las ciencias, y también en situaciones en las que los estudiantes poseen dificultades en el manejo del lenguaje. Por su diseño promueven la discusión y permiten que se haga explícito el pensamiento de los alumnos. También ofrecen oportunidades para que los estudiantes reelaboren sus ideas. Son valiosas para los profesores pues permiten abordar los errores más comunes de los alumnos mediante un recurso didáctico concreto, contribuyendo a la superación de estos. En este trabajo consideramos todos estos antecedentes para diseñar viñetas conceptuales, proponerlas en los grupos de práctica, explorar las reacciones de los alumnos de enseñanza media dado que no existen experiencias similares en el medio utilizando este tipo de tareas y analizar qué aporta su uso al profesor en formación que cursa la práctica docente.

ASPECTOS CONCEPTUALES DEL DISEÑO DE VIÑETAS

Según Keogh, Dabell y Naylor (2008), «las viñetas conceptuales son una especie de caricatura, con cierto estilo particular, que presentan un rango de puntos de vista sobre la matemática, que involucran situaciones cotidianas» (p. 7).

Una viñeta conceptual consiste entonces en una situación problemática y una serie de personajes que dan su opinión acerca de la cuestión planteada. Entre esas opiniones, siempre debe haber al menos una respuesta correcta al problema, y todas las respuestas correctas e incorrectas deben tener, en la diagramación, el mismo estatus.

Este formato, por sí mismo, permite:

> hacer explícitas las ideas de los estudiantes, desafiarlas y desarrollarlas, ilustrar puntos de vista alternativos, proveer estímulos para la discusión y la argumentación, promover el pensamiento y el razonamiento, ayudar a los estudiantes a formular sus propias preguntas, generar puntos de partida para la indagación matemática, crear un sentido de propósito para los temas que se van a tratar más adelante, promover el involucramiento y mejorar la motivación, proponer problemas de final abierto, ampliar o consolidar actividades, resumir temas o revisarlos. (Keogh, Dabell y Naylor, 2008, p. 8)

La cantidad de texto utilizada en las viñetas, siempre en forma de diálogo, es mínima, contribuyendo a la comprensión por parte de estudiantes con dificultades para la lectura.

Por otro lado, el formato utilizado plantea situaciones familiares para los estudiantes, haciendo parecer más accesibles los planteos y promueve el compromiso con dichas situaciones.

Al introducir varios personajes, cada uno con su planteo particular, se exponen diversos puntos de vista sobre el concepto matemático en cuestión, que son considerados con un mismo nivel de importancia. La amplitud de miradas planteadas por cada uno de los personajes constituye una ventaja de este recurso en comparación con las actividades más tradicionales, ya que permite problematizar sobre los conceptos trabajados, desafiar las concepciones de los alumnos, e incluir áreas de errores que comúnmente se presentan.

Además, el diálogo que se presenta permite a los alumnos participar naturalmente de la discusión, legitimando la argumentación de los distintos puntos de vista, y haciendo explícitas las ideas de los estudiantes. Estas discusiones, que tienen un enfoque y un contexto definido, colaboran en la gestión de la clase.

Las viñetas conceptuales pueden ser utilizadas en distintos momentos del desarrollo de un tema. Generalmente, se utilizan al inicio de un tema porque estimulan la discusión y permiten identificar áreas que es necesario abordar. También se pueden utilizar durante el desarrollo de una unidad o al final de la misma para consolidar determinados aprendizajes, esclarecer errores frecuentes, y como forma de evaluación.

Respecto a las concepciones erróneas, Keogh, Dabell y Naylor (2008) plantean que estas se mantienen hasta la adultez si nunca son cuestionadas. En este sentido, las viñetas conceptuales aportan en la revisión del conocimiento propio a los estudiantes, y también a los docentes.

El tratamiento de los errores se da en un contexto en el que las ideas incorrectas son atribuidas a los personajes, quitando el peso del error a los estudiantes. Es decir, son tareas de bajo riesgo en el sentido de que los estudiantes no se sienten amenazados pues son los personajes los que pueden o no cometer errores.

La viñeta conceptual favorece un rol más activo del estudiante en la gestión de sus aprendizajes, ya que es él quien debe analizar, comprender, corregir o complementar lo que dice cada personaje. De esta manera, el alumno adquiere mayor responsabilidad sobre el acto educativo. Esto genera mayor motivación en la clase de matemática, pudiendo desencadenar aprendizajes más efectivos. Este proceso aporta a la autonomía del estudiante, así como al compromiso de tener que entender lo expresado por cada uno de sus pares durante la puesta en común.

Los autores señalan que no existe un rango de edad específico para la implementación de viñetas conceptuales. Esto se debe a la versatilidad que presentan, ya que al poderse adecuar a cada tema y en cada nivel educativo, la actividad plantea un desafío para el estudiante, independientemente de la edad que tenga. Aún para estudiantes de edad avanzada o que aparentemente entienden la matemática que se está trabajando, las viñetas conceptuales constituyen un reto pues implican la discusión sobre las afirmaciones que se proponen.

Keogh, Dabell y Naylor (2008) recomiendan la inclusión de un personaje con una burbuja en blanco porque implica el requerimiento de que los estudiantes agreguen algo a lo que ya se dijo. Este aporte será llevado a la discusión colectiva a la hora de la puesta en común. Además, esta burbuja convierte a la viñeta conceptual en una tarea de final abierto.

El abordaje de la viñeta permite hacer explícitas las ideas de los estudiantes pues los personajes plantean opiniones contrapuestas sobre las que se debe tomar postura. En este proceso, surge naturalmente la necesidad de generar argumentos para llegar a formular juicios respecto a los puntos de vista ofrecidos, promoviendo la investigación sobre qué respuestas son válidas y cuáles no, y por qué.

El uso de las viñetas propicia la manifestación pública de las incertidumbres de los estudiantes y de sus convicciones a través de los personajes, sin los riesgos que presenta otro tipo de actividades, permitiendo hacer explícito su conocimiento y sus dudas no solo para el docente, sino para ellos mismos. Mediante el diseño de alternativas equivocadas, se establece desde un comienzo el trabajo con el error. Esto habilita el debate ya que los estudiantes se expresan con más libertad, considerando que ya hubo errores por parte de otros pares.

Esta característica de las viñetas conceptuales hace que la evaluación se lleve a cabo al mismo tiempo que se produce una autoevaluación, y la consecuente reformulación de los conceptos erróneos detectados.

El trabajo con viñetas conceptuales favorece el desarrollo de la conversación matemática en la clase pues es necesario opinar en forma fundamentada sobre cada una de las alternativas propuestas y ordenar la discusión al respecto. Keogh, Dabell, y Naylor (2008) afirman que la propia existencia de estas alternativas genera un conflicto cognitivo que propicia la discusión, ubicando al estudiante en el rol activo de determinar la validez de cada una de ellas.

Chapin y O'Connor (2007) presentan técnicas concretas para que el profesor organice y promueva la conversación productiva en el aula: *revocalizar*, *repetir*, *acordar* o *discrepar*, *agregar*, *tiempo de espera*. Cuando la participación de un alumno no es clara, el profesor puede repetir lo que el estudiante dijo y preguntarle si es correcto, esta técnica se denomina *revocalizar*. Según Chapin y O'Connor esta técnica ayuda al estudiante a clarificar su aporte tanto a nivel de los significados como en el lenguaje que emplea. Asimismo, ayuda a que las ideas presentadas por ese alumno sean comprendidas por el resto de la clase. Las autoras han encontrado que la técnica que consiste en solicitar a un estudiante que *repita* lo que otro ha dicho, promueve el debate. Se hace patente que la discusión no es entre profesor y estudiante, sino entre todos los integrantes del grupo. Demanda que todos los alumnos estén atentos, que intenten comprender y no solo escuchar, permite al docente destacar ideas, entre otras posibilidades. *Acordar* o *discrepar* refiere a preguntarles a los alumnos si están de acuerdo o no, con una idea que ha sido presentada en clase por un estudiante. No solo se les pregunta si están de acuerdo, sino que también deben justificar por qué lo están o por qué no lo están. Chapin y O'Connor señalan que con esta técnica los estudiantes se habitúan a razonar y a no aceptar afirmaciones sin su correspondiente argumentación. La cuarta técnica de conversación que sugieren las autoras se denomina *agregar*. Afirman que permite sostener el debate académicamente productivo al solicitarles a los estudiantes si desean agregar algo a lo que ya se ha dicho. *Tiempo de espera* refiere a que los profesores deben dar más tiempo para que los alumnos piensen y respondan. Las autoras señalan que los docentes se sienten incómodos con más de tres segundos de silencio, pero para pensar se necesita tiempo. Es un derecho del alumno disponer de tiempo para pensar.

Nosotros encontramos que el uso de viñetas puede relacionarse con las técnicas sugeridas por Chapin y O'Connor (2007) para promover el debate académicamente productivo pues el hecho de conversar acerca de las opiniones de los personajes trae implícita la utilización de todas las técnicas. Por un lado, la *repetición* de las afirmaciones de los personajes es imprescindible para poder tomar postura sobre ellas. En segundo lugar, la consigna planteada implica la utilización del razonamiento de un estudiante–personaje, el intento de comprender dicho razonamiento, la manifestación de *acuerdo* o *desacuerdo* y la explicación del porqué. Respecto a la *revocalización*, se puede utilizar cuando los estudiantes emiten opinión argumentada respecto a alguna de las afirmaciones de los personajes. Por último, la inclusión de una burbuja en blanco implica el requerimiento de que los estudiantes *agreguen* algo a lo que ya se dijo, y ese aporte es llevado a la discusión colectiva a la hora de la puesta en común.

La técnica que siempre es importante considerar es el manejo del *tiempo de espera* del profesor que se hace necesario para que los estudiantes puedan elaborar sus respuestas.

DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI

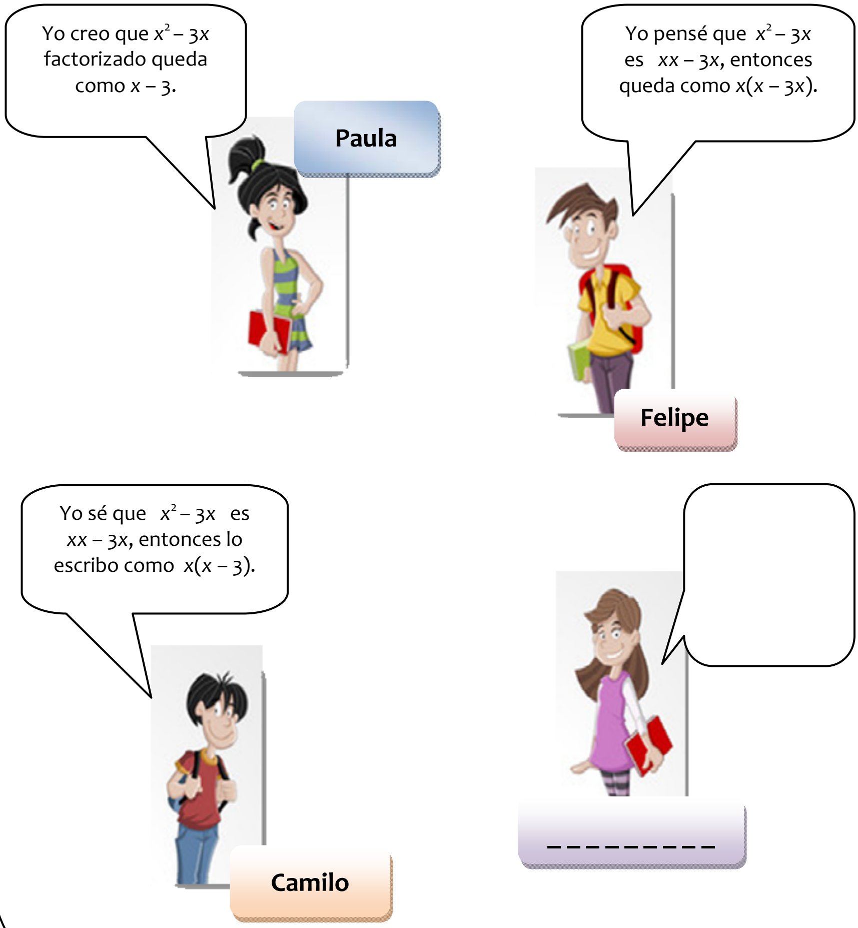
El formato que se utilizó para diseñar una viñeta conceptual toma una estructura propuesta en clase de didáctica a partir de las recomendaciones de Keogh, Dabell y Naylor (2008): se plantea un problema matemático, las opiniones de varios personajes entre las que debe figurar al menos una opinión correcta acerca del tema que se discute, un personaje con la burbuja en blanco y, debajo, la pregunta: ¿Qué piensas tú? Es importante clarificar que esta pregunta no busca solamente que el estudiante identifique cuál es la respuesta correcta del problema planteado, sino que emita opinión acerca de todas las afirmaciones planteadas en la viñeta.

Si bien Keogh, Dabell, y Naylor (2008) utilizan cinco personajes en todos sus diseños (uno con la burbuja en blanco), nosotros decidimos presentar cuatro personajes en total para que en una clase de 45 minutos pudiéramos contar con tiempo suficiente para dar una discusión con mayor profundidad y fluidez.

Para que la viñeta sea de final abierto se incluyó un personaje con su burbuja en blanco; esto genera la necesidad de proponer una opinión (que puede ser correcta o no) acerca de la temática que se está discutiendo.

Otra característica del formato utilizado es que asigna nombres a los personajes con el objetivo de facilitar la puesta en común (Kabapinar, 2009). En el personaje con su burbuja en blanco, se deja en blanco también el contenedor para que el estudiante coloque el nombre. A continuación, presentamos un diseño realizado para un tercer año de enseñanza media.

Factoriza el polinomio $x^2 - 3x$.



¿Qué piensas tú?

En el documento curricular de este curso se plantea la *factorización de polinomios*. La viñeta conceptual propone «Factoriza el polinomio $x^2 - 3x$». Se consideró una consigna concreta, que no deje lugar a dudas acerca de lo que se solicita, enfocando en la característica de texto escueto y claro para el estudiante. El polinomio utilizado se eligió con el fin de que los estudiantes detectaran la presencia de un mismo factor en ambos términos. Se incluyó la presencia de monomios con coeficientes de distinto signo con el fin de enriquecer la actividad y que el alumno dirigiera también la atención al signo de un producto según el signo de los factores.

Para la primera respuesta (Paula) se estableció: «Yo creo que $x^2 - 3x$ factorizado queda como $x - 3$». Esta primera respuesta tiene dos objetivos. Por un lado, se propone una expresión que, en realidad no es un producto de factores y, por lo tanto, el alumno, mediante un rápido análisis, puede señalar que es incorrecta. Por otro lado, se plantea un error frecuente identificado en la práctica que consiste en que los alumnos argumentan diciendo que «sacan una equis a cada término», estableciendo así una pseudo–regla para llevar a cabo la factorización.

Para la segunda respuesta (Felipe) se estableció: «Yo pensé que $x^2 - 3x$ es $xx - 3x$, entonces queda como $x(x - 3x)$». Aquí se intentó aportar mayor argumentación, por parte del personaje, con el fin de provocar una reflexión en el estudiante sobre el proceso de elaboración para dar la respuesta. Es correcto el primer razonamiento pero es incorrecta la respuesta pues falla en el segundo término dentro de los paréntesis. Se espera generar una confrontación con aquellos estudiantes que consideren correcta esta respuesta.

La tercera respuesta (Camilo) es: «Yo sé que $x^2 - 3x$ es $xx - 3x$, entonces lo escribo como $x(x - 3)$». Se trata de mostrar las asociaciones de ideas involucradas en un razonamiento matemático, presentando un breve razonamiento deductivo. Esta respuesta (correcta) busca generar un conflicto en aquellos estudiantes que hubiesen determinado que la respuesta anterior es correcta, para que en forma autónoma busquen encontrar la diferencia y, por lo tanto, la respuesta adecuada para la consigna. Se persigue que los propios estudiantes sean quienes planteen sus propias preguntas e intenten buscar las respuestas para que tomen, así, decisiones matemáticas.

El cuarto personaje se mantiene con su nombre para completar por parte de los estudiantes, de forma de lograr intensificar el proceso de identificación con los protagonistas de la viñeta. La burbuja, en este caso, también se encuentra en blanco, para ser completada por parte de los alumnos. Esto hace que el diseño general de la viñeta conceptual sea de final abierto pues esta burbuja permite que los distintos estudiantes elaboren diferentes respuestas, ya sean correctas o incorrectas, con su correspondiente justificación. Completar esta burbuja requiere mayor imaginación y creatividad por parte de los alumnos si quieren ser originales y no repetir una respuesta ya dada por algún personaje. En este sentido se apela al proceso de construcción de identidad por parte de los estudiantes, quienes buscan diferenciarse de los demás, generando algo nuevo y único.

REACCIONES DE LOS ESTUDIANTES

A la respuesta de Paula

Para este caso, durante la puesta en común se trabajó con la comparación entre la expresión original (a factorizar) y la dada por el personaje. En general, los alumnos llegaron rápidamente a un consenso de que no son la misma expresión, y por lo tanto no es correcta. Uno de los argumentos planteados por los estudiantes fue que no aparecía ninguna expresión como producto, y por ende la expresión no estaba factorizada. No surge lo que se había previsto al diseñar la viñeta, sobre el error de «sacar» una x en ambos términos, y plantear la expresión resultante.

A la respuesta de Felipe

En general, los estudiantes manifestaron que esta respuesta no era correcta y lo fundamentaron afirmando que al aplicar la propiedad distributiva la expresión que se obtiene no coincide con la que se presentaba escrita. Más adelante esto fue incorporado por un estudiante para completar la burbuja en blanco.

A la respuesta de Camilo

Para este caso, durante la puesta en común se trabaja con la escritura xx para x^2. Los estudiantes entienden el proceso desarrollado por el personaje. Se realiza énfasis en la aplicación de la propiedad distributiva, tomando el factor que se repite en ambos términos. Los estudiantes repasan el proceso para poder encontrar un factor común y luego factorizar la expresión. Esto fue lo buscado al diseñar el enunciado de esta burbuja. Más tarde, un estudiante incorpora esta revisión a su burbuja en blanco.

A la burbuja en blanco

En este caso se observaron varias respuestas. La mayoría de los estudiantes escribió la expresión $x(x - 3)$. Se esperaba que los estudiantes completaran esta burbuja con mayor ingenio y creatividad, ya que la respuesta correcta ya estaba dada por un personaje. A continuación, se presentan algunos ejemplos.

Una estudiante incluye en su burbuja un diálogo que, analizado, resume una estrategia utilizada con frecuencia por los alumnos: el tanteo. Ella escribe en la burbuja: «Yo probé con varios y llegué a la conclusión de que es $x(x - 3)$». Este tipo de explicación es lo que hace que esta viñeta sea una tarea de final abierto y, por otro lado, es una de las fortalezas de este tipo de tareas: permiten poner en evidencia las ideas utilizadas por los estudiantes. Para el docente es muy importante, ya que puede detectar los procesos que estos están llevando a cabo.

Otro estudiante completa la burbuja apoyando el proceso realizado por el personaje Camilo, que da la respuesta correcta, además de que expresa que las otras respuestas son incorrectas. Él dice: «He llegado a la conclusión de que Camilo lo hace correctamente y que Franco y Paula se equivocaron». Es importante destacar que este estudiante expresa que ha *llegado* a esa conclusión. Esto es, el estudiante está explicitando que hubo un proceso de razonamiento mediando en sus respuestas. Nuevamente, este tipo de expresiones, que son las que se esperan para la burbuja en blanco, enriquecen las interacciones de los estudiantes con la tarea y aportan datos para que el docente realice evaluaciones sobre los procesos de aprendizaje de los alumnos.

NUESTRA EXPERIENCIA CON VIÑETAS CONCEPTUALES EN EL AULA A LO LARGO DEL CURSO DE PRÁCTICA

En esta sección plantearemos algunas reflexiones generales acerca de lo que fue nuestra experiencia en aula con las viñetas conceptuales.

En el trabajo con las primeras viñetas, los alumnos presentaron dificultades para comprender cuál era la consigna. En nuestra opinión, esto se debió a que esta consigna es distinta a aquellas con las que los estudiantes y los docentes estamos usualmente familiarizados: los estudiantes buscaban identificar la respuesta correcta, pero costaba que se dispusieran a analizar cada razonamiento presentado. Un uso sostenido de este tipo de actividades permitió generar rápidamente una dinámica de clase en la que los estudiantes comprendieron de qué se trataba la tarea, cómo enfocarla y que se abocaran a su abordaje con entusiasmo.

Los artículos analizados plantean una preferencia de los estudiantes por este tipo de tareas. Esto fue confirmado en la práctica. También corroboramos el hecho de que opinar sobre las afirmaciones de los personajes resultó mucho más fluido que generar discusiones sobre las opiniones de los estudiantes y, a su vez, este resultado impactó positivamente en el resto de las discusiones matemáticas llevadas a cabo en la clase.

De la mano de las técnicas aportadas por Chapin y O'Connor (2007), el trabajo con viñetas generó un ambiente muy propicio para las discusiones matemáticas; los estudiantes comenzaron a validar sus argumentos y a discutir con sus compañeros porque la consigna es esa: que opinen sobre las afirmaciones de los personajes.

Nuestra práctica y aprendizaje acerca del uso de esta herramienta, han hecho que las viñetas conceptuales fueran puliéndose en su formulación y que hayan generado mayores y mejores discusiones. Para incentivar la participación de los estudiantes y favorecer el registro escrito de lo que se discute y piensa en una clase, se solicitó a los estudiantes que dieran recomendaciones a cada uno de los personajes. Observamos que esto impactó positivamente en el uso de las viñetas, ya que aportó elementos a la discusión colectiva pues los alumnos trascendían lo incorrecto de una respuesta para pasar a identificar elementos concretos ausentes o equivocados en esta.

El diseño utilizado favoreció que los estudiantes elaboraran comentarios sobre la comprensión de las ideas matemáticas de los personajes y algunos alumnos comenzaron a calificar a los personajes por sus intervenciones. Ahora el foco no estaba en la respuesta correcta o incorrecta de los estudiantes, sino en la de los personajes: no se pide a los alumnos que opinen acerca de las respuestas de sus compañeros o que corrijan respuestas propias. Esto ofreció un ambiente más distendido para que los estudiantes pudieran expresar sus opiniones. Luego de que empezaran a calificar a los personajes, incorporamos un cuadro en el que los estudiantes podían registrar sus calificaciones y comentarios. Esto ofició como registro de las ideas que circularon en el aula.

En este proceso, varios estudiantes que eran reticentes a participar oralmente comenzaron a hacerlo en forma voluntaria, analizando las situaciones, generando opinión sobre los posibles motivos de los personajes y brindándoles creativas sugerencias como «Te faltó verificar antes de responder» o recomendaciones como «Debes estudiar más».

Este proceso exige que los estudiantes reflexionen sobre asuntos conceptuales puntuales, que revisen errores comunes y que vuelvan sobre ideas que ya se han trabajado, siempre haciendo foco en el desarrollo de las habilidades argumentativas.

REFLEXIONES FINALES

Los estudiantes de enseñanza media se comprometieron con las tareas y generaron respuestas originales sobre las afirmaciones de los personajes. Interpretamos las expresiones creativas de los estudiantes, cargadas de su impronta, como una muestra de motivación y compromiso hacia la propuesta de trabajo, pero además, como una muestra de la interiorización de un rol activo en la tarea, que no se trata simplemente de resolver el problema planteado, sino que implica el análisis y la validación de diversas alternativas a una misma situación.

La presentación de este tipo de tarea hace surgir distintas posturas y argumentos que se pueden trabajar ordenadamente en la clase.

La utilización de errores comunes permitió a los estudiantes tomar contacto con sus incertidumbres respecto a los temas trabajados y corregirse. También, en muchos casos, generó una reelaboración de las concepciones erróneas manifestadas por algunos estudiantes.

Las respuestas dadas reflejan la libertad con la que se discuten los puntos de vista de los personajes, sin las inhibiciones que podrían suponer esas mismas consideraciones si se tratara de las opiniones de alguno de sus compañeros o de sí mismos.

Algunas de las sugerencias realizadas a los personajes evidencian un conocimiento sólido sobre los conceptos involucrados. (Por ejemplo, en una viñeta en la que se solicitaba resolver una ecuación, algunos estudiantes recomendaron: «Debes tener en cuenta todas las soluciones», «Te faltó incluir el conjunto solución».)

Diseñar viñetas conceptuales nos ayudó a considerar los intereses y las necesidades de los estudiantes, sus posibles errores, las áreas de conocimiento que es necesario revisar, y los elementos que estimulan las discusiones y el compromiso con la tarea.

Su uso en clase es satisfactorio para los alumnos y para nosotros como docentes, generando una dinámica de discusión matemática manejable, con objetivos claros, y con resultados positivos.

Como plantean Keogh, Dabell y Naylor (2008), las viñetas conceptuales generaron, en muchas oportunidades, cambios de opinión de los estudiantes y son una herramienta muy útil para el tratamiento de errores, pero también para la consideración de distintos puntos de vista.

Por último, consideramos de gran valor el hecho de que, con muy poca práctica, se vuelve muy fácil la elaboración de viñetas que permiten abordar, entre otras cosas, las dificultades que van surgiendo, en un contexto que legitima su aparición. Por ejemplo, si como practicantes detectamos un aspecto en el que hay problemas, contamos con una herramienta didáctica concreta que nos permite focalizar en ese problema con un diseño relativamente sencillo de lograr. Al mismo tiempo, permite que el practicante identifique y capture dificultades de aprendizaje a partir de su práctica. En síntesis, las viñetas constituyen una herramienta metodológica adecuada para tratar un amplio espectro de ideas que percibimos que los estudiantes no han comprendido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Birisci, S., Metin M. y Karakas, M. (2010). Pre–service elementary teachers' views on concept cartoons: a sample from Turkey. *Middle–East Journal of Scientific Research*, 5(2), 91–97.

Chapin, S. H. y O'Connor, C. (2007). Academically productive talk: Supporting students' learning in mathematics. En W. G. Martin y M. E. Strutchens (Eds.), *The learning of mathematics* (pp. 113–128). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Cho, H. (2012). *The Use Cartoons as Teaching a Tool in Middle School Mathematics* (Tesis doctoral no publicada). Columbia University, USA.

Davidson, S. y Askew, M. (2012). *Concept Cartoons as a Way to Elicit Understandings and Encourage Reasoning about Decimals in Year 7.* En J. Dindyal, L. P. Cheng y S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 218–225). Singapore: MERGA.

Hejnova, E. (2013). *Concept Cartoons as a Teaching and Learning Strategy at Primary Schools in the Czech Republic.* Faculty of Science, J. E. Purkinje University, Usti nad Labem, Czech Republic.

Kabapinar, F. (2009). What Makes Concept Cartoons More Effective? Using Research to Inform Practice. *Education and Science*, *34*(154), 104–118.

Keogh, B. y Naylor, S. (1996). *Teaching and learning in science: a new perspective.* Lancaster: British Educational Research Association Conference.

Keogh, B., Dabell J. y Naylor S. (2008). *Concept cartoons in mathematics education*. Great Britain: Millgate House Publishers.

Naylor, S. y Keogh, B. (2013). Concept Cartoons: What Have We Learnt? *Journal of Turkish Science Education*, *10*(1), 3–11.

Sexton, M. (2010). Using Concept Cartoons to Access Student Beliefs about Preferred Approaches to Mathematics Learning and Teaching. En L. Sparrow, B. Kissane y C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 515–522). Fremantle: MERGA.

Toh, T. (2009). *Use of cartoons and comics to teach algebra in mathematics classrooms*. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University.

LOS MATERIALES MANIPULATIVOS COMO APOYO PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA: DOS PROPUESTAS PARA LA CLASE Y UNA REFLEXIÓN SOBRE SU ESTUDIO EN LA FORMACIÓN DOCENTE

ELSA HOURCADE, PABLO MIRANDA, DANIELA PAGÉS, ELIZABETH SCHEGGIATI

Resumen

En este trabajo reflexionamos sobre el uso de materiales manipulativos en la clase de matemática y su relación con el conocimiento matemático que se desea enseñar. Presentamos y analizamos dos ejemplos de materiales concretos seleccionados por estudiantes del profesorado de matemática con el fin de superar dificultades detectadas en sus alumnos de enseñanza media; uno relativo a la adición y la sustracción de números enteros, y el otro a la factorización de expresiones algebraicas.

Palabras clave: materiales manipulativos, operaciones con enteros, factorización de expresiones algebraicas.

Abstract

In this paper we reflect on the use of manipulatives in the mathematics classroom and its relation with the mathematical knowledge we wish to teach. We present and analyze two examples of concrete materials that were selected by mathematics prospective teachers to overcome difficulties detected in secondary school students; one related to addition and subtraction of integer numbers, and the other to factorization of algebraic expressions.

Keywords: manipulatives, operations with integers, factorization of algebraic expressions.

INTRODUCCIÓN

Presentamos un trabajo sobre el uso de materiales manipulativos en el marco de la enseñanza del álgebra en cursos de ciclo básico de enseñanza media. Surge como resultado de una tarea propuesta en el curso de Didáctica III del Profesorado Semipresencial. En esta, los futuros profesores tenían que seleccionar un problema que hubieran encontrado en la enseñanza de determinado conocimiento matemático y, a partir de su descripción, buscar investigaciones que los inspiraran a plantear alguna alternativa a la forma en que habían organizado la enseñanza de dicho tema. En este artículo reflexionamos, en primer lugar, desde la educación matemática, acerca del uso de material concreto. Nos apoyamos particularmente en algunos documentos que analizan la cuestión desde una perspectiva teórico–crítica, en cuanto a la vinculación que es preciso establecer entre el material manipulativo y las relaciones y estructuras en que se basa el conocimiento matemático que pretenden ayudar a comprender (Ball, 1992; Nührenbörger y Steinbring, 2008; Fischbein, 1977). En segundo lugar, presentamos los aportes de dos futuros profesores, Elsa y Pablo, que describen el problema seleccionado, las investigaciones consultadas y una posible reformulación de la enseñanza de dicho tema a partir de ellas. Finalmente, reflexionamos acerca del rol que juega el análisis del uso de material manipulativo para la formación de un futuro docente.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y SUS REPRESENTACIONES. EL PAPEL DE LOS MATERIALES MANIPULATIVOS

Duval (1993) afirma que para comprender los conceptos matemáticos es necesario trabajar con sus representaciones semióticas, ya que estos conceptos no se perciben del mismo modo que los objetos físicos. Las representaciones semióticas son «las producciones constituidas por el empleo de signos pertenecientes a un sistema de representación que tiene sus propias condiciones de significación y funcionamiento» (Duval, 1993, p. 39). Para que las representaciones semióticas funcionen como tales, no deben confundirse con el objeto matemático que representan y este objeto debe poder ser reconocido dentro de la representación semiótica.

Por otra parte, Nührenbörger y Steinbring (2008) analizan el uso de materiales manipulativos desde una perspectiva teórico–crítica, afiliándose a lo planteado por Ball (1992): «Mi principal preocupación sobre la enorme fe en el poder de los materiales manipulativos, en su casi mágica habilidad para explicar, es que pueden llevar a pensar engañosamente que el conocimiento matemático surgirá automáticamente de su uso» (Ball, 1992, p. 18).

Nührenbörger y Steinbring llaman materiales manipulativos a materiales de trabajo y visualización, así como a los diagramas y esquemas visuales que se usan como medio para representar el conocimiento. Desde este punto de vista, estos materiales constituyen representaciones semióticas. Consideran el uso de los materiales manipulativos en el sentido de una herramienta, que no se espera que actúe por sí misma, sino que bien usada genera el resultado esperado. Pero agregan que, para que se constituya en herramienta matemática, debe además estar genéricamente estructurada. Es decir, debe poder interpretarse la estructura que representa de forma que la herramienta pueda usarse como un objeto mental.

Fischbein, ya en 1977, en su artículo *Image and Concept in Learning Mathematics,* advierte sobre la complejidad de las relaciones entre imágenes y conceptos cuando se utilizan modelos intuitivos (como pueden ser los materiales concretos). Estos deberían estar en permanente interacción. Y agrega que el desafío para el docente está en encontrar las mejores formas de lograr esa interacción. Fischbein (1977) afirma que:

> Los modelos concretos no son necesariamente técnicas iniciales en la enseñanza de la matemática. Su uso eficiente depende de su naturaleza y de sus relaciones con los correspondientes conceptos matemáticos… Tales modelos concretos son útiles como auxiliares de enseñanza si tienen cierta eficiencia heurística, esto es, la capacidad de estimular el proceso de razonamiento y de permitir su progreso por sus propios medios. En otras palabras, para ser realmente eficiente, el modelo debe ser generativo. Tal capacidad generativa se basa en: isomorfismo consistente con el original, consistencia interna natural (que es

> equivalente a autonomía en relación con el original) y estructura intrínseca. (p. 164)

Nührenbörger y Steinbring (2008) adjudican un doble rol a los materiales manipulativos en la formación docente. Plantean que, por un lado, los futuros docentes necesitan analizar los materiales concretos y conocer su uso, comprender sus objetivos didácticos, y desarrollar la capacidad de evaluarlos para su propia utilización en la clase, incluyendo el análisis de los procesos de aprendizaje que generan los materiales concretos en los estudiantes. Por otro, los materiales manipulativos son objetos de aprendizaje para los futuros profesores, ya que su uso estimula su propio aprendizaje y los procesos de comprensión, ayudándolos a adquirir un entendimiento fundado de elementos esenciales del conocimiento matemático–didáctico del docente.

Nührenbörger y Steinbring analizan la relación de los materiales concretos con el conocimiento matemático, mediada por quien usa el material (el estudiante o el futuro profesor, para este caso), cuyas interpretaciones realizadas sobre los materiales deben ser la base de nuevo conocimiento matemático.

El siguiente esquema, adaptado del que presentan Nührenbörger y Steinbring (2008) a la relación del futuro profesor y sus estudiantes, representa el doble rol que los autores atribuyen al material concreto.

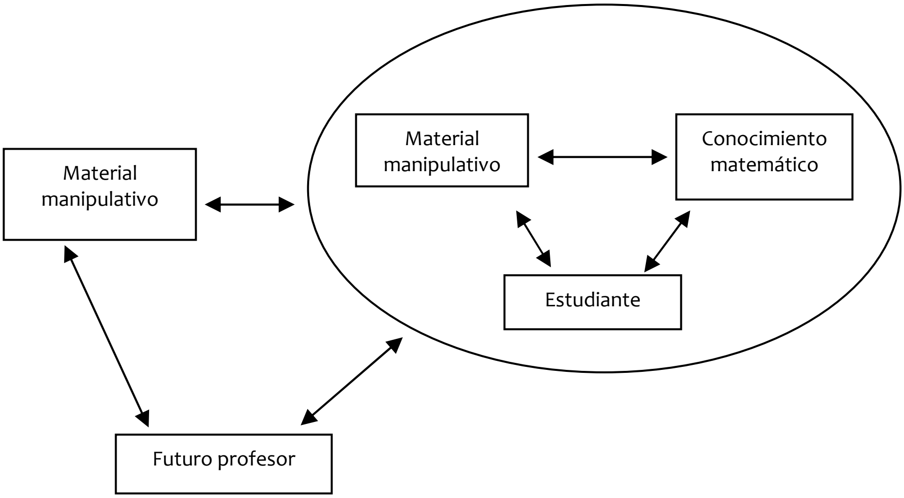


Figura 1. Los materiales manipulativos como un medio epistemológico de aprendizaje para futuros docentes.
Fuente: Adaptado de Nührenbörger y Steinbring (2008).

Los autores consideran que los materiales concretos y el conocimiento matemático están separados entre sí inicialmente, y su relación debe construirse productivamente por las interpretaciones (tanto por parte de los estudiantes como de los futuros docentes), para generar así relaciones y comprensiones matemáticas. Agregan que los materiales concretos son interpretados de diversas maneras por distintos estudiantes. Estos materiales son representaciones simbólicas de relaciones, estructuras y patrones matemáticos, que están contenidos en ellos, por lo que es necesaria una interpretación activa, intercambiada en el contexto discursivo y chequeada su factibilidad. Es decir, el uso deseable de materiales manipulativos supone la promoción del surgimiento y discusión de las distintas interpretaciones en la clase, con el fin de que los estudiantes construyan las relaciones matemáticas representadas por dichos materiales.

En el curso de Didáctica III del profesorado de matemática en modalidad semipresencial se planteó a los estudiantes, como prueba parcial, que describieran un problema detectado en su curso de práctica docente, buscaran investigaciones en las que se abordara esa problemática, y reformularan la planificación a partir de los aportes de los trabajos analizados.

A continuación presentamos los problemas abordados por dos futuros profesores, así como las ideas que ellos tomaron para la reformulación de su planificación, a partir de las investigaciones analizadas.

Operaciones con números enteros

Uno de los futuros profesores, que realizó su práctica en un primer año, detectó serias dificultades en los estudiantes a la hora de realizar adiciones y sustracciones con números enteros. En general, manejaban la prioridad de operaciones al realizar operaciones combinadas, aunque se solían equivocar en la adición y en la sustracción.

Para nuestro trabajo nos basamos en la investigación de Castillo (2014) y la de Hernández y Gallardo (2006). Castillo reporta una investigación en la que estudió la incidencia de la utilización de objetos físicos en los saberes de los alumnos, en relación con el aprendizaje de la adición y la sustracción de números enteros. Para ello, realizó un diagnóstico de un grupo seleccionado, diseñó y desarrolló artefactos (materiales manipulativos tangibles) con los que elaboró una secuencia de actividades que puso en práctica y evaluó posteriormente.

En relación con la extensión de los números naturales a los números enteros, Castillo (2014) afirma que esta no solo amplía el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos. Esto puede generar un obstáculo epistemológico («… aquellos a los que no se puede ni se debe escapar en virtud de su papel constitutivo en el conocimiento en cuestión» (Brousseau, 1976, p. 108)).

Freudenthal (2002) plantea que los números negativos surgen alrededor del año 1500 (si no se tienen en cuenta a sus precursores, como los matemáticos hindúes), pero llevó tres siglos que fueran aceptados, siendo su origen el álgebra de ecuaciones. Este mismo problema condujo al surgimiento de los números imaginarios, contra los que hubo una resistencia de duración similar.

> Los números negativos se habían originado de la necesidad algebraica formal para la validez general de fórmulas de resolución de ecuaciones, pero no fue hasta la algebrización de la geometría (la llamada geometría analítica de los primeros tiempos) que se volvieron efectivos –quiero decir efectivos desde el punto de vista del contenido. (Freudenthal, 2002, p. 433)

Según Freudenthal (2002), los enteros negativos se vuelven operacionales a través de su uso en cálculos que obedecen ciertas leyes, las que son determinadas como extensiones de las propiedades que se verifican en los números naturales.

Hernández y Gallardo (2006) trabajan la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros utilizando el modelo concreto de bloques.

El modelo de bloques es una representación de los números enteros: cada bloque con color representa +1 y cada bloque sin color representa –1; el fundamento de este modelo es su similitud con objetos (bloques) que son familiares para los alumnos o que les pueden resultar más llamativos.

En este modelo de bloques, sumar enteros se representa por agrupar bloques correspondientes a los sumandos positivos y negativos, esto es, bloques con color y sin color. Cada pareja de bloques con color y sin color se convierte en elemento nulo (primer principio fundamental del modelo: se aniquilan).

Los autores señalan que este modelo permitirá a los estudiantes conjeturar, justificar o dar sentido a sus reglas de funcionamiento y, posteriormente, extenderse por analogía al conjunto de los números enteros. Es un modelo de neutralización (o aniquilación) ya que existen entidades opuestas que se neutralizan (aniquilan) entre sí en la adición.

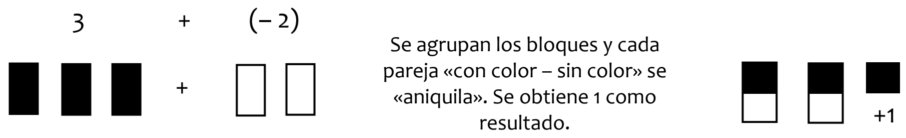


Figura 2. Ejemplo de adición de enteros usando bloques.
Fuente: Elaboración propia.

Para restar se quitan del minuendo las unidades que constituyen el sustraendo, cuando esto es posible, tachando con una cruz los bloques eliminados. Por ejemplo:

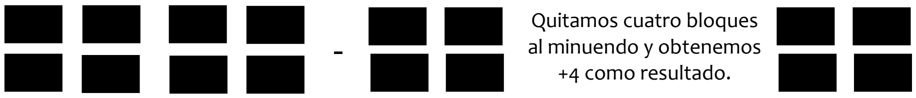


Figura 3. Ejemplo de sustracción usando bloques.
Fuente: Elaboración propia.

Cuando esto no es posible, utilizamos la representación del número a como $a + 1 + (-1)$. Este es el segundo principio que rige a este material. El cero juega un papel dual, como elemento nulo y como elemento compuesto por opuestos. Por ejemplo:

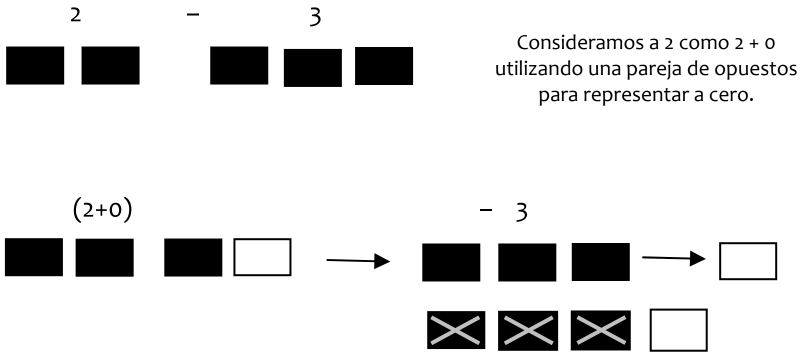


Figura 4. Uso del cero como auxiliar en la resta.
Fuente: Hernández y Gallardo, 2006, p. 79.

Para la reformulación del trabajo en clase se decide elaborar un material manipulativo tangible cuyo objetivo será que los alumnos utilicen elementos manipulables para conceptualizar la adición y la sustracción en Z.

Para el diseño de este dispositivo se tomó en cuenta el modelo de bloques de Hernández y Gallardo (2006). Diseñamos el dispositivo con pompones, en el que los de color rojo representan la unidad negativa mientras que los blancos representan la unidad positiva. Se utilizan pompones plásticos ya que son piezas de un juego de niños que se pueden conseguir fácilmente y por otra parte se quedan unidos, aspecto que lo hace interesante para la aniquilación. Al igual que en el modelo de bloques, una unidad roja y una blanca se neutralizan, esto es, agrupados representan el cero.

Pensamos que este material puede utilizarse inicialmente para representar enteros, así como para visualizar la adición y la sustracción con ellos, interactuando con el registro simbólico.

Encontramos este mismo modelo en Freudenthal (2002), donde es presentado con fichas rojas y negras, para representar las unidades positivas y negativas respectivamente. El autor afirma que la aniquilación (unión de dos fichas de diferente color) permite identificar que los agrupamientos de 7 fichas rojas y 2 negras, 6 rojas y 1 negra, 5 rojas y 0 negra, entre otros, son equivalentes. Esto es, considerar un número entero como un par ordenado de naturales con la relación de equivalencia: $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c$.

Por otra parte, Freudenthal (2002) afirma que este modelo en el que se simplifica por aniquilación o se agregan pares de opuestos cuando no se dispone de las fichas que debemos quitar, recuerda a los artificios de la aritmética de columnas: reemplazar diez unidades por una decena, escribir una decena como diez unidades, agregando que esta similitud no es para nada superficial.

La principal debilidad que Freudenthal encuentra a este dispositivo es que no tiene utilidad para la multiplicación de enteros y para que se pueda aplicar se debe forzar la regla de los signos. Considera fundamental, en la enseñanza del número entero y las operaciones, tomar en cuenta el principio algebraico de permanencia, es decir, presentar nuevos números, más allá de los positivos, en los que sea posible resolver la ecuación $a + x = b$ con $b < a$, que se preserven las demás leyes y de modo que esta extensión resulte única. Si volvemos sobre las consideraciones realizadas anteriormente, acerca de las condiciones que es deseable que tengan los materiales concretos en su relación con el conocimiento a enseñar, pensamos que el dispositivo que hemos tomado es potente, pues sus principios para representar la adición y la sustracción se sostienen en la estructura de estas operaciones con enteros. Sin embargo, deberían complementarse con otros que permitan visualizar la multiplicación y la división. En Freudenthal (2002) encontramos un modelo alternativo, que no incluimos por razones de extensión.

Factorización de polinomios

El tema elegido para reconsiderar a partir de investigaciones es «Factorización de polinomios: aplicaciones de factor común y productos notables» (Consejo de Educación Secundaria [CES], 2010, p. 2) en tercer año de ciclo básico.

Originalmente se trabajó en clase utilizando el concepto de suma de áreas (que ya se había visto, por ejemplo, cuando se trabajó el teorema de Pitágoras), pero de forma muy intuitiva. En este sentido, se relacionaron las identidades notables con representaciones geométricas para proporcionar varios registros a los estudiantes a fin de lograr una correcta visualización del tema. Se realizaron actividades que implicaron la construcción de figuras de análisis, así como el plegado y recortado de papel glasé para ayudar a la visualización.

Para realizar la tarea de reelaboración que requería la consigna del parcial de Didáctica, se seleccionaron dos investigaciones referentes a la utilización de materiales concretos en la factorización de polinomios: Ospina (2015) y Wagner, Giraldo, Hoyos y Gutiérrez (2014). En ambos trabajos se pone en juego la idea de álgebra geométrica. Este término fue utilizado por primera vez por el matemático danés H. G. Zeuthen (1839 – 1920), que investigando sobre los trabajos de Apolonio de Perga (s. III a. C.) en Cónicas, y de Euclides (330 a. C.), en su obra *Elementos*, observó que las operaciones geométricas definidas sobre segmentos de recta y sobre secciones de áreas planas mantenían las propiedades de las operaciones con números reales (Ospina, 2015).

Euclides utilizó segmentos de recta y rectángulos para interpretar y justificar diferentes igualdades algebraicas, así como para resolver ecuaciones geométricamente. Un ejemplo es la representación geométrica de la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Este modelo permite también el trabajo con la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, y la factorización de expresiones algebraicas. Si bien tiene el inconveniente de no permitir trabajar con expresiones más allá de las de segundo grado.

Con base en la bibliografía consultada, se encontraron ciertos puntos de contacto entre las investigaciones referentes a la enseñanza del tema planteado y la práctica de enseñanza desarrollada, aunque estas coincidencias no fueran siempre conscientemente buscadas.

Un ejemplo de esto es la utilización de materiales didácticos que permitan la elaboración y la manipulación por parte de los estudiantes. Como ya hemos mencionado, se trabajó con figuras de papel glasé, recortando y combinando para lograr diferentes configuraciones que mostraran los conceptos que se pretendían incorporar. Esta experiencia resultó muy efectiva tanto para la visualización como para motivar a los alumnos mediante la manipulación de elementos. A partir de las lecturas estudiadas y en función del resultado altamente positivo de esta experiencia se intentó ampliar este trabajo no solamente a los productos notables, sino a la factorización de cualquier expresión algebraica.

A continuación presentamos lo que hemos tomado para complementar la enseñanza de este tema, partiendo del pensamiento numérico como concepto previo, y abordando el pensamiento geométrico y el pensamiento algebraico en forma paralela. Para ello se propuso a los estudiantes la construcción de figuras (en cartón o cartulina) que representaran expresiones algebraicas, tomando el modelo planteado en Wagner *et al*. (2014). Estos autores presentan material concreto compuesto por las siguientes figuras: un cuadrado, cuyo lado se toma como unidad de medida (u), y dos rectángulos, uno cuyos lados tienen medidas 1 y x (en la unidad u), y los del otro, 1 e y (en la unidad u). A los efectos de la elaboración del material concreto, las medidas de los lados de los rectángulos no congruentes con el segmento unidad, consideradas en centímetros, no deben ser múltiplos de la medida del segmento unidad en centímetros. Las figuras se muestran en la siguiente tabla.

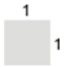
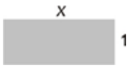
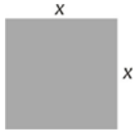
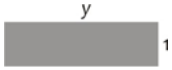
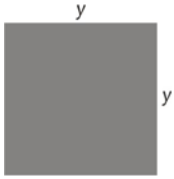
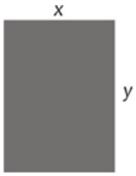
Figura	Descripción	Área (u^2)
	Cuadrado de lado 1 *u* (una unidad de longitud)	1
	Rectángulo de base *x u* y altura 1 *u*	x
	Cuadrado de lado *x u*	x^2
	Rectángulo de base *y u* y altura 1 *u*	y
	Cuadrado de lado *y u*	y^2
	Rectángulo de base *x u* y altura *y u*	xy

Tabla 1. Descripción de las representaciones de expresiones algebraicas.

Fuente: Elaboración propia.

Se identifica cada figura con la expresión de su área en unidades cuadradas. Incluso puede ser aconsejable anotar en cada caso dicha expresión en la figura:

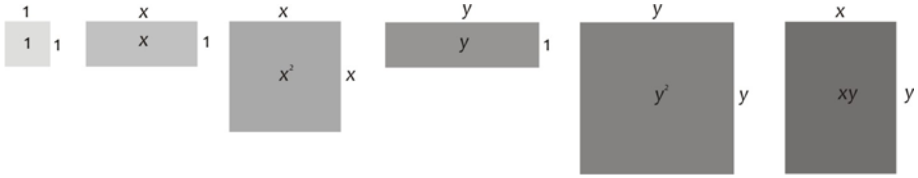
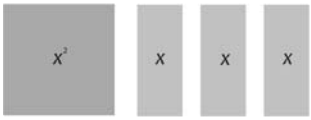


Figura 6. Expresiones representadas.

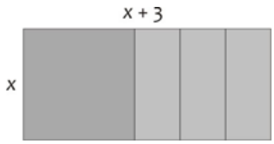
Fuente: Elaboración propia.

La idea que subyace a este modelo es, dada una expresión algebraica, tomar la cantidad de figuras del modelo tal que la suma de expresiones que ellas representan sea esa expresión e intentar formar un rectángulo con todas ellas sin que se superpongan (salvo en los casos de sustracción que se explicarán más adelante). El producto que da el área del rectángulo obtenido es la factorización de la expresión inicial. A continuación mostramos algunos ejemplos.

1) Para factorizar la expresión $x^2 + 3x$ tomamos las figuras:

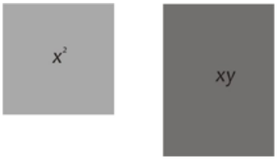


y formamos un rectángulo como se muestra a continuación.

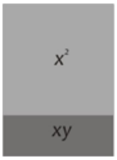


Este rectángulo tiene lados de longitudes x y $x + 3$. Por lo tanto, podemos escribir que $x^2 + 3x = x(x + 3)$.

2) Para factorizar $xy - x^2$ podemos proceder de la siguiente manera, partiendo de las figuras que se presentan a continuación:

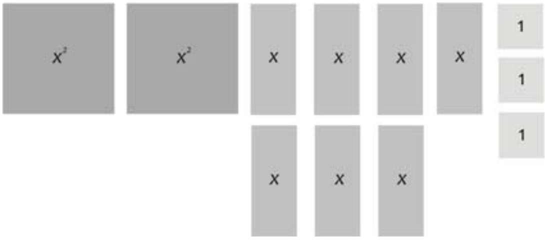


Colocamos el cuadrado de área x^2 superpuesto al rectángulo de área xy, logrando la siguiente figura:

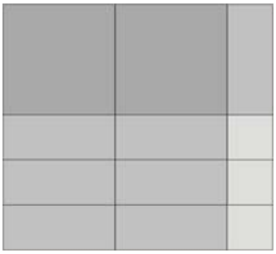


El rectángulo gris oscuro visible en la parte inferior tiene lados de longitud x e $y - x$ de donde $xy - x^2 = x(y - x)$.

3) Si queremos factorizar el polinomio $2x^2 + 7x + 3$, tomamos las siguientes figuras:



y podemos agruparlas como se muestra a continuación:



Así, obtenemos como factorización $(2x + 1)(x + 3)$.

Este modelo de trabajo con rectángulos puede tomarse como apoyo para las actividades algebraicas desde un inicio, aspecto que parcialmente desarrollamos en nuestro curso. Por ejemplo, que los estudiantes dispongan de un juego de rectángulos para ser usados cuando realizan operaciones con expresiones algebraicas, al menos cuando estas son de grado menor o igual que dos. Una posible dificultad es que los segmentos cuya medida llamamos x e y son fijos para cada conjunto de rectángulos, lo que podría ser un obstáculo para la comprensión del concepto de variable. Esto se podría relativizar considerando diferentes dimensiones para distintos juegos que estén disponibles en la clase. Otra posibilidad, que aún no hemos diseñado, consiste en la creación de un *applet* para uso de los estudiantes, en el que este aspecto sea contemplado, así como la visualización de casos de expresiones algebraicas no factorizables con expresiones de primer grado.

Pensamos que este material puede ser considerado generativo, en el sentido planteado por Fischbein (1977), pues trabajando inicialmente con él, y a través de actividades cuidadosamente diseñadas, los estudiantes pueden realizar conjeturas e ir determinando las leyes que rigen a las operaciones con expresiones algebraicas, así como disponer de una herramienta para obtener contraejemplos que los ayuden a corregir sus errores y fortalecer su trabajo algebraico posterior.

REFLEXIONES FINALES

Nührenbörger y Steinbring (2008), como ya dijimos, abordan el trabajo con materiales concretos en la formación de docentes de matemática. En relación con esto, plantean, por un lado, que los futuros docentes tienen sus propias concepciones, imaginaciones y elementos de conocimiento explícitos e implícitos acerca de la relación entre los materiales manipulativos y el conocimiento matemático. También afirman que muchas veces consideran que para que los materiales concretos sean buenos, estos deben resultar no ambiguos, ser coloridos y visualmente estimulantes. Suelen asignarles un efecto positivo simple y directo en el aprendizaje de la matemática abstracta. Estas concepciones acerca de las características y el efecto de los materiales manipulativos son inconscientes, por lo que es difícil cuestionarlas para modificarlas, atendiendo a los requerimientos epistemológicos que deben tener los materiales concretos. Por otro lado, esto es imprescindible si se quiere que los futuros docentes hagan un buen diseño y uso de materiales manipulativos.

Por lo anterior creemos que es muy importante abordar el tratamiento de materiales manipulativos en la formación de profesores de matemática, no restringiéndonos solo a los materiales concretos, sino incluyendo también los diagramas y esquemas que solemos utilizar en clase para visualización de los conceptos tratados, en tanto representaciones semióticas de estos. Es importante que los futuros profesores experimenten con dichos materiales, comprendan su uso y, sobre todo, que analicen y determinen las relaciones que se pueden establecer entre ellos y el conocimiento matemático que se desea enseñar. Esto permitirá hacer explícitas las dificultades y errores que pueden surgir de las diferentes interpretaciones que los estudiantes hagan sobre esas relaciones, como una forma más de análisis a priori.

La reflexión realizada acerca del uso de los materiales manipulativos en la clase nos ayudó a clarificar el rol que estos deben cumplir. De la lectura de las investigaciones en que se presentan los materiales manipulativos, así como de aquellos documentos que problematizan su utilización en la clase, concluimos que el uso de materiales concretos no puede darse de un modo ingenuo, sino que es preciso acompañarlo de un análisis que permita comprender qué relaciones se dan entre ellos y las relaciones conceptuales que queremos que representen. Esperamos que este trabajo promueva este tipo de reflexiones, tanto en el ámbito de la práctica docente de los profesores, como en los cursos de Didáctica de la Matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. (1992). Magical hopes. Manipulatives and the Reform of Mathematics Education. *American Educator*, *16*(2), 14–18, 46–47.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme y J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117). Louvain-la-Neuve.

Castillo, C. (2014). *Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos* (Tesis de grado no publicada). Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería y Administración, Colombia.

Consejo de Educación Secundaria (2010). *Programa de Matemática para tercer año de Ciclo Básico, Reformulación 2006*. Uruguay: Autor.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, *5*, 37–65.

Fischbein, E. (1977). Image and Concept in Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 153–165.

Hernández, A. y Gallardo, A. (2006). La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía el modelo concreto de bloques. *Educación Matemática*, *18*(1), 73–97.

Nührembörger, M. y Steinbring, H. (2008). Manipulatives as Tools in Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and*

Processes in Mathematics Teacher Education. Volume 2 of *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp. 157–182). Rotterdam: Sense Publishers.

Ospina, M. (2015). *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, Colombia.

Wagner, G., Giraldo, A., Hoyos, E. y Gutiérrez, H. (2014). El álgebra geométrica como mediadora en la enseñanza de la factorización y los productos notables. *Revista de Investigaciones. Universidad de Quindío*, *26*(1), 139–144.

Sección 2

Análisis del discurso matemático escolar

HERRAMIENTAS PARA REFLEXIONAR SOBRE NUESTRA PRÁCTICA: ANÁLISIS CRÍTICO DEL DISCURSO

IGNACIO DOLYENKO, VERÓNICA MOLFINO

Resumen

¿Cómo analizar nuestra práctica docente? ¿Qué elementos deberíamos tomar en cuenta para reflexionar sobre ella? En este escrito ilustramos, mediante un ejemplo concreto, un tipo de análisis sustentado en la consideración del discurso, en particular el discurso matemático escolar, como una acción social. Partiendo de la herramienta metodológica denominada Análisis Crítico del Discurso, nos proponemos responder por qué enseñamos un determinado tema de la manera en que lo hacemos.

Palabras clave: análisis de prácticas, discurso matemático escolar, análisis crítico del discurso.

Abstract

How to analyze our teaching practice? Which elements should we consider to reflect on it? In this paper we illustrate, by means of a concrete example, a type of analysis based on the consideration of discourse, school mathematical discourse, as a social action. Starting from the methodological tool called Critical Discourse Analysis, we propose to answer why we teach a certain topic in the way we do it.

Keywords: analysis of practices, school mathematical discourse, critical discourse analysis.

INTRODUCCIÓN

En la formación inicial y continua de profesores, muchas son las veces en las que se advierte sobre la necesidad de analizar las prácticas. Este ejercicio, considerado en primera persona, implica reflexionar sobre nuestras clases, las decisiones que tomamos, qué las motivan y los alcances que tienen. Ahora, ¿qué tipo de análisis resulta apropiado? ¿Qué elementos se deben tomar en cuenta? A su vez se impone otra cuestión no menor: ¿cómo integrar a la nutrida agenda que caracteriza a la profesión, una metodología de análisis que permita reflexionar, en el tiempo que tenemos disponible, acerca de qué hacemos y por qué lo hacemos?

Proponemos en este trabajo un análisis focalizado en el discurso dentro del aula, en particular el discurso matemático escolar (dME), entendiéndolo como:

> la manifestación del conocimiento matemático normada por las creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática, por lo que dicta el currículum y por las necesidades e intereses de todos los actores de la noósfera (entendida en el sentido en que la desarrolla Chevallard (1991) en el contexto de la teoría de la Transposición Didáctica). (Molfino y Buendía, 2011, p. 120)

Involucra formas orales, como las que se dan entre profesor y alumno, o entre alumnos, o entre profesor y autoridades educativas; y formas escritas, como los programas o libros de texto (Castañeda, 2006).

En particular, empleamos como marco de análisis el Análisis Crítico del Discurso (ACD), herramienta metodológica de una perspectiva teórica del discurso en la que es entendido como una acción social (Van Dijk, 2001), es decir que es modelador de las acciones.

El ACD es un tipo particular de investigación analítica sobre el discurso que estudia el modo en que el abuso del poder social, el dominio y las desigualdades son practicados, reproducidos y combatidos por los textos y el habla en el contexto social y político. Busca establecer nexos entre las propiedades de un texto y las estructuras y procesos sociales y culturales (Fairclough y Wodak, 2001). Sus ocho principios básicos fueron descritos en Molfino y Buendía (2011), allí se ejemplifican para el caso particular del análisis del proceso social de institucionalización del concepto de límite (Molfino y Buendía, 2014).

Los principios básicos son: 1. El ACD se ocupa de los problemas sociales; 2. Las relaciones de poder son consideradas como elementos discursivos; 3. El discurso constituye a la sociedad y a la cultura; 4. El discurso realiza una labor ideológica; 5. El discurso es histórico; 6. El vínculo entre el texto y la sociedad es mediado; 7. El análisis del discurso es interpretativo y explicativo; 8. El discurso es una forma de acción social (Fairclough y Wodak, 2001).

En el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar de cuarto año de la carrera de profesorado de matemática, se propone a los estudiantes analizar sus prácticas docentes en torno a un tema abordado en un curso específico de enseñanza media, empleando el ACD como herramienta metodológica. El objetivo es responder a la pregunta: ¿Por qué enseño este tema de la manera en que lo enseño? ¿Por qué lo desarrollo de esta forma en este curso? Interesa particularmente identificar los grupos de poder que inciden en la toma de decisiones, así como también la manera en que lo hacen.

En este trabajo reportamos el análisis de Ignacio referido a la manera en que abordó la introducción del tema Número Complejo en un curso de 2º año de Bachillerato. Si bien el análisis involucra todo su discurso respecto a la unidad, describimos una clase de esa unidad a modo de brindar evidencias.

CONTEXTO DE LOS ACTORES INVOLUCRADOS

La clase analizada se desarrolla en el liceo Nº 35 de Montevideo, Instituto Alfredo Vázquez Acevedo, durante el año 2017 y el docente, Ignacio, es profesor practicante que se desempeña como estudiante del curso Didáctica II – Práctica Docente, correspondiente al tercer año de la carrera de profesorado de matemática. Estuvo a cargo de varias clases dictadas con anterioridad a la de la unidad en la que se enmarca este estudio. En particular, planificó e implementó una unidad del programa, Número Complejo, y la clase descripta es la segunda de dicha unidad. En ese año lectivo Ignacio era estudiante de profesorado en el Instituto de Profesores Artigas (IPA), cursando dos asignaturas de tercer año y cinco de cuarto año de la carrera de profesorado de matemática. Si bien Ignacio cumple diferentes roles, en adelante nos referiremos a él como «el docente», por ser la actividad principal que desempeña en el contexto del análisis.

El grupo es de 2° año de Bachillerato, orientación artística, con 25 estudiantes. La docente adscriptora a cargo del grupo es profesora de matemática, magíster en Matemática Educativa y doctoranda en Matemática Educativa. Además, se desempeña como docente de Didáctica en el profesorado de matemática.

El contenido matemático abordado es la introducción de la unidad imaginaria *i* en el contexto de la resolución de ecuaciones. La profesora a cargo del curso comenzó el año con geometría analítica, luego trabajó con funciones polinómicas y posteriormente divisibilidad en polinomios. A continuación, el profesor practicante comenzó a trabajar con la unidad Número Complejo. Este es un concepto matemático que no se aborda en cursos previos.

DESARROLLO DE LA CLASE

El objetivo de la clase era introducir la unidad imaginaria mediante la reflexión de los estudiantes sobre la necesidad de construir un nuevo conjunto numérico en el contexto de la resolución de ecuaciones. Así, el docente propuso una actividad para trabajar durante 15 minutos en grupos que consistió en la resolución de algunas ecuaciones que tenían soluciones conocidas por los estudiantes y otras sin solución en los conjuntos numéricos estudiados por los alumnos hasta ese momento.

Actividad

Determina a cuál/es conjunto/s numérico/s pertenecen las soluciones de las ecuaciones.

Ecuaciones	*N*	*Z*	*Q*	*R*
$x + 3 = 5$				
$2x + 4 = 2$				
$6x^2 = -1 + 5x$				
$x^2 = 7$				
$x^2 + 1 = 0$				
$x^2 - 2x + 2 = 0$				

El docente observó el trabajo de los estudiantes y fue respondiendo a dudas de procedimiento, procurando no adelantarse respecto a lo que después quería introducir, para que la producción fuera estrictamente de los alumnos. Consideró la producción de los estudiantes para el desarrollo posterior de la clase con el objetivo de que fueran estos quienes vivenciaran la necesidad de introducir un nuevo conjunto numérico.

A continuación, propuso una puesta en común en la que los estudiantes expusieron sus resoluciones al resto del grupo, discutiendo a qué conjuntos numéricos pertenecían los elementos del conjunto solución. El docente, en algunas situaciones, consideró necesario cuestionar y ordenar las intervenciones, intentando que se explicitaran los argumentos matemáticos, jerarquizando los conceptos, con el fin de lograr el objetivo planteado de crear una nueva expresión para representar las soluciones de las ecuaciones, en los casos que fuera necesario. En forma posterior a cada discusión, los estudiantes pasaron al pizarrón, completando la tabla propuesta, de forma que quedó escrita cada respuesta discutida en grupo. La respuesta a la penúltima ecuación involucraba una nueva expresión: $\sqrt{-1}$, la que dio lugar a que el docente preguntara si era posible admitir como número y, en consecuencia, a las soluciones halladas como elementos de un conjunto solución distinto de vacío.

Después de discutirlo, los estudiantes aparentaron aceptar dicha expresión como un número que no es real, dando lugar a que el docente definiera a esa expresión como un nuevo número simbolizado con la letra *i*, llamado unidad imaginaria. Estudiantes y docente conjeturaron que esta expresión permitía construir un conjunto numérico en el que cualquier ecuación tenía solución.

El docente había planificado otra actividad para que los estudiantes concluyeran que cualquier expresión con raíz cuadrada de un número negativo se puede expresar en función de *i*. En el momento que se estaba por plantear dicha actividad, producto de la discusión generada en la clase, una estudiante preguntó por el caso de la raíz cuadrada de otro número negativo: $\sqrt{-15}$. En ese momento, el profesor decidió no proponer la actividad y trabajar con la pregunta de dicha estudiante. Los alumnos reescribieron la expresión como $\sqrt{15\cdot(-1)}$, para luego plantear $\sqrt{15}\cdot\sqrt{-1}$, hasta expresarla en función de la unidad imaginaria: $\sqrt{15}\,i$. Luego de esto, otra estudiante preguntó si la unidad imaginaria se podía escribir como 1*i*, de acuerdo a lo trabajado. Una compañera argumenta que, como al multiplicar cualquier número (de los ya conocidos por los estudiantes) por 1 se mantiene el resultado, entonces, para este nuevo caso, se tiene que cumplir que el resultado de multiplicar el número *i* por 1 debe ser *i*. En consecuencia, se verifica la igualdad planteada. Apreciamos cómo los estudiantes crean y validan una propiedad que se debe cumplir con este nuevo tipo de números mediante una estrategia que permite generar convenciones matemáticas: que las propiedades algebraicas que se cumplían para conjuntos numéricos ya conocidos sigan siendo válidas. Posteriormente, se continúan abordando las restantes ecuaciones. Se concluye que, a partir de la creación de este nuevo tipo de números en el que se aceptan expresiones (números) con radicales negativos, se podrán encontrar nuevos números que verifiquen ecuaciones que antes tenían como conjunto solución el conjunto vacío. Es interesante cómo la aceptación de estas nuevas expresiones como válidas se da mediante un proceso de convención matemática similar al que se vivenció en el proceso de creación del conjunto de los números complejos. En este momento, suena el timbre, dejándose la discusión de la última ecuación para la clase siguiente.

Consideramos que a partir de esta actividad propuesta en el contexto de la resolución de ecuaciones y de la puesta en común, los estudiantes apreciaron cómo una misma ecuación, en diferentes conjuntos numéricos, tiene diferentes conjuntos solución. Vivenciaron la necesidad de crear una nueva notación para concebir nuevos tipos de números, diferentes a los conocidos por estar escritos mediante expresiones que en el conjunto de los números reales carecen de sentido. En clases posteriores se procuró independizar el concepto del contexto de la resolución de ecuaciones y darle un sentido diferente, ampliando la imagen conceptual mediante la articulación entre diferentes registros: numérico y gráfico.

ANÁLISIS DEL DME EN TORNO AL CONCEPTO DE NÚMERO COMPLEJO EMPLEANDO EL ACD

De los puntos que componen el ACD nos centramos particularmente en los puntos 2, 3, y 4, para lo que es necesario identificar los grupos de poder que influyen en el discurso conformado por el profesor practicante sobre la introducción de Número Complejo y la manera en que ese poder se ejerce. El discurso debe entenderse dentro de un contexto amplio constituido por muchos actos interrelacionados, desde la instancia del docente como estudiante en niveles básicos o de formación de profesorado hasta instancias de discusión en ámbitos jerárquicos o académicos ajenos al docente pero que también influyen en su discurso. En este análisis decidimos poner atención a dos grandes momentos significativos en la conformación de dicho discurso: el de la preparación de la clase a dictar y el de su implementación. A su vez, nos resultó útil diferenciar, dentro del primer momento, tres fases, a saber: la consulta en diversos textos sobre el tema a tratar; la consulta y coordinación con la profesora adscriptora; y la planificación de la unidad en la que se desarrolla la clase descripta. En cada uno de estos momentos interactúan diferentes grupos de poder y de distintas maneras. Esto permite brindar una posible explicación a las decisiones tomadas por el docente.

Primer momento: preparación de la clase

Consulta en diversos textos

Como es usual al preparar clases, la primera referencia a considerar es la del programa oficial del curso (CES, 2010), así como otros textos que tratan el tema a dar en clase. En este caso se optó por uno de referencia para el docente (Apostol, 1976), manual tradicional del nivel universitario, en el que se aborda el tema mediante una estructura clásica: axioma–definición–propiedad–demostración–aplicaciones y otro libro de texto específico para estudiantes de enseñanza media superior y escrito por docentes con amplia experiencia en ese nivel (Gallo y Silvera, 2014).

Estos elementos del discurso tomados en cuenta en esta primera fase dan cuenta de la influencia de algunos actores o grupos sobre el discurso del docente. En primer lugar, la Inspección de Matemática que es la encargada de confeccionar el programa oficial (CES, 2010). Las pautas en él expresadas fueron tomadas en cuenta como eje neurálgico en la introducción del tema: la reflexión sobre la resolución de ecuaciones y su relación con los conjuntos numéricos conocidos y por conocer. Una de las ecuaciones planteadas en la actividad es la sugerida en dicho programa para motivar la introducción del tema: $x^2 + 1 = 0$.

Creemos importante tener en cuenta la evolución que ha tenido el tema Número Complejo en los programas para comprender las decisiones del docente. En el plan vigente entre los años 1968–1977 (CES, 1963), este tema se ubicaba para el último año de Bachillerato (equivalente a tercer año en el plan actual), con un tratamiento riguroso y teórico, definiendo este conjunto numérico a partir de la estructura algebraica de cuerpo. Para el siguiente plan de estudios, 1976 (CES, 1976), el tema Número Complejo se introdujo en 2º año del mismo ciclo, con la sola indicación de desarrollar «Sus representaciones. Operaciones. Potencias y raíces. Fórmula de De Moivre. Aplicaciones» (p. 1). Pareciera existir una preocupación por presentar diferentes representaciones, pero no se explicita una promoción del tránsito entre ellas. Si bien ahora no se pide la introducción mediante estructuras algebraicas, los contenidos a desarrollar son similares y la carga horaria destinada se reduce (de 9 a 7 horas). Finalmente, en el plan actual (CES, 2010) se recomienda dedicarle al tema 15 horas, se solicita explícitamente el vínculo con otras representaciones como la gráfica y se dan sugerencias metodológicas: «Se sugiere hacer notar la imposibilidad de resolver en el conjunto de los números reales la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Se introducirá la unidad imaginaria y los complejos $z = a + bi$. Representación cartesiana de un número complejo» (p. 4). Este análisis nos permite apreciar la importancia de comprender la perspectiva histórica del discurso (Fairclough y Wodak, 2001), esto es, cómo va evolucionando en función de los intereses de los grupos que lo emiten y cómo ello influye en el discurso de diversos actores. En este caso, el docente toma en cuenta fuertemente las recomendaciones del programa actual, lo que puede apreciarse en la actividad propuesta.

Se distingue, a su vez, otro grupo de poder que es el de los autores de texto, tanto el autor que es matemático e ingeniero, en el caso de Apostol, como aquellos cuya formación tiene un componente didáctico, como los profesores Edith Gallo y Julio Silvera.

Pero el uso de estos textos para la planificación de la clase da cuenta de otros grupos de poder que influyen en que el docente haya tomado la decisión de considerar esos textos –y no otros, u otro material como podrían ser apuntes de clase o páginas de internet–. Uno de esos grupos está constituido por profesores de diversos cursos de matemática en el IPA, y familiares y amigos del practicante que cursaron o cursan carreras con fuerte contenido matemático. Ellos recomiendan Apostol (1976) fundamentando que es un libro *de referencia* para estudiar matemática en un nivel avanzado. Si bien no fue una recomendación específica para el tema Número Complejo, el docente lo consulta en esta fase de la planificación porque lo ha adoptado como texto de referencia general para el curso. Finalmente, la propuesta de clase no se adecua fielmente al desarrollo del tema en el texto, pero el docente lo consulta porque le genera confianza desde el punto de vista del conocimiento matemático profundo del tema que desarrolló en la clase.

Respecto al texto Gallo y Silvera (2014), se abordó su consulta para tener una referencia acerca del alcance del saber a enseñar respecto a cursos en ese nivel. El acceso a dicho libro fue mediante recomendación de la profesora adscriptora. Es decir que confluyen dos grupos de poder sobre esta consulta particular: el de los autores de libros de textos y el de profesores de la dimensión didáctica de la carrera; en este caso, se visualiza particularmente la influencia de la profesora adscriptora. A partir de ella se obtuvo la recomendación del texto, lo que condujo a que este se constituya en un material de referencia.

Consulta y coordinación con la profesora adscriptora

La clase se desarrolla en el marco de la práctica del curso Didáctica II, por lo que el grupo se encuentra a cargo de la profesora adscriptora. La elección del tema a trabajar, Número Complejo, fue realizada por el docente practicante dado que ya había desarrollado parciales respecto a la misma temática para la asignatura Didáctica II en el IPA, de esa manera pudo fortalecer los vínculos entre teoría y práctica respecto a un mismo contenido matemático. En este sentido puede observarse también la influencia de la profesora de Didáctica II, integrante del grupo de profesores de la dimensión didáctica de la carrera de profesorado. Las correcciones realizadas por ella en los trabajos teóricos fueron determinantes en la forma en que el practicante diseña la clase.

En este contexto, al planificar se generó un momento de consultas a la profesora adscriptora sobre su planificación anual, sus consideraciones sobre el tratamiento del tema y las dinámicas de clase que propone. Estas consultas previas generaron que se profundizaran aspectos históricos del concepto. Respecto a los modos de enseñanza, durante el transcurso del año los estudiantes se adaptaron a cierta dinámica de clase, propia de la profesora a cargo: considerar la participación de los estudiantes y desarrollar los contenidos a abordar a partir del discurso de ellos, de sus aportes, argumentos e ideas, propiciando una auténtica construcción de conocimiento por parte de los estudiantes.

La profesora adscriptora genera una influencia en el discurso del practicante con sus sugerencias y sus prácticas habituales, ya que en el marco dado determina en gran medida tanto el saber a enseñar (con la planificación anual y las sugerencias realizadas), así como la metodología de la clase (con las prácticas habituales).

Planificación de la unidad

En esta fase convergen tanto las instancias de consulta a la profesora adscriptora, la influencia de otros profesores de la carrera de profesorado y el abordaje del tema en los libros tomados como referencia. Producto de la coordinación con la adscriptora y de acuerdo a la orientación artística elegida por los estudiantes, el practicante consideró apropiado generar una ficha de trabajo que contemplara esta orientación específica. La actividad que se presenta en la clase descripta es solo la primera de este material que concluye con una evaluación relacionada al ámbito del arte, consistente en que los estudiantes recreen un momento histórico del desarrollo del número complejo. Esta decisión podría reflejar la influencia de otros profesores, como el de la asignatura Historia de la Matemática, u otros a cuyas clases el docente practicante asistía en paralelo. La influencia en este caso no es directamente sobre el discurso relativo al número complejo en particular o a la planificación de la clase sino a la docencia en general, ya que promueve que el docente considere a la historia de la matemática como una herramienta valiosa para la proposición de un trabajo a los estudiantes.

En la elaboración de este material subyace entonces la influencia de los profesores de la dimensión didáctica de la carrera, tanto de los profesores de Didáctica y de la profesora adscriptora como del profesor de Historia de la Matemática. Por otro lado, al haber considerado Apostol (1967) como texto de consulta, se subraya la influencia ejercida por profesores de matemática del profesorado en lo que hace a la preocupación del docente por planificar utilizando conceptos que fuesen validados por la comunidad matemática.

Segundo momento: implementación

De la metodología propuesta y la observación de la clase, se desprende que la intención es la de modificar los esquemas de poder en los que el docente es dueño del conocimiento y el estudiante es un actor pasivo que no participa del proceso en forma activa. En contraste, la metodología establecida y llevada adelante es la de una clase en la que los estudiantes exponen sus ideas matemáticas y defienden con argumentos sus posturas frente al conocimiento. El docente promueve la autoconfianza del estudiante mediante debates en clase, fomentando su participación, tomando los aportes realizados como insumos para el desarrollo de la clase. En esta misma dirección, se habilitan los diálogos entre estudiantes, solicitando que validen el conocimiento entre pares, de acuerdo con sus propias explicaciones. Así, se deja de lado la figura del docente como autoridad intelectual única, ampliando dicha autoridad a los estudiantes y promoviendo una negociación compartida de significados. La profesora adscriptora, que ofició de observadora en esa clase, destacó que efectivamente los estudiantes tuvieron un rol de construcción, aporte y discusión del conocimiento.

En esta modalidad docente podemos ver la influencia de la profesora adscriptora que, mediante el diálogo constante a lo largo de todo el año, fue señalando aspectos a mejorar desde el punto de vista metodológico. Por ejemplo, que el practicante se apresurara a validar el conocimiento, en lugar de preguntar a otro estudiante y lograr esas validaciones por parte de los alumnos.

REFLEXIONES FINALES

En suma, entender al discurso como una acción social (Van Dijk, 2001) y emplear la herramienta del ACD para el análisis del discurso en torno a la enseñanza del tema Número Complejo, permitió al docente identificar ciertos grupos de poder que influyeron en las decisiones que fue tomando. Podríamos diferenciar dos grandes grupos compuestos por diferentes fuentes de poder: por un lado, un grupo que promueve una concepción rigurosa de la matemática, representada en el caso estudiado por el autor del texto de referencia (Apostol, 1976) y profesores de matemática de la carrera de profesorado. Por otro lado, identificamos otro grupo que promueve una nueva perspectiva para el docente, la de que el estudiante debe representar el centro de la actividad matemática del aula. En el caso analizado este grupo lo componen la Inspección de Matemática, cuyas recomendaciones fueron sumamente influyentes en el diseño de las actividades; los profesores de la dimensión didáctica de la carrera, en particular la profesora adscriptora, mediante recomendaciones didácticas, metodológicas y curriculares, y los autores de textos específicos para estudiantes de enseñanza media superior (Gallo y Silvera, 2014).

La herramienta del ACD ofreció al docente una posibilidad de volverse sensible ante los poderes que se ejercen sobre su discurso y le permitió reconocer nuevas fuentes que conforman un discurso diferente al que él recibió como estudiante de matemática. Le permitió poner de relieve la dimensión del desafío que se plantea: que los estudiantes de enseñanza media sean los protagonistas de la construcción del conocimiento matemático en el aula, desafío que responde, a su vez, a las voces más influyentes en su entorno actual. Durante este proceso, el docente se vio enfrentado a un dilema: ¿cómo promover diálogos auténticos entre los estudiantes y permitir debates sin perder el «ritmo académico de la clase», cumpliendo con los tiempos curriculares dictados por algunos de los grupos de poder que influyen en su discurso? Esto requiere todo un cambio en la concepción docente de la matemática y de su enseñanza, respecto a la que el docente recibió como estudiante de matemática.

Se suma a este desafío la actitud de los estudiantes. Este análisis permitió al docente reflexionar sobre el hecho de que a algunos les genera ansiedad ser ellos mismos quienes se ocupen de ciertas construcciones del conocimiento matemático y esperan que sea el docente quien brinde las respuestas, sin discutir por qué se admite una definición particular o alguna propiedad. En la actualidad, los estudiantes, mediante el avance tecnológico, están acostumbrados a obtener las respuestas de manera inmediata. A eso se suma que tradicionalmente es el profesor el que sabe y *enseña*, relegando al rol del estudiante la acción única de *aprender* (entendido según esa concepción como recibir el conocimiento en forma pasiva). El contrato didáctico imperante está signado por roles estructurados para el profesor y el estudiante. En ese contexto, los momentos de reflexión y discusión entre pares pueden generar ansiedad, explicitadas en expresiones del tipo: «No tengo ganas de pensar», «Siempre hay que pensar todo», «¿Por qué no nos dice la respuesta y nos dejamos de discusiones?».

El reconocimiento de las diversas fuentes de poder que influyen en el discurso del docente permite afianzar de manera crítica ciertas decisiones: si consideramos importante que sea el estudiante el centro de la actividad matemática en el aula, entonces debemos trabajar para ello, entendiendo que nuestro discurso puede promover un camino liberador para los estudiantes, a pesar de que no sea el más corto.

La herramienta de análisis que hemos ilustrado a través de este trabajo nos permite interpretar esta situación –u otras– para actuar sobre ella. Nuestra intención es que se generen otras formas de interacción entre los individuos que componen la clase, fomentando otras perspectivas sobre el relacionamiento entre los individuos de la sociedad, a partir de concebir al discurso como una acción social, en este caso, transformadora de la sociedad. Si bien el análisis por sí solo no genera estrategias infalibles, sí nos vuelve conscientes de los grupos que influyen en nuestro discurso, pudiendo así comenzar un camino de transformación, dando entrada a nuevas metodologías didácticas. El discurso se enriquece ampliando nuestro margen de acción o, al menos, reconociendo nuestras limitantes, quitando el velo de ciertas concepciones que tenemos naturalizadas, asumidas como el único camino posible.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Consejo de Educación Secundaria (1963). *Programa de Matemática, 6º año, 2º ciclo, orientación Ciencias Físico – Matemáticas*. Uruguay: Autor.

Consejo de Educación Secundaria (1976). *Programa de Matemática, 2º año de Bachillerato Diversificado, orientación Biológica*. Uruguay: Autor.

Consejo de Educación Secundaria (2010). *Programa de Matemática Núcleo Común. Segundo año de Bachillerato. Reformulación 2006 – Ajuste 2010*. Uruguay: Autor.

Apostol, T. (1976). *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(2), 253–265.

Fairclough, N. y Wodak, R. (2001). Capítulo 10. Análisis crítico del discurso. En T. Van Dijk (Comp.), *El discurso como interacción social. Estudios sobre el discurso II. Una integración multidisciplinaria*. Barcelona/Buenos Aires: Gedisa.

Gallo, E. y Silvera, J. (2014). *Matemática 2º Bachillerato, Núcleo Común*. Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Molfino, V. y Buendía, G. (2011). Análisis del Discurso como Acción Social: su rol en la construcción y difusión de conocimiento matemático. En G.

Buendía (Coord.), *Reflexión e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 117–150). México D. F.: Lectorum.

Molfino, V. y Buendía, G. (2014). Un Modelo de Prácticas para analizar el Proceso Social de Institucionalización Escolar del Conocimiento Matemático. *BOLEMA*, *28*(50), 1217–1238.

Van Dijk, T. (Comp.) (2001). *El discurso como interacción social. Una introducción multidisciplinaria*. Barcelona/Buenos Aires: Gedisa.

Sección 3

Micro diseños de investigación

¿$x = x$? CUANDO LA REALIDAD SUPERA LA LÓGICA

JÉSSICA AGUIRRE, CECILIA BENTANCORT, RAQUEL CASTAÑO, ANDREA MIRANDA, VERÓNICA MOLFINO, SANTIAGO PACHIAROTTI, PAOLA PATRÓN, KAREN RODRÍGUEZ

Resumen

La producción de una alumna de segundo año de enseñanza media captó nuestra atención al presentar un error muy particular en la comprensión del concepto de variable: asignar simultáneamente diferentes valores a la misma variable, en un contexto dado. En este trabajo nos propusimos indagar si este error se presenta también en otros estudiantes de segundo, tercer y cuarto año de enseñanza media, analizar sus producciones empleando el modelo 3UV e investigar si introducir actividades en las que se use la variable en relación funcional aporta a la comprensión de este concepto, en particular para lograr establecer que, en un contexto determinado, x debe ser igual a x.

Palabras clave: variable, modelo 3UV, análisis de errores.

Abstract

The production of a second–year student of secondary school caught our attention because it presented a very particular error in the understanding of the concept of variable: simultaneously assigning different values to the same variable, in a given context. In this survey we enquiry if this error is also presented by other students of second, third and fourth year of the secondary school, we analyze their productions using the 3UV Model and we investigate if introducing activities in which the variable is used in functional relationship contributes to the understanding of this concept, in particular to establish that in a given context x must be equal to x.

Keywords: variable, 3UV model, error analysis.

INTRODUCCIÓN: PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

En el marco del curso Análisis del Discurso Matemático Escolar de cuarto año de la carrera de profesorado de matemática en el Instituto de Profesores Artigas estudiamos la investigación de Ursini y Trigueros (2006). Ello generó en algunos de nosotros la inquietud referida al tratamiento del concepto de variable en nuestra práctica docente y, en particular, las formas en que empleamos y articulamos sus usos (como incógnita, como número general y en relación funcional). Esta investigación surge a partir de una actividad que involucra, principalmente, a la variable como incógnita. Una de las autoras, al proponerla en un grupo de segundo año de enseñanza media del que es docente, identificó algo que le llamó la atención en las respuestas de algunos de sus estudiantes: en un contexto dado asignaron simultáneamente diferentes valores a una misma variable. Ello nos condujo a cuestionarnos si ese error podía presentarse en los restantes grupos que teníamos a cargo y cómo podríamos abordar el problema en clase para que los estudiantes lo reconocieran como tal y lo superaran.

Nos abocamos, pues, por un lado, a indagar si en otros grupos de segundo, tercer o cuarto año de enseñanza media se presentaba este error mediante la aplicación de la misma actividad original. Por otro lado, al discutir entre nosotros sobre las dificultades de los estudiantes para trabajar con este tipo de actividades, surgieron dos posibles explicaciones referidas a aspectos didácticos. Una consiste en que, como en general, las ecuaciones se plantean en términos de *x*, los estudiantes pueden ver en un mismo pizarrón la asignación de diferentes valores a *x* como soluciones de diferentes ecuaciones. Otra posible explicación en la que finalmente decidimos centrarnos refiere al orden de los temas abordados durante el curso de segundo año: si bien el tema *Funciones* está contenido explícitamente en el programa (CES, 2010), muchos profesores deciden abordarlo a final de año, lo cual posterga el abordaje del uso de la variable en relación funcional. De hecho, en los grupos que teníamos a cargo no habíamos abordado aún ese contenido. De acuerdo a los aportes de Ursini y Trigueros (2006) y de Ochoviet (2004), creímos que a partir de una modificación en la actividad en la que se involucrara a la variable en relación funcional y del abordaje explícito del tema Funciones en clase, se podrían generar diferencias entre lo respondido en la actividad original y la actividad reformulada. Nos cuestionamos: los estudiantes que presentaron el razonamiento reportado en la actividad original, ¿vuelven a cometerlo en la segunda, en la que se involucra explícitamente el contexto funcional, articulándolo con el de incógnita ya presente? ¿Reconocen el error cometido? ¿Incide en las respuestas de los estudiantes el abordaje del tema Funciones en clase?

Respecto a esta temática reparamos en antecedentes de dos grandes tipos: por un lado trabajos que profundizan en el modelo 3UV (tres usos de la variable) y lo aplican para conocer el grado de comprensión del concepto de variable, en estudiantes de diferentes niveles escolares (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005; Ursini y Trigueros, 2006; Herrera, Cuesta y Escalante, 2012) o bien para el diseño e implementación de secuencias de enseñanza y posterior análisis (Dulce, López y López, 2011). Nuestro estudio se enmarca en este último tipo de trabajo.

Por otro lado, consideramos los aportes de Ochoviet (2004), estudio de gran relevancia para nuestro trabajo por dos motivos: es realizado en el contexto educativo uruguayo y además reporta el mismo error que nosotros detectamos, pero en otro contexto de aplicación, el de la verificación de ecuaciones que involucran expresiones factorizadas. La autora lo enuncia de la siguiente manera: «sustitución simultánea de la incógnita por dos valores distintos» (2004, p. 10).

Ochoviet (2004) presenta dos explicaciones posibles, una es que los estudiantes ven a la ecuación de segundo grado factorizada e igualada a cero como dos ecuaciones de primer grado, proceden a resolverlas por separado y al verificar sustituyen por ambos valores simultáneamente.

La segunda interpretación del error tiene un carácter lógico, debido a la fuerte impronta lógica aristotélica que poseemos que rige el principio de identidad: $x = x$. Como docentes asumimos que concluir que $x \neq x$ resultaría una contradicción desde el punto de vista lógico (según el principio aristotélico de que *una cosa es igual a sí misma*), por lo que a priori nos cuesta entender por qué el estudiante puede sustituir con dos valores distintos la misma variable. Sin embargo, quizás esto no sea tan evidente para el estudiante debido a que la lógica formal no es una temática abordada en el contexto de la enseñanza media y a que la lógica cotidiana no es necesariamente aristotélica.

Ochoviet (2004) sugiere «que una alternativa didáctica posible para evitar el error, sería la de enseñar la resolución de ecuaciones en el contexto de las funciones» (p. 163), es decir, trabajar con el uso funcional de la variable, en principio, para luego abordar el uso como incógnita.

Estas consideraciones nos conducen a proponer los siguientes objetivos:

Objetivo general

Contribuir a la comprensión de los procesos vinculados a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de variable en estudiantes de enseñanza media.

Objetivos específicos

1. Constatar si la dificultad detectada respecto a la asignación simultánea de diferentes valores a la misma incógnita en un contexto dado se puede presentar en estudiantes de segundo, tercer y cuarto año de enseñanza media y no solamente en los niveles más básicos.
2. Evaluar si el abordaje del tema funciones y una articulación explícita entre los diferentes usos de la variable mejora la comprensión del concepto de variable, en particular referido a la dificultad reportada.

MARCO TEÓRICO

Empleamos como marco de análisis el modelo 3UV, propuesto en las investigaciones de Trigueros y Ursini (2003), Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) y Ursini y Trigueros (2006).

El modelo 3UV parte de la premisa de que para resolver con éxito los problemas y ejercicios algebraicos típicos que aparecen en los textos escolares se deben articular tres usos de la variable: como *incógnita*, esto es, la variable representa un valor o valores que se pueden determinar con exactitud tomando en consideración las restricciones del problema, como *número generalizado*, uso que se presenta cuando se quiere expresar matemáticamente una regularidad o un método general, y la variable en *relación funcional,* empleado para representar una relación de variación conjunta entre variables. Ursini y Trigueros (2006) describen estos usos mediante el listado de algunos aspectos, no necesariamente excluyentes.

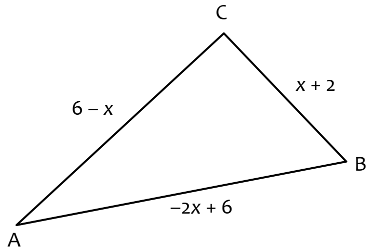
Trigueros y Ursini (2003) y Ursini *et al*. (2005), consideran que los estudiantes alcanzan un pensamiento algebraico maduro cuando usan de manera flexible, y diferenciando, los distintos usos de la variable.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

En primer lugar, propusimos en los grupos que tenemos a cargo y otros de colegas conocidos, la misma actividad que despertó nuestro interés inicial. En ella se puede apreciar el uso de la variable como incógnita.

Actividad original

a) Calcula x sabiendo que el perímetro del triángulo ABC es 12. Explica tu procedimiento.



b) Verifica.

Figura 1. Propuesta de actividad original.

Para describir con más detalle el error y conjeturar posibles explicaciones, elaboramos una lista (Tabla 1) de posibles respuestas que pensamos, a priori, que los estudiantes podrían dar.

R1	No contesta.
R2	Plantea el perímetro en función de *x* y no continúa o comete errores de manipulación y simplificación.
R3	Plantea el perímetro, iguala a 12 y no continúa o comete errores de manipulación y simplificación.
R4	Plantea el perímetro, iguala a 12, calcula *x* y verifica correctamente.
R5	Sustituye *x* por un mismo valor, presentándolo como solución (explícita o implícitamente).
R6	Calcula cada lado como si fueran iguales (12/3) y asigna ese valor a la *x* (presenta como respuesta $x = 4$).
R7	Busca ternas que sumen 12, asigna los valores a los lados y calcula *x* para cada lado por separado obteniendo distintos valores.
R8	Caso particular de R7, divide 12 entre 3 e iguala las expresiones de los lados a 4.
R9	Asigna el valor *x* a la medida de los lados de manera que sumen 12 (por ejemplo: $x = 2$, $x = 5$, $x = 5$).
R10	Iguala cada lado a 12 y obtiene valores distintos de *x*.

Tabla 1. Referencia de las respuestas esperadas.

De estas respuestas, las últimas cuatro (R7 a R10) son las que merecen particularmente nuestra atención pues son las que permiten evidenciar el error detectado. Por ejemplo, el caso de un alumno que igualó cada lado a 4 (asumiendo que se trataba de un triángulo con lados iguales), y calculó x para cada lado obteniendo valores diferentes ($x = 2$ y $x = 1$). El estudiante no advirtió que, al tratarse de una misma variable en un contexto dado, el valor debería ser el mismo. Esa respuesta la catalogamos como R8.

Esta actividad (actividad original) fue aplicada en doce grupos a cargo de diez profesores diferentes, totalizando 207 estudiantes de enseñanza media: 145 de segundo año, 42 de tercero y 20 de cuarto año. Seis de esos profesores son autores de este escrito, los otros cuatro son colegas que nos permitieron llevar a cabo la experiencia en sus grupos.

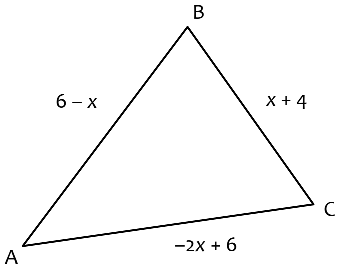
Tras la primera lectura de las producciones se decidió entrevistar a aquellos estudiantes cuya respuesta dejaba lugar a dudas respecto a qué quisieron expresar. Luego de esta instancia se logró clasificar las respuestas posibles de los alumnos según la categorización presentada en la tabla 1.

El análisis de estos datos primarios nos permitió constatar que efectivamente el error de asignar simultáneamente valores diferentes a una misma variable en un contexto dado aparece en las respuestas de los estudiantes en todos los niveles. Ello dio lugar a la planificación e implementación de la actividad reformulada.

Diseñamos así una nueva actividad, reformulando la original. En ella agregamos una parte en la que entra en juego explícitamente la variable en relación funcional. A su vez, teniendo en cuenta la sugerencia de Ochoviet (2004) que propone que el orden en que se abordan las unidades temáticas podría afectar su correcto entendimiento, en los grupos que teníamos a cargo abordamos el tema Función. En forma paralela, surge la necesidad de considerar un aspecto lógico: ¿los estudiantes son conscientes de que $x = x$? A continuación presentamos la actividad reformulada.

Actividad reformulada

a) Escribe una expresión para el perímetro del triángulo que dependa de x.



b) Calcula x sabiendo que el perímetro del triángulo es 12.

Figura 2. Propuesta de actividad reformulada.

Con la actividad reformulada pretendimos observar a partir de las respuestas, si efectivamente el uso funcional de la variable y su articulación con el uso como incógnita influye en la producción de los alumnos. En el enunciado de la actividad optamos por «que dependa de *x*» en lugar de «en función de *x*» para adecuarnos a la terminología empleada en las clases cuando abordamos el tema Función, entendiendo que igualmente se trata de una actividad que involucra a la variable en relación funcional aun siendo que no aparezca explícitamente el término.

Para cada actividad elaboramos una tabla que recoge las respuestas de los estudiantes según las referencias de la tabla 1, diferenciando por grupo. Explicitamos allí el orden en que los profesores abordaron los temas funciones, ecuaciones y expresiones algebraicas en cada grupo en los casos en que se trataba de grupos de segundo año. Ello nos permitió realizar un análisis global de la situación, así como centrarnos en el análisis de los casos que reportaron el error en la actividad original.

ANÁLISIS DE PRODUCCIÓN DE ALUMNOS

Análisis de producciones relativas a la actividad original

Presentamos en esta sección ciertas consideraciones que surgen del análisis de las respuestas de los estudiantes, en primer lugar, desde una perspectiva global y más adelante centrándonos en aspectos específicos que hacen a nuestro estudio, mediante un análisis de casos. Cuando lo consideramos pertinente, detallamos la cantidad de estudiantes que dieron determinada respuesta mediante porcentajes sobre el total de los estudiantes a los que se le aplicó la tarea, dado que el número de estudiantes que realizó una y otra actividad se vio modificado por diferentes motivos; representar los resultados de esta manera nos permitiría una comparación más acertada.

Como primera observación general destacamos la gran cantidad de estudiantes que no responden: 40% del total a quienes se propuso la tarea. Si bien esta omisión no nos permite establecer ninguna conclusión respecto al dominio del concepto de variable, nos sorprende que en algunos grupos se trate de más de la mitad de los estudiantes.

Observamos también que dos de los grupos en donde no se evidenció el error, son los de la profesora 2, quien dictó los temas del curso en el siguiente orden: función, expresiones algebraicas, ecuaciones. De su planificación anual se desprende que gran parte del curso se abordó a partir del tema Función, en particular su expresión analítica dio pie a trabajar con expresiones algebraicas (monomios, monomios semejantes y opuestos, breve introducción a polinomios, reducción de términos semejantes y valor numérico). Además, el cálculo de imágenes y preimágenes se utilizó para presentar el concepto y la resolución de ecuaciones.

El otro grupo en el que tampoco se presentó el error es el que está a cargo de la profesora 9, quien, si bien siguió el mismo orden que la mayoría de los docentes (expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones), realizó un énfasis particular al trabajar en expresiones algebraicas con actividades en las que está en juego la variable en relación funcional.

Las respuestas R2, R3 y R4 involucran el planteamiento correcto de la ecuación a resolver. Un 24% de los estudiantes dieron dichas respuestas, de ellos solo 7% calcularon correctamente la variable. Por otro lado, el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente la actividad, planteando o no la ecuación correspondiente (R4 y R5) fue de 22%.

Nos interesa especialmente analizar las respuestas de estudiantes que evidencian el error reportado (R7, R8, R9 o R10). Si bien este grupo de estudiantes no es muy elevado (18%), considerando que hay una gran cantidad de alumnos que no respondieron, es un número significativo. Constatamos que se dan respuestas de este tipo en los tres niveles analizados, incluso la frecuencia es mayor en los grupos de mayor nivel. Tanto en el grupo de cuarto año como en los dos de tercero el porcentaje de respuestas que evidencian el error es aún mayor que el promedio.

El error que evidencian los estudiantes que respondieron R7 (11%), R8 (3%), R9 (2%) o R10 (2%) podría explicarse como una falta de dominio o desarticulación entre los aspectos que Ursini y Trigueros (2006) denominan: I5, G5, F1 y F6. Lo cual permitiría confirmar lo planteado en los objetivos, los estudiantes parecen cometer el error de asignar distintos valores a la misma variable por tener dificultades al reconocer la relación funcional entre la variable y el perímetro del triángulo. Los estudiantes que dieron respuestas del tipo R7 y R8 particularmente, parecen no reconocer el contexto en el que están trabajando, pues en vez de resolver una ecuación que involucre la suma de los lados igualada al valor del perímetro, igualan las expresiones de los lados utilizando ternas cuya suma sea 12. Al seguir este procedimiento mayoritariamente trabajan correctamente con las tres ecuaciones resultantes y obtienen distintas soluciones para cada una de ellas a pesar de tener la misma variable, lo que puede deberse a que comúnmente en las hojas de actividades utilizadas en clase agregamos ejercicios en los que hay distintas ecuaciones con la misma variable y esto puede resultar confuso para los estudiantes. En el caso de R10 podemos ver una similitud con las respuestas anteriores en relación a los errores de los estudiantes porque estos también plantean tres ecuaciones por separado y llegan a valores distintos de x, pero este caso es particular, ya que todos los lados están igualados a 12. Eso nos permite identificar que los estudiantes tienen dificultades al interpretar los datos dados, interpretan que lo que debe valer 12 es cada uno de los lados y no la suma de ellos. También podría deberse a dificultades para comprender el concepto de perímetro, sería necesario analizar esos casos más detalladamente para poder constatarlo. El error en el caso R9 tiene otra particularidad, los estudiantes tienen dificultades para interpretar las expresiones de los lados y atribuyen a la variable la medida de los lados que buscan. Coincidimos con Ochoviet (2004) en que estas producciones erróneas pueden tener una explicación de carácter lógico, por lo que buscamos este aspecto en la descripción de los usos realizada por Ursini y Trigueros (2006). Detectamos que en el único uso que se considera es en el de la variable en relación funcional, de manera implícita debido a las características propias de una función como relación entre dos conjuntos de variables, pero no lo encontramos presente en los restantes usos.

Análisis de producciones relativas a la actividad reformulada

Esta actividad fue propuesta en la mayoría de los grupos en los que se aplicó la original. En los grupos de segundo año fue aplicada después de haber comenzado a abordar el tema Función como tal, en los de tercer y cuarto año asumimos que los estudiantes tenían alguna noción dado que ya habían cursado segundo año, nivel en el que el tema está explicitado en el programa oficial. En algunos de los grupos no fue posible aplicar la actividad reformulada por diversos motivos, referidos mayormente al desarrollo del curso. Por eso realizamos el análisis tomando en cuenta los porcentajes de las respuestas de estudiantes y atendiendo especialmente los casos de estudiantes cuyas producciones en la primera actividad habían sido catalogadas como R7, R8, R9 o R10.

En este caso tomamos los mismos criterios como referencia para clasificar las respuestas de los estudiantes que usamos para la actividad original (ver tabla 1), ya que podían aplicarse también en este caso. Al analizar las producciones de los estudiantes, surgió, en varios casos, un tipo de respuesta no contemplada en las consideradas anteriormente. Se trata de respuestas que denotan una clara desarticulación entre las partes (a) y (b) de la actividad reformulada, escribiendo una expresión para el perímetro pero sin considerarla para el cálculo de x. En particular, estos estudiantes calculan x para cada lado por separado, planteando tres ecuaciones diferentes y obteniendo diferentes valores. La enunciamos de esta manera: (R11) Expresa el perímetro en función de la variable, y calcula x para cada lado por separado, obteniendo distintos valores para cada uno de ellos.

Transcribimos, como ejemplo, una respuesta dada por un estudiante:

a- $x + 4 \quad 6 - x \quad -2x + 6$

$$\underbrace{x - x} - 2x + \underbrace{6 + 6} + 4$$

$$\underbrace{x - 2x} + \underbrace{12 + 4}$$

$$-2x + 16$$

$$x + 4 = 12 \qquad 6 - x = 12$$

$$x = 12 - 4 \qquad x = 12 - 6$$

$$x = -8 \qquad x = +6$$

$$-2x + 6 = 12$$

$$-2x = \frac{12}{6}$$

$$-2x = \frac{2}{-2}$$

$$x = -1$$

Figura 3. Transcripción de la producción de un estudiante que ilustra el tipo de respuesta R11.

Lo primero que debemos destacar al analizar los datos recabados es que aumentó el porcentaje de estudiantes que responden: de 60% a 76% aproximadamente. Esto es algo que llamó nuestra atención, creemos que pueda darse porque los estudiantes ven más accesible la actividad al estar guiada de alguna manera y ello los motiva a resolverla. Por otra parte, la inclusión de la primera parte de la actividad dio lugar a diversos tipos de errores: al plantear la expresión del perímetro, al intentar reducirla (aunque no fuera solicitado) y al hallar el valor de x para el que el perímetro sea 12. Algunos de estos errores se pueden explicar como la falta de dominio del aspecto G4 (manipular, simplificar, desarrollar la variable simbólica) (Ursini y Trigueros, 2006). Este tipo de errores exceden los intereses de nuestra investigación y por ello no los consideramos para el estudio.

En segundo lugar, detectamos que disminuyó significativamente la cantidad de estudiantes que respondieron según alguna de las respuestas R7, R8, R9 o R10 de la actividad original, y hay cierto desplazamiento de esos estudiantes o de los estudiantes que antes no respondieron a la nueva respuesta, R11, que muestra cierta desarticulación entre los usos.

En tercer lugar, observamos que las respuestas R2 a R6, correspondientes a estudiantes que no presentan el error, aumentó significativamente (de 42% a 58%). Particularmente, si atendemos las respuestas R4 y R5, que son las que corresponden a respuestas finales correctas, detectamos un aumento: de 22 % a 31%.

Este análisis macro de las respuestas dadas a las actividades nos invita a analizar caso a caso las situaciones presentadas por estudiantes que en la actividad original presentaron el error objeto de estudio: asignación simultánea de diferentes valores a una misma variable en un contexto dado. Observamos tres tipos de situaciones diferentes: aquellos en los que el error persiste a pesar de la intervención (subgrupo 1), otros que solo hacen la parte (a) de la actividad reformulada y no siguen (subgrupo 2) y por último, quienes superan el error; al menos a partir de lo que observamos en la experiencia (subgrupo 3).

Presentamos a continuación tres casos que consideramos son representativos de cada uno de esos subgrupos. Dentro del subgrupo 1 presentamos como ejemplo el caso de un alumno (A1), que para resolver la actividad original buscó una terna con suma 12 (5, 5, 2) y luego buscó valores de x para que los lados tuvieran esas medidas. Esa respuesta la catalogamos como R7. En la actividad reformulada A1 escribe una expresión para el perímetro, con errores, y a continuación busca distintos valores de x por cada lado, de manera que el perímetro sea 12. Lo vemos en la transcripción siguiente:

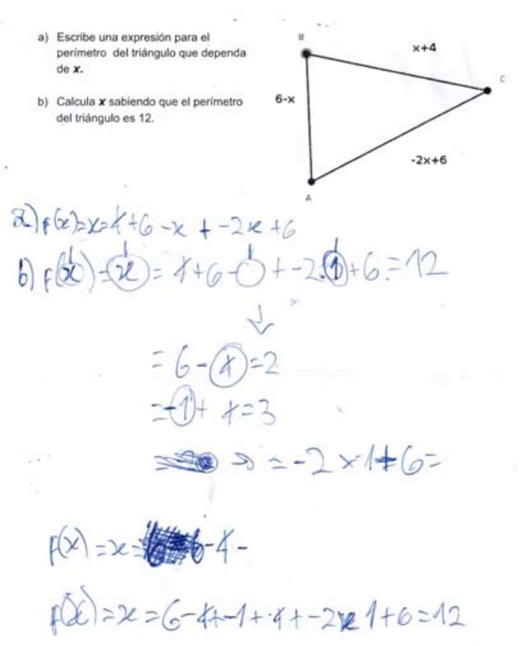


Figura 4. Producción de A1 en la actividad original.

A1 presenta producciones desarticuladas para una y otra parte, no emplea la expresión encontrada para calcular *x*, por lo que catalogamos esta respuesta como R11. En suma, las producciones de este estudiante denotan que el abordaje del tema funciones en el curso y la inclusión de una parte que involucra explícitamente a la variable en relación funcional, no influyeron mayormente en una mejoría en su comprensión de la variable.

En total fueron cuatro los estudiantes que presentaron una situación similar a la de A1, que catalogamos en el subgrupo 1.

El caso de otro estudiante (A2) es representativo del subgrupo 2. En la actividad original iguala cada expresión de los lados a 12, llega a 3 valores de *x* distintos, verifica con errores y obtiene 12. Catalogamos esta respuesta como R10.

Actividad 1

$6 - x = 12$ $\quad$ $x + 2 = 12$ $\quad$ $-2x + 6 = 12$

$x = 18$ $\quad$ $x = 10$ $\quad$ $x = 6$

Buscamos un número que sumándolo o restándolo al resultado dé 12.

Actividad 2

$10 + 2 = 12 - 10 = \boxed{10}$

$-2x + 6 = 12 - (-2 \div 6) = \boxed{6}$

Figura 5. Transcripción de la producción de A2 en la actividad original.

Sin embargo, en la actividad reformulada plantea la expresión para el perímetro y no continúa (R2). Presenta una contradicción en la comprensión del concepto de perímetro: anteriormente consideraba que cada lado por separado era el perímetro, ahora los sumó para obtener la expresión. A los efectos de lo que nos interesa estudiar, no hay planteo alguno que nos indique algún tipo de procedimiento para el cálculo de x en la parte (b) de dicha actividad. No se constata que el error persista, pero tampoco que lo supere. Una razón posible que llevó al alumno a esta situación quizás fue una confrontación de su error, una vez planteada la expresión para el perímetro, pero al no saber cómo proceder entrega en blanco dicha parte, es decir, sin resolverla.

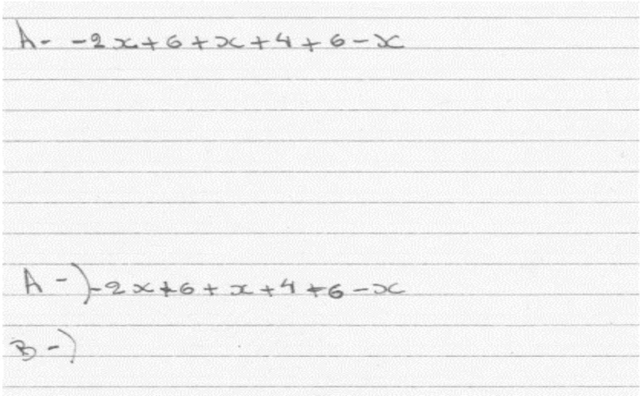


Figura 6. Producción de A2 en la actividad reformulada.

En total fueron seis los estudiantes que presentaron situaciones similares a las de A2, que catalogamos dentro del subgrupo 2.

Por último, para el subgrupo 3 tomamos como ejemplo el caso de A3. En la actividad original divide 12 entre 3 y luego da valores distintos a la variable de forma tal que el perímetro sea 12, es una respuesta del tipo R8.

a) La suma de todos los lados es 12 entonces divido 12 entre 3, porque es un triángulo y tiene 3 lados.

x	*x*	*x*
6 – 2	2 + 2	– 2 x 1 + 6 =

El valor de la *x* de A a C es 2.

El valor de la *x* de C a B es 2.

El valor de la *x* de B a C es 1.

Figura 7. Transcripción de la producción de A3 en la actividad original.

En este ejemplo se ve cómo A3 hace uso de la variable como incógnita y pierde de vista el uso de la variable en su relación funcional. En la actividad reformulada plantea el perímetro en función de x, iguala a 12 y calcula x, es decir, su respuesta a la actividad reformulada es del tipo R4.

a) $6 - x + x + 4 + - 2x + 6$

b) $16 - 2x = 12$

$x = 2$

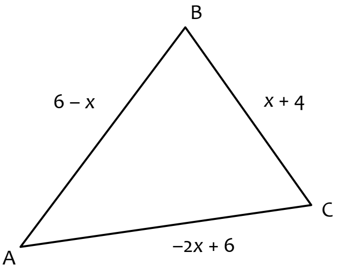


Figura 8. Transcripción de la producción de A3 en la actividad reformulada.

Este es un caso de un alumno que presenta una mejoría en su comprensión de la variable, al menos en lo que hace al planteo de esta actividad. En total fueron nueve los estudiantes que presentaron situaciones similares a las de A3, que catalogamos dentro del subgrupo 3.

En definitiva, observamos que la reflexión sobre el diseño de las actividades, su implementación en diferentes momentos del curso y el análisis de las producciones de los estudiantes empleando el modelo 3UV nos permitieron comprender con mayor profundidad qué es lo que piensan los estudiantes y comenzar a ensayar estrategias para mejorar su comprensión del concepto de variable.

CONCLUSIONES

Con respecto al primer objetivo específico, constatamos que el error detectado originalmente y que dio lugar a la investigación, se presenta en estudiantes de segundo, tercer y cuarto año de enseñanza media. Esto es, aproximadamente 18% de los estudiantes participantes, pertenecientes a los tres niveles, asignaron simultáneamente diferentes valores a una misma variable, en un contexto dado.

En referencia al análisis de las producciones empleando el modelo 3UV (Ursini y Trigueros, 2006), observamos que el modelo tal como está planteado nos resultó útil para explicar algunos aspectos del error reportado: identificamos que en la mayoría de los casos que se presenta esa respuesta, la manera de explicar su producción está dada por una articulación inadecuada entre los usos I5, G5, F1 y F6, especialmente F1 y F6, lo que de alguna manera podría explicarse por el hecho de que los estudiantes aún no habían dado el tema Función en el curso, y por ello no tenían herramientas para formular una situación en términos funcionales.

Sin embargo, hay otras dimensiones del problema que no logramos identificar dentro de los aspectos descritos. A partir de las conclusiones de Ochoviet (2004), pensamos que podrían estar presentes cuestiones lógicas profundas de los fundamentos de la matemática: ¿$x = x$? ¿Por qué? Esto surge de identificar que algunos estudiantes asumen que x no tiene por qué ser igual a x al resolver un problema en contexto intramatemático (perímetro de un triángulo). Dado que la tarea involucra el perímetro, podría pensarse que el error se debe a un problema en la comprensión del concepto de perímetro, pero solo cuatro estudiantes dan la respuesta R10 en la actividad original, que es la que evidencia esa falta de comprensión. Además, al proponerles la actividad reformulada todos los estudiantes responden adecuadamente la primera parte, es decir, entienden que para dar la expresión del perímetro deben sumar las expresiones algebraicas de cada lado.

A partir de lo analizado, nos atrevemos a esbozar recomendaciones en dos planos. En cuanto a las aplicaciones de la Didáctica de la Matemática (DM) para la formación de profesores: creemos que es importante vincular explícitamente la propiedad idéntica de la igualdad ($x = x$) como relación de equivalencia con el planteo de situaciones en las que en un contexto dado aparece una misma variable, en diferentes expresiones algebraicas que se deben integrar para formar una ecuación. Ejemplo de ello puede ser la actividad original relativa al perímetro de un triángulo, o la siguiente:

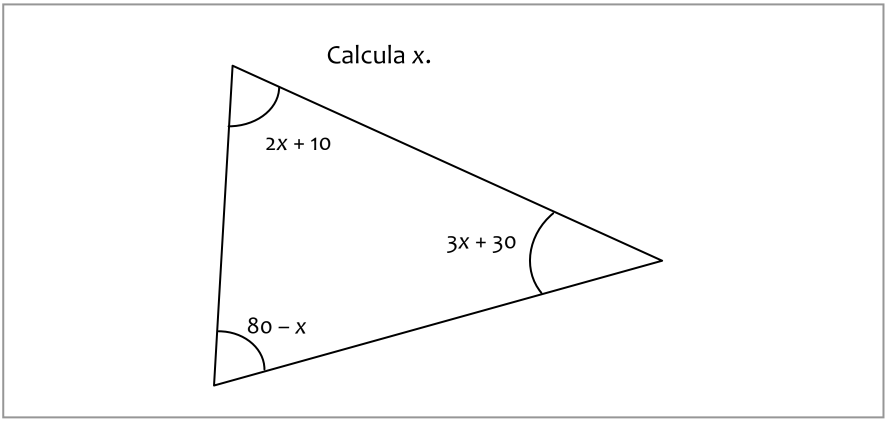


Figura 9. Ejemplo de tarea para vincular propiedad idéntica de la igualdad con la resolución de ecuaciones.

En cuanto a aportes teóricos a la DM, consideramos que este estudio exploratorio nos fue útil para centrar la atención sobre algunos aspectos del modelo 3UV.

En relación al uso como incógnita y como número general, observamos que no se encuentra presente dentro de los aspectos que los describen uno que explicite el aspecto lógico que subyace al concepto de variable: que, en un contexto dado, cada incógnita o número general representa un mismo valor por vez. Sin embargo, esto sí se contempla –de manera implícita– en el uso *relación funcional* a lo largo de los diferentes aspectos que lo describen. Podemos explicar este hecho por una cuestión epistemológica: es intrínseco a la definición de función que a cada valor de la variable independiente le corresponde uno de la variable dependiente, que se halla sustituyendo por un mismo valor. Por ejemplo, si le pedimos a un estudiante que calcule la imagen de 2 y de 3 para una función cuya expresión analítica es $f(x) = x^2 + 5x + 2$, y el estudiante responde sustituyendo en «la primera *x*» por 2 y en «la segunda» por 3, podríamos decir que el estudiante presenta dificultades en F2, es decir, ya tenemos un aspecto que nos permite explicar el error del estudiante.

Pensamos, pues, por un lado, que al pensar en los usos de la variable como incógnita y número general, sería bueno centrar la atención en los aspectos lógicos subyacentes, por ejemplo mediante un aspecto como *reconocer en un contexto dado la representación de cada incógnita como un mismo valor,* o *reconocer que en una expresión cada variable representa un mismo valor por vez*.

Por otro lado, coincidimos con Ursini y Trigueros (2006) en la necesaria articulación entre los usos, tanto cuando diseñamos tareas de enseñanza o evaluación como cuando realizamos intervenciones específicas con estudiantes que presentan problemas en la comprensión de la variable. Articular el uso en relación funcional con los restantes promueve que el estudiante comprenda que una misma variable debe tomar el mismo valor por vez.

Esta observación refuerza la conclusión de Ochoviet (2004) respecto a que es importante que primero el estudiante tenga un dominio de la variable en relación funcional para luego sumergirse en el trabajo algebraico. Cuestión claramente vinculada a nuestro segundo objetivo específico.

Respecto a este, pudimos observar que, de los estudiantes que originalmente habían presentado el error, la mitad mejoraron sus producciones en relación con la tarea que implicaba la comprensión del concepto de variable. Apreciamos un avance específicamente referido al error reportado. Dado que el estudio fue acotado a una sola tarea y su reformulación, y además pudo haberse visto sesgado por el hecho de que los autores fuimos, a su vez, los profesores a cargo de los cursos, es difícil esbozar conclusiones fundadas metodológicamente. Aun así, creemos que este estudio puede aportar evidencias en la línea de lo sugerido por Ochoviet (2004), que recomienda abordar el concepto de función con anterioridad a la unidad de expresiones algebraicas y la de ecuaciones, y la conveniencia de que las tareas que requieran resolución de ecuaciones involucren explícitamente el uso funcional.

REFLEXIONES FINALES

Si bien el trabajo realizado comenzó con motivo de una propuesta para el segundo parcial de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar, a medida que avanzábamos despertó en cada uno de nosotros diferentes intereses y ganas de abordarlo. Esta actividad nos permitió «salir de la caja» y poner en práctica los conocimientos adquiridos en la asignatura. La conexión entre la teoría y la práctica enriqueció nuestra labor y nuestra formación como docentes.

El haber trabajado par a par con la docente a cargo del curso nos condujo a consolidarnos como grupo y a apropiarnos de la propuesta y el material, involucrándonos e integrando todas las opiniones y sugerencias de cada uno. Tuvimos avances y retrocesos, el camino no fue fácil, pero trabajar en un grupo con objetivos en común sirvió para empujar hacia adelante y volver a comenzar.

Como futuros docentes, este estudio nos ayudó a ver que no es necesario realizar una tesis ni una investigación de gran porte para mejorar nuestras prácticas, sino que el trabajo de analizar los simples errores de los estudiantes que aparecen día a día en nuestras aulas nos permite reflexionar, reelaborar y perfeccionarnos como guías de este conocimiento.

Este estudio requirió que en primer lugar detectáramos una problemática de nuestra práctica y la visualizáramos como pertinente a analizar, sin «dejarla pasar». Debimos buscar, seleccionar y leer investigaciones propias de la DM que nos permitieran enmarcar dicha problemática, formular preguntas de investigación, objetivos y herramientas metodológicas para responder dichas preguntas, diseñar actividades con objetivos específicos de investigación, realizar un análisis a priori anticipando posibles respuestas esperadas de los estudiantes, implementar una tarea con fines de investigación (saliéndonos de nuestro rol habitual de docentes en los grupos que tenemos a cargo), analizar producciones empleando un modelo proveniente de la investigación en DM, discernir en qué casos específicos era necesario realizar entrevistas y llevarlas adelante, estudiar los resultados obtenidos y elaborar, de manera conjunta, conclusiones a partir de ellos. Todo ello nos enriqueció como futuros profesores y miembros de la comunidad de educadores matemáticos del Uruguay, sin perder de vista que estamos en continuo aprendizaje de nuestras propias prácticas y del entorno.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010). *Programa de Matemática para segundo año Ciclo Básico, Reformulación 2006*. Uruguay: Autor.

Dulce, N., López, R. y López, A. (2011). Empleo del Modelo 3UV en Álgebra Temprana. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1–8). Recife, Brasil.

Herrera, H., Cuesta, A. y Escalante, J. (2012). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación Matemática*, *24*(1), 107–132.

Ochoviet, C. (2004). ¿$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$? *Reflexiones e implicaciones en la enseñanza de la matemática* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2003). First–year Undergraduates' Difficulties in Working with Different Uses of Variable. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel y F. Hitt (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 12. Research in Collegiate Mathematics Education V, American Mathematical Society in cooperation with Mathematical Association of America* (pp. 1–29).

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, *18*(3), 5–38.

AUTORES

JÉSSICA AGUIRRE es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2018).

CECILIA BENTANCORT es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2018).

LUCÍA BESSONART es egresada del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Historia de la Matemática: abordajes para la Enseñanza Superior del Diploma en Matemática (ANEP, UDELAR, 2018).

GABRIELA BUENDÍA es doctora en Matemática Educativa (CINVESTAV, IPN, México). Se ha desempeñado como profesora e investigadora en CICATA–IPN (México). Actualmente es investigadora del Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

RAQUEL CASTAÑO es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2018).

IGNACIO DOLYENKO es egresado del Instituto de Profesores Artigas. Los escritos de su autoría que se incluyen en esta obra fueron elaborados cuando cursaba Análisis del Discurso Matemático Escolar (2017) y Didáctica III (2018), asignaturas del Profesorado de Matemática.

ALEJANDRO FERNÁNDEZ es profesor de matemática egresado del Centro Regional de Profesores del Suroeste. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Historia de la Matemática: abordajes para la Enseñanza Superior del Diploma en Matemática (ANEP, UDELAR, 2018).

DANIELA GONZÁLEZ es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva fruto de un trabajo elaborado en el marco de la asignatura Didáctica III (2018).

LAURA GONZÁLEZ es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva fruto de un trabajo elaborado en el marco de la asignatura Didáctica III (2018).

ELSA HOURCADE es estudiante de cuarto año del Instituto de Formación Docente de la Costa, en modalidad semipresencial. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de un trabajo elaborado en el marco de la asignatura Didáctica III (2018).

JIMENA LEMES es magíster en *Ensino, Histôria e Filosofia das ciências e matemática* (UFABC, Brasil). Actualmente es estudiante del Doctorado en Didáctica de la Universidad de Lille, Francia. Se desempeñó como docente del curso de Historia de la Matemática: abordajes para la Enseñanza Superior del Diploma en Matemática (ANEP, UDELAR, 2018).

INÉS MIGLIARO es egresada del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Historia de la Matemática: abordajes para la Enseñanza Superior del Diploma en Matemática (ANEP, UDELAR, 2018).

ANDREA MIRANDA es egresada del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2018).

PABLO MIRANDA es estudiante de cuarto año del Instituto de Formación Docente de Canelones, en modalidad semipresencial. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de un trabajo elaborado en el marco de la asignatura Didáctica III (2018).

VERÓNICA MOLFINO es doctora en Matemática Educativa (CICATA–IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

CRISTINA OCHOVIET es doctora en Matemática Educativa (CICATA–IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

SANTIAGO PACHIAROTTI es egresado del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2018).

DANIELA PAGÉS es magíster en Ciencias en Matemática Educativa (CICATA–IPN, México). Se desempeña como docente de Didáctica de la Matemática en el Profesorado Semipresencial y en el Instituto de Profesores Artigas.

PAOLA PATRÓN es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2018).

KAREN RODRÍGUEZ es egresada del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2018).

CÉSAR ROQUETA es egresado del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Historia de la Matemática: abordajes para la Enseñanza Superior del Diploma en Matemática (ANEP, UDELAR, 2018).

ELENA SÁNCHEZ es egresada del Instituto de Formación Docente de Paysandú. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Historia de la Matemática: abordajes para la Enseñanza Superior del Diploma en Matemática (ANEP, UDELAR, 2018).

ELIZABETH SCHEGGIATI es diplomada en Didáctica de la Matemática (UCU). Se desempeña como docente de Didáctica de la Matemática en el Profesorado Semipresencial.

ENRIQUE VÁZQUEZ es egresado del Centro Regional de Profesores del Sur. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Historia de la Matemática: abordajes para la Enseñanza Superior del Diploma en Matemática (ANEP, UDELAR, 2018).

No hay quinto malo, reza un dicho popular que si bien es de origen taurino, se usa para dar cuenta de que *del quinto* siempre se puede esperar algo muy bueno. Y resulta que el V Volumen de *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa* cumple cabalmente con la expresión: se ha instalado una línea original de trabajo que evidencia el proceso creativo de formadores - investigadores - estudiantes - docentes.
Cuando abran este volumen tendrán un escenario fantástico dentro de la Matemática Educativa: acercamientos novedosos y otros más clásicos que analizan el aula de matemáticas a través de una interacción de miradas profundas. Enfatizo la palabra *interacción* y el plural en *miradas* porque gracias a ello este Quinto Volumen sigue marcando rumbo.

Gabriela Buendía
Ciudad de México, diciembre de 2018

ISBN 978-9974-8577-8-0