ANEP- UdelaR

DIPLOMA EN MATEMÁTICA
MENCIÓN ENSEÑANZA

EL DISEÑO DE TAREAS NOVEDOSAS COMO HERRAMIENTA PARA ENSEÑAR EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Presenta:

Daiana Beatriz Rodríguez Larzábal

Directora de tesina:

Cristina Ochoviet

2016, Montevideo – Uruguay

ÍNDICE

Resumen

El aprendizaje acerca de las prácticas docentes va más allá de las prácticas de enseñanza que el futuro docente aprende en los cursos de Didáctica/Práctica, comienza en la etapa escolar y atraviesa todos los cursos académicos. En consecuencia, las prácticas de enseñanza de todos los cursos en los centros de formación constituyen un modelo más que suma a las prácticas de aula previstas en la formación inicial de docentes.

Por ello, es necesario proporcionarles a los profesores de los centros de formación docente herramientas didácticas que puedan ser útiles para desarrollar prácticas más acordes a las recomendadas en la formación de profesores. En este trabajo, vamos a sugerir una herramienta didáctica para el diseño de actividades de enseñanza llamada *actividades novedosas* que aporta al conocimiento didáctico del profesor formador.

Proponemos un proyecto de intervención que posibilite el diseño de *actividades novedosas* por parte de los formadores para que estos puedan apreciar el valor de este tipo de tareas en los procesos de aprendizaje de sus estudiantes.

Palabras clave: intervención didáctica **-** actividades novedosas – conocimiento didáctico del contenido – formación de profesores

Abstract

Learning about teaching practices goes beyond the teaching practices that future teachers learn in methodology courses, it begins at school age and crosses all academic courses. Consequently, teaching practices in all courses in training centers are a model rather than adds to classroom practices provided for in the initial training of teachers.

Therefore it is necessary to provide teacher educators with teaching tools that may be useful to develop the recommended practices in teacher training. In this paper, we suggest an educational tool for designing learning activities called innovative activities which contribute to the pedagogical content knowledge.

We propose an intervention project that enables teacher educators to design innovative activities. This way they will appreciate the value of these tasks in the learning process of their student teachers.

Key words: pedagogical intervention **-** innovative activities **-** pedagogical content knowledge – teacher training

Capítulo 1: Introducción y presentación del proyecto de intervención

1. 1 Introducción

Marcelo (1994) sostiene que el aprendizaje acerca de la enseñanza no comienza en las prácticas de enseñanza de los cursos específicos de didáctica en los centros de formación de profesores, sino que dicho aprendizaje comienza en la escuela primaria y se va desarrollando a medida que el estudiante avanza en sus estudios. Esto incluye los cursos académicos que forman parte del curriculum de la formación de profesores. En este proceso, el alumno va incorporando diferentes aspectos de esas prácticas que posteriormente se convertirán en creencias sobre la enseñanza y, en particular, sobre el *conocimiento didáctico del contenido* (Shulman, 2005) que más tarde se verán reflejadas en sus prácticas docentes.

Nos centraremos en las prácticas de enseñanza en la formación docente pues cumplen un rol fundamental en la formación de futuros profesores. Blanco (1996) sugiere "considerar una metodología activa que es, en cierto sentido, isomorfa con la metodología que deseamos que desarrollen en el futuro nuestros profesores en el aula" (p. 212). Resulta entonces relevante, posibilitar un cambio en la forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, para que los futuros docentes puedan desarrollar prácticas más acordes a las recomendaciones actuales para la enseñanza de la matemática en la enseñanza media.

Por otro lado, tal como afirman García y Blanco (2004), "el conocimiento de un profesor de Matemáticas no es el adecuado para ser formador de profesores de Matemáticas" (p. 486); esta afirmación se fundamenta en que los formadores de profesores de matemática deben tener un cuerpo de conocimientos específicos que les permita "diseñar actividades que generen en los estudiantes para profesores un conocimiento de las representaciones matemáticas entendidas como un instrumento de la labor de enseñar matemáticas" y "crear situaciones en las que se pueda producir una reflexión sobre los procesos de aprender a enseñar matemáticas" (p. 486). Por lo tanto, debemos centrarnos en las prácticas de los formadores de futuros profesores de matemática para procurar que estos cuenten con el cuerpo de conocimientos antes mencionado.

Dalcín, Ochoviet y Olave (2011) recomiendan emprender proyectos de trabajo que atiendan el diseño y gestión de las clases de matemática en formación docente con el objetivo de aportar a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, centrándose, particularmente, en el tipo de prácticas que los formadores desarrollan.

Tomando en cuenta las recomendaciones anteriores es que proponemos en este trabajo un proyecto de intervención orientado a profesores de un instituto de formación de profesores de Uruguay que dictan la asignatura Fundamentos de la Matemática en el primer año de la carrera para obtener el título de Profesor de Educación Media especialidad Matemática.

Si bien las pautas para la elaboración de la tesina no demandan la ejecución del proyecto, decidimos llevar adelante una de las etapas para experimentar y obtener algunas impresiones acerca del trabajo con los docentes. En el capítulo 6 se presenta en detalle.

1. 2 El proyecto de intervención y sus etapas

Con proyecto de intervención nos referimos a la planificación de una serie de acciones para atender una problemática identificada que están orientadas a la concreción de los objetivos propuestos.

Lo que pretendemos con este proyecto es brindar herramientas didácticas a los formadores de futuros profesores de matemática que contribuyan a mejorar las prácticas de enseñanza en la formación docente, aportando a los formadores conocimiento didáctico del contenido.

El proyecto se delineará en cinco etapas. En una primera etapa se va a realizar un taller con los docentes formadores con el objetivo de analizar algunos documentos provenientes de la investigación que aborden la discusión sobre el tipo de prácticas de enseñanza recomendadas para la formación docente.

En una segunda etapa se presentarán a los docentes formadores, en modalidad de taller, los distintos tipos de actividades planteadas por Oktaç, García y Ramírez (2007) y cuál es su importancia (se incluirán actividades novedosas de estos autores, otras tomadas de prácticos del curso Fundamentos y otras originales pensadas para este proyecto). Nos centraremos particularmente en el análisis y el diseño de las actividades novedosas. El objetivo de esta etapa es que los docentes tengan una primera aproximación a este tipo de actividades e invitar a los docentes a continuar con el diseño y experimentación en sus clases, de este tipo de actividades.

La tercera etapa consistirá en el diseño de actividades novedosas por parte de los docentes responsables de la asignatura Fundamentos trabajando en modalidad colaborativa con el profesor responsable de la intervención.

La cuarta etapa consistirá en realizar una puesta en escena de las actividades (a cargo de los docentes responsables de asignatura), se observarán estas clases y se reflexionará sobre ellas junto a los docentes formadores. Luego, en otra instancia, se socializará la experiencia con todo el grupo de profesores de matemática de la institución y se realizará una reflexión crítica sobre lo sucedido en clase. Se espera realizar esta actividad con todos los docentes que deseen participar en forma voluntaria.

La quinta y última etapa consistirá en la realización de entrevistas individuales y grupales para conocer el impacto que tuvo la experiencia a nivel de la sala docente de un instituto de formación docente.

Capítulo 2: Revisión bibliográfica y formulación de objetivos

2. 1 Revisión bibliográfica

A continuación, reportaremos algunos trabajos que guardan relación con la problemática que deseamos abordar ya que buscan contribuir al conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 2005) de formadores de profesores de matemática.

Pinto (2010) estudia el conocimiento didáctico del contenido propuesto por Shulman (2005), sobre estadística, concretamente sobre representación gráfica (RG) de datos estadísticos en profesores de estadística de carreras de psicología y educación. Dicho trabajo consiste en un estudio de casos de dos profesores con diferente formación: uno en psicología y otro con una maestría en matemática. El investigador entrevista a ambos profesores enfocándose en aspectos del programa del curso de estadística, planificación de la clase, concepciones sobre estadística, su enseñanza y su aprendizaje y el conocimiento del currículo sobre RG. Realizó además un cuestionario sobre este último que consistió en situaciones hipotéticas de enseñanza.

De dicha entrevista y cuestionario, Pinto (2010) concluye que: en ambos profesores se observó una imagen limitada, obsoleta de RG y excesivamente formal, que fue evidenciada en sus argumentaciones. Los dos profesores entrevistados recurren a experiencias propias o de compañeros para construir el conocimiento estadístico a enseñar. Pinto observa que, si bien la concepción de la estadística y su enseñanza en ambos profesores es diferente, esto no ocurre con la concepción de RG.

El profesor con formación en psicología tiene una concepción de la Estadística pragmático-constructivista. La concibe como una herramienta que permite ayudar a entender lo que está sucediendo en el entorno y en la solución de diversas problemáticas del contexto. Su enseñanza se caracteriza por darle sentido y significado a los datos a partir de contextos reales, fomentando la investigación científica. Se interesa mucho sobre las teorías del aprendizaje y para él tiene mucho valor el aprendizaje situado y la socialización del conocimiento.

Por otra parte, la profesora con formación en Matemática concibe a la Estadística como parte de la matemática, sin hacer referencia al campo de la educación estadística. Tiene una concepción hacia la naturaleza de la Estadística dogmático-conservador, basada en explicar y proporcionar ejemplos a los estudiantes, con un marcado énfasis en el trabajo de aula.

Ninguno de los dos profesores le da a la RG mucha importancia. La enseñanza de la RG es excesivamente formal, con poca oportunidad de diseñar experimentos, analizar datos o conectar el estudio de la RG con el desarrollo del pensamiento estadístico.

Pinto (2010) afirma que la falta de contextualización en el estudio de la RG se puede deber a un limitado conocimiento del tema, de las estrategias de enseñanza y del conocimiento del estudiante, como también al currículo.

Otra de las carencias que observó el investigador en el conocimiento didáctico del contenido de los docentes fue el escaso y limitado repertorio sobre las estrategias de enseñanza de la RG. Preguntar y dar instrucciones son las únicas estrategias utilizadas para trabajar con el error y las dificultades de los estudiantes. Además, los profesores desconocen los avances en investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística así como los recursos didácticos disponibles. Por ello, la utilización de recursos y materiales variados para la enseñanza de la RG constituye otra dificultad, limitándose a usar textos antiguos que transmiten una concepción de la RG como técnica de graficación.

Frente a las conclusiones obtenidas, Pinto (2010) finaliza el trabajo sugiriendo "planificar, desarrollar, implementar y evaluar programas de formación de profesores con enfoques diferentes a los actuales, a la luz de la educación estadística, centrados en el desarrollo del CDC en Estadística" (p.400).

Bocanegra, Galeano y Huérfano (2013) diseñaron herramientas didácticas que posibilitan la apropiación de algunos elementos históricos de los conceptos de potencia y logaritmo por parte del formador de profesores de matemática con el objetivo de potenciar el uso de los recursos didácticos que ayudan a mejorar sus prácticas docentes, ampliando su conocimiento didáctico del contenido.

En una primera etapa, los investigadores realizaron un análisis y clasificación de documentos referidos a la historia de la función exponencial utilizando como referente para el análisis el conocimiento didáctico del contenido de Shulman (2005), luego determinaron los aportes de dichos documentos a este tipo de conocimiento del profesor de matemática. En una etapa posterior eligieron una herramienta didáctica de uso común en la formación de profesores de matemática reportada en Tirosh y Wood (2008) que relaciona los Hitos Históricos y el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemática: *tareas* y *lecciones.*

En una última etapa, diseñaron tres tareas[1], las que en una primera instancia fueron elaboradas por cada investigador de forma independiente. Después, dichas propuestas fueron evaluadas por los demás investigadores que no participaron de su elaboración con el propósito de aportar ideas. De la socialización de estas con los investigadores que las elaboraron surgieron versiones mejoradas de las mismas. Y, finalmente, las compartieron con su asesor quien dio sugerencias y recomendaciones importantes sobre el potencial de cada una de ellas.

Una de las conclusiones a las que arribaron Bocanegra et al. (2013) fue que el diseño de tareas contribuye al conocimiento didáctico del contenido del profesor ya que aportan al conocimiento matemático, permiten relacionar diferentes contenidos y encontrar sentido a los conceptos trabajados en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, y motivan a los estudiantes. Pueden ser consideradas un apoyo al conocimiento didáctico del contenido del profesor ya que le permite conocer diferentes concepciones de un mismo concepto y trabajarlo desde diferentes enfoques, legitimando otros tipos de prácticas, permitiendo reconocer dificultades comunes al trabajar un determinado tema.

Bocanegra et al. (2013) también concluyeron que a raíz del estudio histórico de la función exponencial, se pudo observar que “los conceptos matemáticos no son independientes en su desarrollo sino que tienen su origen en otras ideas que dieron lugar a su consolidación” (p. 127). Esto fortalece el conocimiento didáctico del contenido del profesor dado que le permite transformar la visión que tiene de estos conceptos.

[1] “Relación entre la serie aritmética y geométrica desde la representación tabular”, “Área bajo la hipérbola equilátera y su relación con el logaritmo natural” y “Notaciones de los conceptos logaritmo y exponencial”.

Beltrán y Lázaro (2014) identificaron cuáles son los tipos de conocimientos manifestados al enseñar por parte de un formador de profesores de matemática encargado del componente didáctico. También estudiaron cómo se relacionan estos conocimientos entre sí y los compararon con el conocimiento de un profesor de matemática. La metodología utilizada fue: registro de video de las clases, entrevista directa y observación indirecta de las actuaciones de la profesora. Esta docente tiene una formación universitaria en Licenciatura en Matemática y un posgrado como Magíster en Docencia de la Matemática y actualmente se desempeña como formadora de docentes en la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá. Beltrán y Lázaro concluyen que uno de los conocimientos manifestados por la docente es el disciplinar y que además utiliza ampliamente la historia de la matemática. La docente fundamentó su uso en que considera que la comprensión de una tarea o concepto matemático se puede mejorar haciendo uso del conocimiento histórico. Por lo tanto, la docente busca fortalecer el conocimiento didáctico del contenido del futuro profesor de matemática mostrando la historia como una herramienta que le permite comprender y superar las dificultades que pueden presentar sus alumnos.

Otros de los conocimientos manifestados por esta docente son: el conocimiento práctico, el curricular y el didáctico del contenido. Respecto a estos conocimientos los investigadores afirman que:

> …se considera que un formador de profesores de Matemáticas, bien sea que forme en el componente disciplinar de las Matemáticas mismas o en el componente Didáctico, debería relacionar su conocimiento Matemático con su conocimiento Didáctico y reflejar dichos conocimientos en su propia enseñanza, para reforzar el desarrollo del CDC en los docentes en formación y de paso enriquecer sus propias prácticas de enseñanza. (Beltrán y Lázaro, 2014, p. 113)

Respecto a la relación entre los conocimientos del formador de profesores encargado del componente didáctico y el profesor de matemática, específicamente sobre el conocimiento didáctico del contenido, los autores concluyen que ambos se comportan de forma análoga, la diferencia radica en la estructura, debido a que los sujetos (estudiantes) y los objetos que intervienen en la enseñanza no son los mismos. Por ejemplo, un profesor de didáctica no solo debe conocer los errores y dificultades de los estudiantes (como un profesor de matemática) sino que además debe hacerlos evidentes a sus estudiantes (futuros docentes) y enseñarles cómo trabajar con ellos en sus clases de secundaria, lo que implica un cambio en el discurso y en las acciones dentro del aula.

Ochoviet y Olave (2009) analizaron los modelos docentes de los profesores de un instituto de formación docente de Uruguay y contrastaron estos modelos con lo que las investigaciones sugieren en torno a cómo deberían formarse los futuros profesores de matemática.

Las técnicas utilizadas fueron la observación de clases y la entrevista; se apuntó a estudiar aspectos cualitativos de las prácticas docentes y del pensamiento de los profesores.

Las autoras detectaron tres modelos docentes:

> … el modelo centrado en la enseñanza o modelo tradicional, un modelo de transición en el que se intenta desarrollar el abordaje de los contenidos con la participación activa de los estudiantes -en mayor o menor grado- y un modelo centrado en el aprendizaje que rompe, a diferencia de los otros dos, con la clase frontal y se caracteriza por favorecer las interacciones multidireccionales. (Ochoviet y Olave, 2009, p.40)

Otra de las conclusiones a la que arribaron las autoras fue que la mayoría de las clases observadas están lejos de ser acordes con las recomendaciones de investigaciones sobre como deberían formarse los futuros profesores de matemática.

Dalcín, Ochoviet y Olave (2011) buscaron identificar el referente epistemológico de los formadores de futuros profesores de matemática en un instituto de formación de profesores de Uruguay, centrándose en la relación del profesor con el conocimiento y en la relación de este con los procesos de enseñanza.

Identificaron dos tipos de referente: uno estático y otro dinámico. Las clases identificadas con un referente estático son expositivas, con mínima participación del estudiante, quien se remite únicamente a responder preguntas de respuestas inmediatas realizadas por el profesor. En este caso, el conocimiento es visto por el profesor como algo ya creado que el profesor posee y debe transmitir. En las clases de los docentes identificados con el referente dinámico el conocimiento es visto por el profesor como algo inacabado, el profesor aprende continuamente. El conocimiento es concebido como una construcción social y negociada, siendo responsabilidad del profesor y del alumno organizar y transformar ese conocimiento. Los procesos de enseñanza se modifican continuamente. Los profesores en sus clases apuntan a crear situaciones de enseñanza que permitan a sus alumnos realizar un trabajo matemático sostenido en: conjeturar, debatir, consensuar, demostrar, comunicar, etc.

Dalcín et al. (2011) concluyen que son dos las razones por las que los profesores responden a un referente epistemológico estático: una de ellas es que el profesor tiene una idea equivocada de qué significa favorecer la participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento. La otra es la imposibilidad, por parte del docente, de diseñar actividades acordes a un referente epistemológico dinámico debido a que el docente no cuenta con formación didáctica específica.

Estos autores recomiendan emprender proyectos de trabajo que atiendan el diseño y gestión de las clases de matemática en formación docente con el objetivo de aportar a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, centrándose, particularmente, en el tipo de prácticas que los formadores desarrollan, estimulando a los formadores de profesores de matemática a que puedan ensayar con libertad otras prácticas educativas no tradicionales.

En síntesis, algunos investigadores sugieren planificar e implementar programas de formación de profesores con enfoques diferentes a los actuales, centrados en el desarrollo del conocimiento didáctico el contenido. Otros, emprender proyectos de trabajo que atiendan el diseño y gestión de las clases de matemática en formación docente para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, centrándose, particularmente, en el tipo de prácticas que los formadores desarrollan.

En esta última línea, nos propondremos en este trabajo aportar a los formadores de futuros profesores de matemática una herramienta didáctica para el diseño de actividades de enseñanza llamada *actividades novedosas* (Oktaç et al., 2007) que entendemos puede contribuir a prácticas de enseñanza más ricas en todos los sentidos.

2. 2 Formulación de objetivos

Objetivo General

Contribuir a la mejora de las prácticas de enseñanza de la formación de profesores de matemática aportando a los formadores conocimiento didáctico del contenido a través del diseño y puesta en práctica de actividades novedosas en el marco de un proyecto de intervención didáctica.

Objetivos específicos

- Diseñar, a manera de ejemplo, dos actividades novedosas para el aprendizaje de contenidos del curso de Fundamentos de primer año de la formación de profesores de matemática (a cargo de la docente responsable de la intervención para el avance presentado en este trabajo).
- Introducir a los profesores formadores en el diseño de actividades novedosas, acompañarlos en su implementación en clase y posteriormente reflexionar sobre su potencial didáctico en el marco de un proyecto de intervención didáctica.

Capítulo 3: Marco teórico

Esta sección tiene el cometido de dar a conocer los fundamentos teóricos que sustentan nuestro trabajo. En este proyecto nos hemos propuesto contribuir al Conocimiento Didáctico del Contenido (Shulman, 2005) del formador de profesores de matemática, a través del diseño y puesta en práctica de *actividades novedosas* (Oktaç et al., 2007).

3. 1 Los conocimientos para la docencia

Shulman (2005) expone los conocimientos indispensables para el ejercicio de la docencia que, según el autor, todo profesional de la enseñanza debe poseer como mínimo:

- Conocimiento de la materia impartida.
- Conocimientos pedagógicos generales: principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura.
- Conocimiento del currículo.
- Conocimiento didáctico del contenido (CDC) está formado por las conexiones entre los conocimientos didácticos y los de la materia del profesor, permitiendo la transformación del contenido para su enseñanza. El CDC incluye las concepciones, valores y creencias de lo que significa enseñar una determinada materia en un determinado nivel y contexto, así como las decisiones curriculares sobre los materiales y medios, objetivos que se proponen en las clases, las tareas apropiadas y los criterios y formas empleadas para la evaluación del aprendizaje.
- Conocimiento de los estudiantes y sus características.
- Conocimiento de los contextos educativos que incluye desde el funcionamiento y gestión del grupo y el financiamiento de la institución hasta el carácter de las comunidades y culturas con las que se trabaja.
- Conocimiento de los objetivos y de los fines de la educación así como sus fundamentos filosóficos e históricos.

Las fuentes que le permiten al profesor poder comprender todos estos conocimientos son:

> 1) formación académica en la disciplina a enseñar; 2) los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, los currículos, los libros de texto, la

> organización escolar y la financiación, y la estructura de la profesión docente); 3) la investigación sobre la escolarización; las organizaciones sociales; el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores; y 4) la sabiduría que otorga la práctica misma. (Shulman, 2005, p.11)

De todos estos conocimientos, el CDC es el de mayor importancia pues representa la mezcla entre materia y didáctica en la que se puede comprender cómo determinado tema o problema se organiza y se adapta a los intereses y capacidades del estudiante para luego ser expuesto para su enseñanza. El CDC es "esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional" (Shulman, 2005, p. 11). El CDC trasciende al profesor individual y forma un cuerpo de conocimientos y destrezas que distingue a la enseñanza como una profesión.

3. 2 Diseño de actividades novedosas

Nuestro trabajo lo focalizaremos en el diseño de *actividades novedosas* propuestas por Oktaç et al. (2007).

Estos autores realizaron un trabajo cuyo objetivo fue presentar una clasificación de actividades y agregar un nuevo tipo de actividad a dicha clasificación: las actividades novedosas, justificando por qué son pertinentes en la práctica del profesor.

Los siete tipos de actividades que describen los autores y que pueden resultar útiles para los profesores al momento de planificar la enseñanza son: preguntas de desempeño, preguntas "por qué" inesperadas, preguntas de giro, actividades de construcción, actividades de dar un ejemplo, preguntas de reflexión y actividades novedosas.

Las actividades novedosas se caracterizan por ser desafiantes, pues difieren a las ya realizadas con anterioridad por los estudiantes y no es habitual encontrarlas en libros de texto. Además, les requieren a los estudiantes ir más allá de los conceptos estudiados pues ponen en juego algún aspecto nuevo del concepto trabajado. Su resolución demanda creatividad además de reflexión sobre los conceptos adquiridos anteriormente.

Las actividades novedosas desestabilizan al estudiante, hacen que deba recurrir a la definición del concepto matemático involucrado y que ponga en juego diferentes maneras de pensar los objetos matemáticos.

Este tipo de actividades permite al docente: fomentar la creatividad del alumno, evidenciar intuiciones, concepciones sobre conceptos enseñados, ideas erróneas, formas de resolución alternativas.

Un ejemplo de actividad novedosa propuesto por Oktaç et al. (2007) es el siguiente:

> ¿Es posible colocar una tercera recta a la figura siguiente para que el sistema representado a) ¿no tenga solución? b) ¿tenga infinidad de soluciones? c) ¿tenga única solución? Si es posible, explique cómo. Si no es posible, explique por qué.

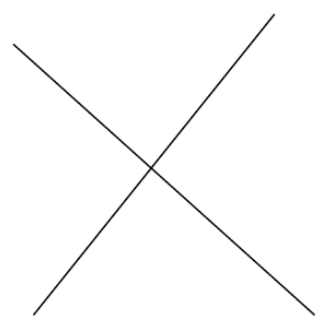

Figura 1. Fuente: Oktaç et al. (2007), p.8.

Los autores dicen que es una actividad novedosa porque permite observar cómo el estudiante interpreta el concepto de solución de un sistema en un contexto gráfico. El estudiante deberá acudir al concepto para contestar las preguntas porque la tarea es presentada en un contexto diferente dado que no es habitual trabajar con sistemas de ecuaciones sin tener un sistema explícito.

Otra de las razones por las que los autores consideran que es una actividad novedosa es que es un tipo de pregunta que no está incluida en los libros de texto ni en el discurso del docente. Por lo general, en los libros de texto y en las aulas se incluyen resolución de sistemas de ecuaciones cuadrados dados a través de sus ecuaciones. Trabajar gráficamente sin tener un sistema explícito, en sistemas no cuadrados, puede constituir un desafío para el estudiante.

Esta actividad permite detectar las dificultades de los estudiantes fuera de un contexto de uso de algoritmos, así como interpretaciones erróneas e intuiciones.

Además, trabajar con una actividad abierta como esta, que rompe con sus preconceptos (en sistemas no cuadrados rectas secantes dos a dos no implican sistemas compatibles determinados), permitirá al estudiante observar que el número de soluciones de la actividad es infinito o cero; esto constituye otro desafío para él.

Otro de los ejemplos presentado por los autores es el siguiente:

> ¿Existe alguna TL que mapee los vectores A, B de la figura 4 a los vectores T(A) y T(B) de la figura 5? Justifica tu respuesta.

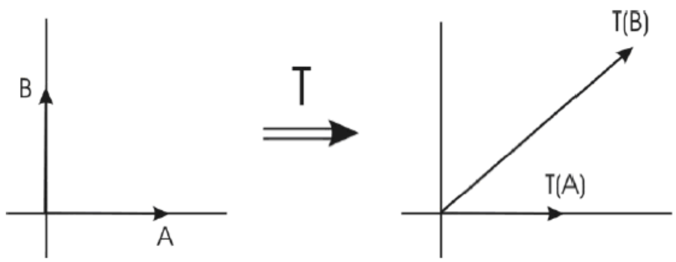

Figura 4. **Figura 5.**

Figura 2. Fuente: Oktaç et al. (2007), p.8.

Los autores dicen que esta es una actividad novedosa porque a partir de ella el profesor podrá evidenciar intuiciones geométricas que tienen sus estudiantes de transformación lineal dado que la misma no está definida algebraicamente.

Oktaç et al. (2007) afirman que muchos estudiantes no consideran que exista una transformación lineal que transforme los vectores A y B en T(A) y T(B) respectivamente, pues la imagen del vector A es el mismo y no sucede lo mismo con el vector B. Dicha afirmación refleja que esta actividad no suele encontrarse en libros de texto ni el discurso del profesor, por lo que el estudiante no está familiarizado con transformaciones lineales que no están definidas por una fórmula explícita.

Además, permite detectar algunas concepciones erróneas sobre las transformaciones lineales, como puede ser considerar una transformación lineal como la transformación de un único vector y no como una función que transforma todo el plano. Esto se puede deber a la imagen conceptual que desarrollan los estudiantes, consecuencia de que tanto los profesores como los libros de texto muestran ejemplos gráficos de un único vector y su imagen.

Si bien Oktaç et al. (2007) aclaran que las actividades novedosas no están presentes en el discurso del docente ni en los libros de texto, el carácter de novedosas está también ligado a las experiencias previas de los estudiantes. Por ejemplo, una determinada actividad puede ser novedosa cuando se inicia el estudio de un tema y no serlo en la fase de síntesis del tema. Aunque los autores no hacen referencia a este asunto, planteamos el carácter subjetivo que comporta el clasificar una tarea como novedosa.

Capítulo 4: Método

Esta propuesta está concebida como un proyecto de intervención que consiste en la planificación de una serie de acciones para atender una problemática identificada (descrita en el capítulo 1), orientadas a la concreción de los objetivos propuestos (descritos en el capítulo 2).

Nuestro proyecto de intervención está orientado a profesores de un instituto de formación de profesores que dictan la asignatura Fundamentos de la Matemática en el primer año de la carrera para obtener el título de Profesor de Educación Media especialidad Matemática.

Dicho proyecto de intervención se delineará en cinco etapas. En una primera etapa se va a realizar un taller con profesores formadores que dictan el curso de Fundamentos de la Matemática en un instituto de formación docente con el objetivo de estudiar algunos artículos de investigación que aborden la discusión sobre el tipo de prácticas de enseñanza recomendadas para la formación de profesores de matemática. Para cumplir con el objetivo, es necesario que los docentes comprendan las investigaciones presentadas ya que podrán aportar al CDC, entre otros conocimientos base de la enseñanza (Shulman, 2005). La modalidad utilizada en esta instancia será el debate a partir de recortes de investigaciones sobre prácticas de enseñanza de futuros profesores de matemática.

Se iniciará el taller compartiendo el plan de trabajo del mismo. Más tarde, se propondrá la primera actividad que consta de varias preguntas para ser realizada en grupos (se presenta más adelante). Se les pedirá que formen tres grupos. A cada uno se le entregará un documento con fragmentos de una investigación del tema: prácticas de enseñanza en un instituto de formación docente, junto a una serie de preguntas que deberán contestar. Cada documento a presentar tratará una investigación diferente, pero todos tienen en común que abordan las prácticas en la formación de profesores de matemática. Las preguntas a responder desde cada documento serán las mismas.

Para finalizar el taller se realizará un debate sobre las preguntas y reflexiones realizadas.

Los documentos que se utilizarán para este primer taller son:

- Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes?* Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN, México, pp. 176-192.

- Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olave, M. (2011). Una mirada a las prácticas de los formadores de futuros profesores de matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza. *UNION*, 28, 85-97.

- Ochoviet, C. y Olave, M. (2009). *Los modelos docentes en la formación de profesores de matemática: elementos para repensar los ambientes didácticos*. (No publicado). Montevideo: Dirección de Formación y Perfeccionamiento Docente (DF y PD).

Actividad

1. Realicen la lectura del documento entregado.
2. ¿Qué modelos docentes fueron identificados en este trabajo?
3. Como formador de futuros profesores de matemática, ¿qué modelo docente le parece que está transmitiendo a sus estudiantes, futuros profesores? ¿Por qué? ¿Qué aspectos de su práctica docente lo llevan a reconocerse en ese modelo?
4. ¿Qué tipo de formador de profesores de matemática desearía llegar a ser? ¿Por qué? ¿Qué falta?

En una segunda etapa se presentarán a los docentes formadores, en modalidad de taller, los distintos tipos de actividades planteadas por Oktaç et al. (2007) y cuál es su importancia para la enseñanza de la matemática. Nos centraremos particularmente en el análisis y diseño de actividades novedosas. Analizaremos las actividades propuestas por Oktaç et al. (2007) como ejemplo de actividades novedosas y dos actividades de los prácticos de divisibilidad y de polinomios del curso de Fundamentos de la Matemática de la carrera de Profesorado para Educación Media especialidad Matemática, para analizar si son novedosas (un análisis detallado de estas actividades se encontrará en el Capítulo 5). También abordaremos el componente subjetivo que permite clasificar a las actividades en novedosas o no y que está ligado a las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes. Además, se presentarán actividades originales diseñadas para este proyecto, para que los docentes analicen si son novedosas.

En síntesis, les propondremos a los docentes un taller en el que deberán:

- analizar y clasificar actividades,

- discutir cuáles deberían ser los conocimientos previos de los estudiantes para que algunas de ellas pudieran considerarse novedosas,
- reformular aquellas actividades que no hayan sido consideradas novedosas para que sí lo sean.

El objetivo de esta etapa es que los docentes tengan una primera aproximación a este tipo de actividades y contribuir a su CDC.

La tercera etapa consistirá en el diseño de actividades novedosas por parte de los docentes responsables de la asignatura Fundamentos trabajando en modalidad colaborativa con el profesor responsable de la intervención.

La cuarta etapa consistirá en la puesta en escena de las actividades (a cargo de los docentes responsables de asignatura) y se propondrá a los docentes formadores concurrir a observar esas clases, con coordinación previa, para luego hacer la reflexión posterior a las mismas. Luego, en otra instancia, se socializará la experiencia con todo el grupo de profesores de matemática de la institución y se realizará una reflexión crítica sobre lo sucedido en clase. Se espera realizar esta actividad con todos los docentes que deseen participar en forma voluntaria.

La quinta y última etapa consistirá en la realización de entrevistas individuales y grupales para conocer el impacto que tuvo la experiencia a nivel de la sala docente de un instituto de formación docente. Esta etapa se desarrollará dos o tres meses después de haber culminado la etapa anterior, dando lugar a que, espontáneamente, algunos profesores planifiquen y pongan en práctica actividades novedosas en sus clases.

En una primera instancia, se realizarán entrevistas individuales para tener una visión particular del uso de las actividades novedosas y en las que se preguntará:

¿Ha trabajado con actividades novedosas?

En caso afirmativo, ¿cuáles son las ventajas y desventajas que encontró al trabajar con ellas?

¿Qué le aporta al futuro profesor que su formador trabaje con ellas?

¿Se le presentó alguna dificultad? ¿Cuál?

¿Cómo se sintió al utilizar dichas actividades?

> A futuro, ¿cree conveniente continuar incluyendo actividades novedosas en algunas de sus clases? ¿Por qué?

En la entrevista grupal se invitará a los docentes a que compartan experiencias de trabajo con actividades novedosas, abordando aspectos como: en qué curso propusieron la actividad, cuál fue el objetivo y la metodología utilizada, cuál fue su análisis a priori y a posteriori, qué ventajas y desventajas encontraron con dicha actividad, cuáles consideran que son los beneficios para los futuros profesores tanto desde el punto de vista de su aprendizaje como de su incidencia a nivel metodológico.

Capítulo 5: Ideas para el desarrollo de la segunda etapa del proyecto

5. 1 Análisis de dos actividades tomadas de prácticos de la formación de profesores

Realizamos la revisión de los prácticos de la asignatura Fundamentos de la Matemática, correspondiente al primer año de la carrera de profesorado de Matemática. En particular los prácticos considerados son extraídos del curso que se dicta en el Instituto de Profesores Artigas. Detectamos dos actividades que podrían ser consideradas novedosas (y explicaremos por qué) aunque será un aspecto a discutir en el taller, es decir, plantearemos a los docentes participantes si consideran que son o no novedosas y por qué. Nos interesa poner el foco en las características particulares de estas actividades y discutirlas con los formadores.

Una de las actividades que seleccionamos refiere a divisibilidad en el conjunto de los polinomios sobre un cuerpo K ($K[X],+,\bullet$).

Actividad 1[2]

Supongamos que, en lugar de trabajar con R, consideramos los siguientes polinomios en $Z_3 : F = X^3 + X^2 + X$ y $G = X^2 + 2X$.

(a) Según tus conocimientos previos, los polinomios F y G, ¿son iguales?

(b) Considera las funciones $f : Z_3 \to Z_3$, $f(x) = x^3 + x^2 + x$ y $g : Z_3 \to Z_3$, $g(x) = x^2 + 2x$.

Halla las imágenes de todos los elementos del dominio según ambas funciones. ¿Qué observas? ¿Qué puedes decir acerca de las funciones *f* y *g*?

Con esta actividad lo que se pretende es justamente poner en evidencia que los polinomios no "se comportan" siempre de igual forma que sus funciones polinómicas asociadas.

Para su realización algunos estudiantes podrán acudir a los conceptos previos y a la imagen conceptual que tienen de igualdad de polinomios y podrán responder que los polinomios F y G son diferentes porque tienen grados diferentes y los coeficientes de los monomios semejantes son diferentes.

[2] Actividad extraída de: Franco y Siberio (2013b), p. 1.

Otros, quizás tengan en cuenta que no se está trabajando en el conjunto de los números reales como se trabaja en bachillerato y ante la duda de qué contestar prefieran cambiar el orden a las preguntas. Aun así, algunos alumnos podrán responder que las funciones son iguales porque la correspondencia de los elementos del dominio es la misma en ambas funciones. Sin embargo, es factible que afirmen que los polinomios son diferentes porque seguramente utilicen sus conocimientos previos de trabajar en el conjunto de los números reales.

Respecto a la parte b, los alumnos podrán hallar las imágenes de los elementos del dominio en ambas funciones y observar que los correspondientes son los mismos.

Es decir: $f(0) = g(0) = 0$

$f(1) = g(1) = 0$

$f(2) = g(2) = 2$

Al momento de responder la pregunta: ¿Qué puedes decir acerca de las funciones f y g?, algunos estudiantes podrán contestar que las funciones son diferentes porque la expresión analítica de f y g son diferentes. Esta podrá ser la respuesta de un estudiante que contesta según sus conocimientos previos y que tiene la imagen conceptual de función polinómica construida en secundaria, cuyo dominio y codominio eran los reales.

Otros estudiantes quizás no respondan de forma inmediata, recurran a la definición de función y concluyan que, como el dominio, el codominio y la regla de asignación es la misma, las funciones son iguales.

Consideramos que es un ejemplo de actividad novedosa para el alumno ya que:

- Escapa a las realizadas anteriormente por el estudiante y a las habituales en los libros de texto, ya que el dominio y el codominio no es el conjunto de los números reales sino que es el conjunto de los enteros módulo 3. Detalle que hace que cambien las nociones previas y la imagen conceptual que el estudiante tiene de igualdad de funciones.
- Desestabiliza al estudiante, ya que en ambas funciones los correspondientes de los elementos del dominio son los mismos, lo que conduce al estudiante a recurrir a la definición de función y que deba reflexionar sobre dicha definición y sobre la igualdad de funciones. Al recurrir a la definición de función el alumno descubre un aspecto nuevo para él de la igualdad de funciones polinómicas, descubre que para que las

funciones sean iguales además de tener igual dominio y codominio deben cumplir que todo elemento del dominio tenga la misma imagen en ambas funciones, pero no tienen por qué tener igual expresión analítica.

Esta actividad pone en evidencia cómo el estudiante relaciona los polinomios y las funciones polinómicas. También, cómo interpreta las nociones matemáticas involucradas como: la definición de polinomio, función, Z_3, igualdad de polinomios, igualdad de funciones. Además, permite evidenciar intuiciones o concepciones erróneas como pensar que para que dos funciones polinómicas sean iguales la terna dominio, codominio, expresión analítica debe ser la misma o pensar que dos polinomios son iguales si las funciones polinómicas asociadas son iguales.

Actividad 2[3]

i) ¿Qué condición deben cumplir los números *a* para que tengan 12 divisores y MCD (*a*, 225) = 15?

ii) Halla *a* para que cumpla además que la suma de sus divisores sea 168.

La noción matemática que debe tener en cuenta el estudiante es el concepto de máximo común divisor (MCD). Además, debe conocer cómo obtener el número de divisores de un número natural.

Para su resolución el estudiante no podrá emplear la definición de MCD como el mayor de los divisores comunes de dos números naturales porque el estudiante no cuenta con ambos naturales. Lo que podrá emplear será otro enfoque del concepto de MCD: el MCD de dos números naturales es el producto de factores primos comunes en la descomposición en factores primos de ambos naturales con el menor exponente. Lo que lleva a que el número natural *a* sea de la forma $a = 5.3.q$ siendo *q* un natural que no admite como divisores ni a 3 ni a 5 ya que el menor exponente que deben tener el 3 y el 5 es 1 y en la descomposición factorial de 225 el exponente de ambos es 2.

[3] Actividad extraída de Franco y Siberio (2013a), p.19.

Como la cantidad de divisores de a es 12 = 2.2.3, utilizando la fórmula que permite hallar el cardinal del conjunto de divisores de un número natural[4] se concluye que q debe ser el cuadrado de un número primo distinto de 3 y 5.
El estudiante podrá finalizar la actividad afirmando que la condición que deben cumplir los naturales a es que deben ser de la forma $a = 5.3.p^2$ con p primo distinto de 3 y 5.

Para resolver la segunda parte de la actividad el estudiante deberá utilizar un resultado[5] visto por él en actividades previas a esta en el práctico del que fue extraída la actividad. Lo único que deberá tener en cuenta es la expresión a la que arribó en la primera parte de la actividad y el resultado visto anteriormente. Entendemos que esta parte de la actividad no le presentará mayor dificultad al estudiante y no la consideramos, a priori, una tarea novedosa.

La actividad está pensada para ser propuesta a estudiantes de primer año de profesorado de matemática, que quizás, anteriormente, cursaron quinto año diversificación científica. En matemática II de dicha diversificación, los estudiantes trabajan con divisibilidad en el conjunto de los números naturales y más precisamente con el concepto de máximo común divisor. Por lo que consideramos que al momento de plantear la actividad 2, los estudiantes conocen el otro aspecto del MCD[6] trabajado en dicha actividad. De esta forma, el estudiante no deberá acudir a la definición de MCD, no deberá poner en juego ningún aspecto nuevo del MCD, ni deberá reflexionar para resolver la actividad, sino que deberá aplicar dos resultados vistos previamente. Incluso, si ya ha realizado alguna actividad similar, no en cuanto a la consigna, sino a las estrategias de resolución, no constituirá un desafío para el estudiante. Consideramos que, para aquellos estudiantes en particular, que cursaron Matemática II en bachillerato y hayan realizaron una actividad similar, ya sea en la propuesta o en la metodología utilizada para su resolución, esta actividad no corresponde a una actividad novedosa. En

[4] Si $n = p_1^{a_1}. p_2^{a_2}. \dots .p_k^{a_k}$ es la descomposición en factores primos del número natural n, el número de divisores $v(n)$ está dado por: $v(n) = (a_1+1) . (a_2+1) . \dots . (a_k+1)$.

[5] Actividad 6): "Utilizando la conclusión anterior, prueba que el número de divisores de n ($v(n)$) es $v(n) = (a_1+1) . (a_2+1) . \dots . (a_n+1)$ y que la suma de todos ellos es $S_n = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_n^{a_n+1}-1}{p_n-1}$." Actividad extraída de Franco y Siberio (2013a), p.17.

[6] El MCD de dos números naturales es el producto de los factores primos comunes en la descomposición en factores primos de ambos naturales con el menor exponente.

cambio, para aquellos estudiantes que no cursaron Matemática II o no realizaron actividades similares puede ser considerada una actividad novedosa.
También es preciso observar que ser o no ser una actividad novedosa es relativo, dependiendo de los conocimientos y las experiencias previas de los estudiantes que la trabajarán.

En caso de que el estudiante no haya optado por cursar la diversificación científica y trabaje con la actividad por primera vez, la primera parte de la actividad puede ser considerada una actividad novedosa ya que escapa a las actividades realizadas anteriormente y pone en juego otro aspecto de MCD no visto hasta el momento.

5. 2 Actividades novedosas diseñadas para este proyecto

En esta sección presentamos y analizamos las actividades novedosas presentadas para este proyecto.

Actividad 3

¿Qué polinomios de coeficientes reales admiten exactamente un número primo de divisores mónicos?

En el curso de Fundamentos, los conceptos que se trabajan en el tema divisibilidad de polinomios son: divisor, múltiplo, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, polinomios primos y polinomios primos entre sí. Como hallar la cantidad de divisores mónicos de un polinomio no forma parte de los contenidos del curso, esta actividad puede ser considerada un desafío para el estudiante ya que escapa a las realizadas anteriormente en el curso. Esta es una de las primeras razones por la que la consideramos una actividad novedosa.

Frente a la pregunta propuesta el estudiante podrá pensar en la expresión que le permite calcular la cantidad de divisores de un número natural e intentar utilizarla con los polinomios ya que conoce la definición de polinomio primo[7] así como la descomposición en factores irreducibles de un polinomio. Le podrán surgir las siguientes preguntas: ¿funcionará tal expresión con los polinomios? Dicha expresión, ¿tendrá alguna restricción cuando se trabaja con los polinomios? Para dar respuesta a estas preguntas, el estudiante podrá trasladarse al tema divisibilidad en N y pensar qué le permitió llegar a tal expresión, el estudiante podrá reflexionar sobre conceptos ya adquiridos. Conocer la expresión que indica la cantidad de divisores de un natural no es suficiente para aplicarla en el conjunto de los polinomios ya que podría suceder que esta no funcionara, es necesario estudiar otro aspecto de la misma: su justificación. Siendo esta otra de las razones para afirmar que la actividad es novedosa. Una vez que revise la justificación de dicha expresión en el conjunto de los naturales, podrá volver al tema polinomios, pensar en la definición de divisor de un polinomio y justificar dicha expresión con los polinomios, teniendo en cuenta la justificación que hizo cuando trabajó en el conjunto de los naturales.

Una de las observaciones que puede realizar el estudiante es que como los polinomios no tienen una cantidad finita de divisores, la expresión que está pensando construir, similar a la expresión que indica la cantidad de divisores de un número natural, le sirve únicamente para calcular la cantidad de divisores mónicos de un polinomio.

El estudiante podrá partir de que, si la descomposición en factores primos de un número natural n es $n = p_1^{a_1}.\ p_2^{a_2}.\ \dots\ .p_k^{a_k}$ entonces la cantidad de divisores de n es: $v(n) = (a_1+1)\ .\ (a_2+1)\ .\ \dots\ .\ (a_k+1)$.
Usando dicho resultado, podrá concluir que, si la descomposición en factores primos o irreducibles en el conjunto de los números reales de un polinomio A es $A = \mathrm{P}_1^{a_1}\ .\ \mathrm{P}_2^{a_2}\ .\ \dots\ .\ \mathrm{P}_k^{a_k}$ entonces la cantidad de divisores mónicos de A es: $(a_1+1)\ .\ (a_2+1)\ .\ \dots\ .\ (a_k+1)$.

Una vez que el estudiante pruebe que dicha expresión también funciona cuando se trabaja con los polinomios, el estudiante podrá responder la pregunta. Podrá concluir que los polinomios que admiten un número primo de divisores deben ser de la forma:

[7] Un polinomio *A* de coeficientes reales con grado mayor que cero es primo (o irreducible) si y solo si es divisible únicamente entre *k* y *kA* siendo *k* un número real distinto de cero.

una potencia de base un polinomio irreducible y exponente una unidad menos que el número primo dado.

Otra de las razones por la que clasificamos la actividad como novedosa es que le permite al docente evidenciar concepciones erróneas que tenga el estudiante, como la justificación de la expresión que utiliza para resolver el ejercicio, la noción de divisor de un natural y de un polinomio, la definición de polinomio primo, polinomio irreducible, polinomio mónico. Así como las intuiciones que tenga el estudiante, acertadas o no. Un ejemplo podría ser que el alumno intuya que la expresión para hallar la cantidad de divisores en los naturales funciona cuando trabaja con los polinomios. Otro ejemplo podría ser que el estudiante conciba que en la descomposición factorial de un polinomio, la base de las potencias son siempre polinomios mónicos de primer grado y responda en la actividad que en el polinomio pedido la base de la potencia debe ser un polinomio mónico de primer grado.

Actividad 4

¿Cuáles son las funciones polinómicas de dominio y codominio real biyectivas?

En el práctico de funciones biyectivas del curso de Fundamentos se puede observar que los ejercicios propuestos son del tipo: dada la función de forma explícita (de segundo grado como máximo) clasificarla, donde la forma de resolución es analítica en la mayoría de los casos. La actividad que proponemos rompe con el tipo de consignas planteadas en el curso de Fundamentos pues en este caso no se da la expresión analítica de la función. Por lo que puede ser un desafío para el estudiante, aspecto característico de las actividades novedosas.

Este tipo de actividad podrá desestabilizar al estudiante porque si pensara en trabajar con la interpretación analítica de la definición de función biyectiva, tal como se hace habitualmente, implicaría un trabajo bastante tedioso. El estudiante debe trabajar entonces con otro aspecto de la definición de biyectividad: la interpretación gráfica.

Otra de las razones por la que puede considerarse una actividad novedosa es que le exige al estudiante creatividad además de reflexión, el estudiante debe pensar cómo son las gráficas de las funciones biyectivas para pensar en las gráficas de las funciones polinómicas. El estudiante podrá ir pensando en las gráficas de las funciones polinómicas por grado, deteniéndose en cada grado, para repasar las diferentes gráficas existentes para el mismo grado y quedarse con aquellas que representen funciones biyectivas. Las funciones polinómicas de primer grado constituyen un primer ejemplo de lo solicitado, pero consideramos que las que jugarán un lugar clave para avanzar en la búsqueda son las gráficas de las funciones polinómicas de tercer grado. Es posible que dentro del repertorio gráfico con el que cuenta el estudiante, centre en primer lugar su atención en la función de dominio y codominio real definida por $f(x) = x^3$ y detecte que es biyectiva, luego podría pensar en las funciones cuyos gráficos son traslaciones o contracciones del de f. El estudiante podrá sacar algunas conclusiones previas antes de responder la pregunta, lo que le requiere ir más allá del concepto estudiado, poniendo en juego aspectos nuevos del concepto de función biyectiva.

- La función debe de ser estrictamente creciente o decreciente, por lo que el signo de la derivada primera debe ser constante (si este conocimiento está disponible).
- No puede ser una función de grado par ya que estas no son estrictamente crecientes o decrecientes.
- Debe tener una raíz (para que sea sobreyectiva) y además esta ser única (para que sea inyectiva).
- Si se traslada con dirección vertical u horizontal, se simetriza respecto a los ejes, o se contrae el gráfico de una función biyectiva de dominio y codominio real, sigue siendo biyectiva.

El estudiante podría concluir que las funciones de dominio y codominio real, cuya expresión analítica sea un polinomio con coeficientes pertenecientes al conjunto de los números reales de grado impar con una raíz de máxima multiplicidad posible son biyectivas, así como sus traslaciones o contracciones. Podrían conjeturar que las funciones polinómicas de dominio y codominio real cuya expresión analítica es de la forma: $p(x) = a \cdot (x - \beta)^{2n+1} + b$ con n natural y a, β, b números reales con a distinto de cero, son biyectivas.

El estudiante podrá observar que como las funciones deben de ser estrictamente monótonas de grado impar, la función derivada debe ser de grado par con signo invariante, por lo que todas las raíces de la función derivada deberán ser de multiplicidad par o no tener raíces. Es decir, si el polinomio es de tercer grado la función derivada puede tener una raíz real doble (siendo el caso que encontramos en el párrafo anterior con n = 1) o no tener raíces reales, por lo que las funciones polinómicas biyectivas de tercer grado serán de la forma: $p(x) = a \cdot (x - \beta)^3 + b$ o $p(x) = \int q(x)dx$ con $q(x)$ polinomio de segundo grado sin raíces reales.

Si es de quinto grado el repertorio es mayor, la función derivada puede tener una raíz real cuarta (n = 2), dos raíces reales dobles, una raíz real doble, o no tener raíces reales y las funciones polinómicas de quinto grado biyectivas serán de la forma: $p(x) = a \cdot (x - \beta)^5 + b$ o $\int q(x)dx$ con $q(x)$ polinomio de cuarto grado con dos raíces reales dobles, una raíz real doble o sin raíces reales.

Si se sigue el razonamiento, el estudiante podrá concluir que las funciones polinómicas biyectivas son de la forma: $p(x) = a \cdot (x - \beta)^{2n+1} + b$ o $\int q(x)dx$ siendo $q(x)$ un polinomio de grado $2n$ sin raíces reales o con raíces reales de multiplicidad par, con n perteneciente al conjunto de los números naturales. De los dos tipos de soluciones, el primero (el polinomio de grado $2n$+1) es un caso particular del segundo (el de la integral).

Otra de las razones por la que consideramos que la actividad es novedosa es porque le permite evidenciar al docente concepciones sobre conceptos ya abordados como puede ser la interpretación gráfica del concepto de función biyectiva incluyéndose la relación monotonía – inyectividad, así como la representación gráfica de las diferentes funciones polinómicas.

La actividad permite evidenciar intuiciones acertadas o no como que las funciones polinómicas monótonas son únicamente las de grado impar que tienen una raíz de multiplicidad igual al grado del polinomio o que en una traslación la función deja de ser biyectiva.

5.3 Diseño del taller para la segunda etapa

A continuación presentamos la secuenciación del taller correspondiente a la segunda etapa del proyecto de intervención (en el Capítulo 6 se analizará su desarrollo en detalle). En este taller se presentará el concepto de actividades novedosas y se propondrán actividades para analizar y discutir junto a los docentes participantes. Dado que el tiempo disponible para el taller es acotado (se estiman dos horas), se discutirá con los participantes una sola de las actividades novedosas originales pensadas para este proyecto (la Actividad 4).

1. Exposición breve y ejemplificación de los tipos de actividades presentadas en Oktaç, et al. (2007) que son tomadas de Zazkis y Hazzan (1999, referido en Oktaç et al., 2007):

- preguntas de desempeño,
- preguntas “por qué” inesperadas,
- preguntas de giro,
- actividades de construcción,
- actividades de dar un ejemplo,
- preguntas de reflexión.

2. Oktaç et al. (2007) agregan un nuevo tipo de actividad a esta clasificación: las *actividades novedosas.* Las actividades novedosas se caracterizan por:

- ser desafiantes, no son comunes para los estudiantes y no se encuentran habitualmente en los libros de texto.
- poner en juego aspectos nuevos de conceptos trabajados.
- exigir al alumno creatividad y reflexión.
- desestabilizar al estudiante para que le sea necesario recurrir a la definición del concepto matemático.
- poner en evidencia las intuiciones, las concepciones inadecuadas sobre conceptos enseñados y formas de resolución alternativas.

3. Ejemplificación de las actividades novedosas propuestas por Oktaç et al. (2007, p. 8). Discusión.

4. Analizar si dos actividades tomadas de los prácticos de Fundamentos son novedosas (Actividades 1 y 2 ya analizadas en la Sección 5.1). Discusión.

5. Se propondrá la siguiente situación a los profesores participantes y se promoverá un debate.

La siguiente actividad, ¿es novedosa? ¿Por qué?

¿Cuáles son las funciones polinómicas de dominio y codominio real que son biyectivas?

¿Cuál podría ser el potencial de la actividad anterior al trabajarla con los estudiantes en un curso de Fundamentos?

¿Utilizarían esta actividad en sus cursos de Fundamentos?

¿Les gustaría seguir trabajando en el diseño de actividades novedosas?

Capítulo 6: Avance de la segunda etapa del proyecto de intervención

Dado el alcance de esta tesina, presentamos un avance de la segunda etapa del proyecto de intervención.

6. 1 Taller sobre actividades novedosas y análisis de las reacciones de los docentes participantes

Trabajamos actividades novedosas con dos profesores (P1 y P2) del curso de Fundamentos de Profesorado de Matemática en un Instituto de Formación de Profesores de Uruguay en la modalidad de taller. P1 es docente de esta asignatura desde hace ocho años y P2 es la segunda vez que tiene a su cargo el curso de Fundamentos de la Matemática. Ambos docentes poseen título de Profesor de Matemática y estudios de posgrado. El taller tenía el cometido de presentar a los profesores las actividades novedosas, analizar si algunas actividades eran o no novedosas y observar el grado de receptibilidad de ellos frente a tales actividades.

Para comenzar se les informó a los participantes que el taller formaba parte de la elaboración de la tesina para finalizar el Diploma en Matemática mención Enseñanza y muy brevemente en qué consiste la tesina. Se expuso también cuál es el propósito de trabajar con las actividades novedosas. Se explicó cómo surgen dichas actividades, exponiendo muy brevemente la clasificación de Oktaç et al. (2007). Luego nos focalizamos en las actividades novedosas: las caracterizamos y presentamos los dos ejemplos propuestos por Oktaç et al. (2007) justificando por qué cada una de ellas es considerada una actividad novedosa de acuerdo a los criterios utilizados por los autores.

Ejemplo 1, tomado de Oktaç et al. (2007):

> ¿Es posible colocar una tercera recta a la figura siguiente para que el sistema representado a) ¿no tenga solución? b) ¿tenga infinidad de soluciones? c) ¿tenga única solución? Si es posible, explique cómo. Si no es posible, explique por qué.

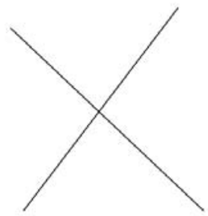

Figura 1. Fuente: Oktaç et al. (2007), p.8.

Luego de presentar el primer ejemplo y explicar las razones por las que los autores la consideraban una actividad novedosa, los profesores participantes no formularon preguntas.

Se presentó entonces el segundo ejemplo y se expuso por qué es una actividad novedosa:

Ejemplo 2, tomado de Oktaç et al. (2007):

> ¿Existe alguna TL que mapee los vectores A, B de la figura 4 a los vectores T(A) y T(B) de la figura 5? Justifica tu respuesta.

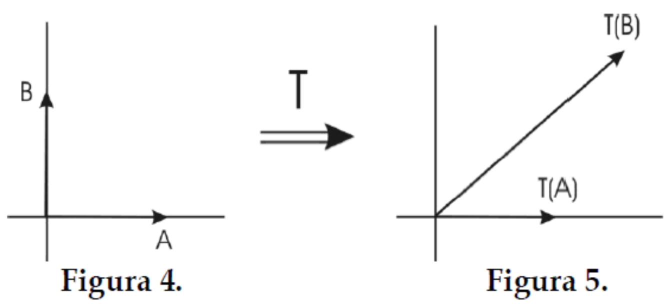

Figura 2. Fuente: Oktaç et al. (2007), p.8.

Cuando se presentó el segundo ejemplo, la actividad de transformación lineal, el profesor P2 se quedó pensando… y preguntó "*¿Cómo encontrar la transformación lineal si no se tienen las coordenadas de los vectores?*", haciendo alusión a que no podía encontrar la transformación lineal algebraicamente tal como estaba acostumbrado a hacerlo. Se cuestionó cómo encontrar la imagen de un vector en esa transformación lineal trabajando solamente en forma geométrica, se preguntó en voz alta: "*¿Y cómo encuentro la imagen de un vector en esa transformación lineal?*". Evidenciándose en sus preguntas que este tipo de actividades no se encuentra en libros de texto ni el discurso docente y que además es desafiante para un profesor de matemática. Lo que implica que sea más desafiante para un estudiante, ya que el profesor cuenta con más herramientas matemáticas que los estudiantes.

Una vez que se presentaron los ejemplos propuestos por Oktaç et al. (2007), se les propuso dos actividades extraídas del curso de Fundamentos de los prácticos de polinomios y divisibilidad. Si bien forman parte del discurso docente por encontrarse en los prácticos del curso nos interesó partir de actividades conocidas por los docentes como primera aproximación al análisis de actividades novedosas para capitalizar el conocimiento que ya tenían de ellas. Concretamente, se preguntó a los docentes: ¿podrían ser consideradas novedosas?

Actividad 1 (extraída de Franco y Siberio (2013b), p. 1)

Supongamos que, en lugar de trabajar con R, consideramos los siguientes polinomios en $Z_3 : F = X^3 + X^2 + X$ y $G = X^2 + 2X$.
(a) Según tus conocimientos previos, los polinomios *F* y *G*, ¿son iguales?
(b) Considera las funciones $f : Z_3 \to Z_3$, $f(x) = x^3 + x^2 + x$ y $g : Z_3 \to Z_3$, $g(x) = x^2 + 2x$. Halla las imágenes de todos los elementos del dominio según ambas funciones. ¿Qué observas? ¿Qué puedes decir acerca de las funciones *f* y *g*?

Para contestar a la pregunta planteada, los profesores fueron revisando las características que debían cumplir las actividades novedosas, planteándose como interrogante cada una de las características. En caso de que faltara analizar alguna característica, la pregunta fue realizada por la responsable del taller.

Frente a la pregunta: *¿Puede ser considerada desafiante para el alumno?* El profesor P2 respondió: "*Dependiendo de los conocimientos previos del alumno, si se presenta al comenzar el curso puede ser considerada novedosa, pero si se presenta una vez que ya se han trabajado el tema función polinómica y polinomios, no*". El profesor P1 añade: "*Es una actividad que se propone al principio del curso, por lo que los conocimientos previos son los que han trabajado en bachillerato. La primera parte no la encuentro desafiante ya que ellos pueden recurrir a lo que trabajaron en secundaria y contesten que los polinomios no son iguales. Mientras que la segunda parte al estar tan guiada* *puede no ser tan desafiante, realizan las diferentes partes y concluyen que las funciones son diferentes*". El profesor P2 agrega: "*Considero que puede ser desafiante ya que rompe con los esquemas que ellos traen de trabajar con los reales en secundaria, esa estructura de que las funciones polinómicas son idénticas si tienen igual dominio, codominio y polinomio asociado*". De acuerdo a las respuestas de los profesores podemos concluir que, de ser una actividad guiada pierde el carácter de ser desafiante por un lado; por otro, al ser una actividad que rompe con preconceptos muy arraigados de los estudiantes adquiridos en secundaria, puede ser considerada desafiante para el alumno.

Cuando se les preguntó: *¿es habitual encontrarlas en libros de texto o en el discurso docente?* El profesor P1 contesta: "*Yo no he visto una actividad similar, era una actividad que la tenía planteada [Daniel] en los apuntes del curso y yo le di forma*". El profesor P2 contesta: "*En secundaria se trabaja con funciones de dominio el conjunto de los números reales pero yo no he visto anteriormente actividades parecidas*". Por lo que se puede concluir que ambos profesores coinciden en que es una actividad que no se encuentra ni en libros de texto, ni en el discurso docente.

Luego se les preguntó*: ¿Es necesario de creatividad y reflexión para la resolución de la actividad?*

El profesor P1 responde: "*No es necesario de creatividad para realizarla porque está muy pautada, quizás reflexión si, en la segunda parte deben reflexionar sobre el concepto de igualdad de funciones*". El profesor P2 comparte con el profesor P1 que el estudiante debe reflexionar sobre algunos conceptos como: igualdad de funciones, definición de función, igualdad de polinomios. Por lo que, se concluye que, así como está planteada la actividad puede no ser una actividad que le exija al estudiante creatividad para su resolución, pero sí le exige reflexión de conceptos vistos anteriormente.

Luego se les consultó: *¿Desestabiliza al estudiante?*

El profesor P2 responde: "*Creo que los desestabiliza, los hace pensar, ya que las funciones si fueran con dominio en el conjunto de los reales, como ellos estaban* *acostumbrados, no eran iguales, pero al trabajar en otro cuerpo, las funciones son iguales*". El profesor P1 agrega, "*Al estar tan pautada la actividad, se desprende que las funciones son iguales, quizás si la pregunta de la segunda parte fuera ¿son iguales las funciones? ahí sí lo desestabilizaría al estudiante*". Las opiniones están divididas, un profesor considera que la pregunta es desestabilizante para el estudiante ya que debe acudir al concepto de igualdad de funciones porque con la imagen conceptual que los estudiantes tienen de secundaria no es suficiente para responder pues con esta el estudiante asocia funciones idénticas a expresiones analíticas idénticas. Mientras que el otro profesor considera que es una actividad guiada lo que permite que la respuesta sea casi inmediata, sin tener en cuenta la imagen conceptual de los estudiantes. Cabe rescatar que, si bien el profesor P1 considera que no es desafiante así como él mismo la propuso, durante el taller pensó en cambiarla para transformarla en una actividad desafiante. Concluimos que analizar esta actividad con los lentes de las actividades novedosas le permitió al profesor mejorar su repertorio de actividades de aula y por ende enriqueció su CDC (Shulman, 2005).

Al preguntarles: *¿Se puede evidenciar concepciones erróneas de conceptos enseñados?*, el profesor P2 responde: "*Igualdad de polinomios, igualdad de función, trabaja en* Z_3", respuesta que comparte el profesor P1.

De la revisión de las características de las actividades novedosas, los profesores concluyen que esta actividad cumple con la mayoría de ellas. Por ello, puede ser considerada novedosa.

Una vez analizada la primera actividad del curso de Fundamentos se pasó a analizar la segunda actividad, siendo la consigna la misma que la actividad anterior: *¿Podría ser considerada una actividad novedosa?*

Actividad 2 (extraída de Franco y Siberio (2013a), p. 19)

i) ¿Qué condición deben cumplir los números a para que tengan 12 divisores y MCD (a, 225) = 15?
ii) Halla a para que cumpla además que la suma de sus divisores sea 168.

La metodología utilizada para averiguar si correspondía a una actividad novedosa fue la misma que la actividad anterior, revisar cada una de las características.

Se les preguntó: *¿Se encuentra en libros de texto o en el discurso docente? ¿Es desafiante?*

El profesor P2 considera que es una actividad típica de divisibilidad y que él la trabaja con sus alumnos de quinto año en bachillerato. Mientras que el profesor P1, considera que: "*La mayor parte de las actividades de divisibilidad tienen la particularidad de hacer pensar a los estudiantes salvo que ya se les haya presentado una similar anteriormente. Pero, si se le presenta por primera vez al estudiante, lo hace pensar, va probando con casos particulares hasta llegar a cómo debe ser la solución, lo que implica que la respuesta no sea inmediata, que no tenga una forma de resolver ya pensada porque realizó una actividad similar, por lo que podría ser considerada desafiante*". El profesor P1 afirma que la segunda parte de esta actividad puede ser más mecánica.

De la respuesta de ambos profesores se puede extraer que, si bien este tipo de actividades pueden ser encontradas en el discurso del docente, cuando la actividad es presentada por primera vez a los estudiantes, sin haber realizado ninguna similar anteriormente, es desafiante para el estudiante ya que la repuesta no es inmediata y la forma de resolución tampoco. Se puede afirmar que el ser desafiante depende de los antecedentes de los estudiantes. Es decir, en un mismo grupo de un curso de Fundamentos, para algunos estudiantes esta actividad puede ser un desafío, mientras que para otros no, dependiendo de las actividades que hayan realizado anteriormente del tema divisibilidad.

Luego se les consultó: *¿Pone en juego aspectos nuevos de conceptos ya trabajados?*

El profesor P2 responde: "S*i el alumno no hizo una anteriormente puede poner en juego otro aspecto del MCD, el de la descomposición factorial, por ejemplo*".

Los antecedentes de los estudiantes además de determinar si la actividad es desafiante o no determinan si al momento de resolverla se ponen en juego aspectos nuevos de conceptos ya trabajados. Pues, como menciona el profesor P1 si el estudiante anteriormente no ha resuelto ninguna actividad donde se ponga en juego la descomposición factorial del MCD, esta actividad sí lo hará y en caso contrario no.

Se les preguntó a continuación: *¿Exige al alumno creatividad y reflexión? ¿Desestabiliza al estudiante?*

Ambas preguntas quedan sujetas a los antecedentes del alumno, en caso de que el estudiante no haya realizado anteriormente una actividad similar, los profesores consideran que puede desestabilizar al estudiante. En una primera instancia el estudiante podrá buscar posibles soluciones por tanteo, probando con posibles números naturales. Para, en una etapa posterior, recurrir a la definición de MCD para poder reflexionar sobre ella, además de algunas nociones matemáticas vistas anteriormente como la noción de divisor, descomposición factorial de un natural.

De esta actividad propuesta en el repartido de divisibilidad del curso de Fundamentos, los profesores concluyen que clasificarla como una actividad novedosa depende de los antecedentes de los estudiantes del grupo en el que se trabaje con ella.

Una vez que se les propuso a los profesores P1 y P2 las actividades extraídas del curso de Fundamentos para que las clasificaran, se les presentó una última actividad, creada especialmente para la tesina. El objetivo de esta actividad era que analizaran si era novedosa y que opinaran sobre el potencial de la misma. También se les consultó si la propondrían en sus cursos de Fundamentos.

Se optó por presentarles a los profesores solo una de las dos actividades creadas especialmente para la tesina considerando que los docentes formadores accedieron a participar en un taller de dos horas. Elegimos la siguiente actividad porque entendemos que tiene más potencial que la Actividad 3 pues puede ser resuelta usando diferentes caminos, vincula nociones de distintas unidades del curso y de distintos cursos, el estudiante puede trabajar en diferentes registros de representación, etc.

Actividad

¿Cuáles son las funciones polinómicas de dominio y codominio real biyectivas?

En un principio, cuando se les propuso la actividad a los profesores, pensaron en cómo resolverla y enseguida comenzaron a discutir entre ellos. En la discusión surgieron ideas muy interesantes. En un principio el profesor P1 dijo: *"Trabajaría desde lo gráfico, ni me mataría pensando qué funciones del tipo* ax^3+bx^2+cx+d *por ejemplo son biyectivas"*, luego se puso a pensar en voz alta qué funciones podían ser biyectivas, comenzando con las de primer grado, las de segundo y después con las de tercer grado. Descartó la función de grado dos y concluyó que el polinomio asociado debía ser de grado impar. En la discusión también surgió que debía tener únicamente una raíz. Luego pensaron en la multiplicidad de la raíz, discutieron sobre el tema y concluyeron que debía tener orden de multiplicidad impar. Más tarde comenzaron a descartar los gráficos de las funciones de tercer grado que no correspondían a funciones biyectivas. Afirmaron que debían ser crecientes o decrecientes, quedándose con funciones de tercer grado con una raíz triple y sus traslaciones.

El profesor P2 dice: *"Puede ser de tercer grado con una raíz simple y dos complejas"*. Luego se da cuenta que no cualquiera le sirve, ya que puede ser una traslación vertical de una función con tres raíces distintas. Siguen discutiendo y surgen cuestionamientos del tipo: *"¿Esa en la que estás pensando (haciendo referencia a la función polinómica de tercer grado con una raíz real y dos complejas) no será una traslación vertical de una función polinómica de raíz triple?"*. El profesor P2 añade "*¿La derivada de la función* $(x - 1)(x^2 + 1)$ *no tiene raíces complejas?*", se quedan pensando si todas las funciones polinómicas de dominio y codominio real cuya expresión analítica sea el producto de un polinomio de primer grado por uno de segundo grado sin raíces reales siempre podrá tener derivada con raíces complejas y, si es así, cómo será el gráfico.

De esta reflexión realizada por los profesores pudimos concluir que el repertorio que tienen los profesores de los gráficos de las funciones de tercer grado se limita a cuatro tipos de gráficos de funciones polinómicas de tercer grado. Ellas son: funciones de tercer grado con tres raíces reales diferentes, una raíz triple, una doble y una simple y aquella con una raíz simple resultado de trasladar verticalmente una función de tercer grado con tres raíces reales diferentes. Los profesores no consideraron el gráfico de una función polinómica de tercer grado con una raíz simple, monótona, como la de expresión analítica que ejemplificó el profesor P2: $(x - 1)(x^2+1)$, que afirma que es biyectiva a partir de la derivada, pero no desde el gráfico.

Cuando los profesores empezaron a buscar la función polinómica pensando en cómo debía ser el signo de la función derivada, se empezaron a cuestionar si los estudiantes tendrían los conocimientos previos como para poder trabajar con signo de la función derivada y con el concepto de integral. El profesor P1 añadió: "E*n mi curso, en particular, trabajo con problemas que los puedan resolver desde lo algebraico no desde el análisis, ya que tendrán un curso posterior de análisis para poder trabajar*". Pero, aun así, dicha actividad puede ser resuelta en el curso del profesor P1 analizando los diferentes gráficos de algunas funciones polinómicas, sin tener la necesidad de llegar a una expresión general. Lo que se puede observar de esta respuesta es que el profesor limita a sus alumnos en el uso del conocimiento del contenido, restringiéndolo al involucrado directamente en el programa de la asignatura Fundamentos. Teniendo en cuenta la diversidad del estudiantado, algunos estudiantes pueden ir más allá de lo gráfico y pueden trabajar con nociones de derivadas e integral, acercándose o incluso llegando a una expresión general, incorporando así nuevas estrategias para el abordaje de los contenidos del curso.

El profesor no solo limita al estudiante, sino que pierde la posibilidad de conocer los conceptos previos, así como concepciones inadecuadas que tengan sus estudiantes para así trabajar sobre ellas. En este sentido, podemos decir que el profesor P1 restringe las estrategias de resolución de problemas a aquellas que solamente pongan en juego el conocimiento del contenido matemático del curso de Fundamentos.

Se les preguntó: *¿Son desafiantes para los estudiantes?*

El profesor P2 comparte con P1 en que es una actividad desafiante. P1 expresó que: "E*ncuentro a esta actividad más desafiante que la actividad anterior de polinomios extraída del repartido de polinomios del curso de Fundamentos, ya que la actividad del curso de Fundamentos está más orientada y la respuesta es más inmediata y esta es una actividad abierta donde los estudiantes deben pensar qué utilizar para encontrar las funciones polinómicas biyectivas"*. El profesor P1 acotó que: "*En el curso de fundamentos no se plantean actividades similares ya que las que se proponen son* *aquellas en las cuales se les da la expresión de la función, donde generalmente son funciones partidas con polinomios de primer y segundo grado y el alumno debe indicar si es biyectiva, algebraicamente o a partir del gráfico*".

Ambos profesores consideran que esta actividad es desafiante ya que su respuesta no es inmediata y que para resolverla no alcanza con aplicar un procedimiento o técnica aprendida anteriormente en otras actividades de funciones biyectivas. Es una actividad que desestabiliza a los estudiantes incluso a los profesores que la realizaron pues no resulta suficiente aplicar las estrategias que usaban para analizar la biyectividad en otros problemas. Realizar esta actividad requiere ir más allá de conceptos vistos anteriormente además de reflexionar sobre dichos conceptos. Requiere repasar los tipos de gráficos de funciones polinómicas, repasar ideas de derivada e integral si estuvieran disponibles, implica relacionar biyectividad con número de raíces y con el orden de multiplicidad de la raíz. Tal como lo expresan los profesores P1 y P2, en ese repaso de nociones matemáticas vistas anteriormente, el profesor podrá evidenciar preconceptos, concepciones erróneas que tengan sus estudiantes, así como diferentes maneras de arribar a la solución. Algunos estudiantes podrán trabajar únicamente desde lo gráfico, otros intentarlo desde lo algebraico y otros podrán trabajar con la noción de derivada e integral.

Por lo que, frente a la pregunta, ¿consideran novedosa esta actividad? Sin dudarlo ambos profesores afirmaron que sí pues cumple con todas las características de las actividades novedosas.

Una vez que los profesores clasificaron la actividad justificando por qué la consideraban una actividad novedosa, se les preguntó: *¿utilizarían esta actividad en sus cursos de Fundamentos?*

El profesor P1 dijo que: "*En el curso no se trabaja con el tema biyectividad en polinomios, sino que se trabaja con biyectividad de funciones ya conocidas por los estudiantes como funciones de primer y segundo grado, funciones partidas y después, más adelante en el curso, con polinomios. El tema biyectividad no es retomado cuando se trabaja con polinomios, ya que el programa es muy extenso y uno prioriza algunas cosas*". Si bien ambos profesores comparten que el programa del curso es muy extenso, ambos coinciden en que la propondrían en sus cursos pues consideran que la actividad tiene mucho potencial. Lo fundamentaron señalando que es una actividad que permite a los estudiantes revisar y relacionar varios temas como puede ser: biyectividad desde un enfoque gráfico y analítico, número de raíces de una función polinómica, orden de multiplicidad de una raíz, gráficos de funciones polinómicas, traslación de gráficos de funciones. También permite observar concepciones inadecuadas que tengan sus estudiantes de conceptos trabajados anteriormente.

El profesor P1 agregó: "*Este tipo de actividad no la propondría en un práctico sino que la llevaría a la clase para que, en pequeños grupos, trabajen con ella*". El profesor considera que es más enriquecedor para el curso llevarla a la clase y trabajarla en pequeños grupos para que los estudiantes puedan debatir con sus compañeros y arribar a conclusiones valiosas, que quizás, trabajando en forma individual no se alcanzaran por lo amplia que es la propuesta. Conclusiones que trascienden a la actividad, como por ejemplo, generalizar que las funciones polinómicas biyectivas tienen una única raíz con orden de multiplicidad impar. Podemos afirmar que la actividad contribuyó a mejorar el CDC del profesor: apreciaron que la actividad posibilitaría una instancia de debate y por ello señalaron que la propondrían en pequeños grupos con discusión posterior, permitiría realizar generalizaciones, relacionar contenidos, todo esto en contraste con actividades ya conocidas por ellos sobre el concepto de función biyectiva.

Para finalizar el taller, se les realizó una última pregunta a los profesores: *¿les gustaría seguir trabajando en el diseño de actividades novedosas?*

Frente a tal pregunta, en un principio, el profesor P2 me preguntó: "*¿Cuánto tiempo te llevó pensar en una actividad así?*" y el profesor P1 preguntó: "*¿Con qué apuntas a seguir trabajando en el diseño de estas actividades? ¿Estás preguntando si le quiero dedicar un tiempo a pensar en la creación de este tipo de actividades?*". Con las preguntas realizadas ambos profesores apuntaban a que en este año no querían dedicarle más tiempo a realizar otro tipo de actividades de las que ya realizaban. Pero que, en un futuro, estarían de acuerdo en trabajar en conjunto, para incorporar en sus aulas este tipo de actividades ya que de acuerdo al potencial visualizado entendieron que son enriquecedoras. Ambos profesores están de acuerdo en que al momento de pensar actividades para incorporar en sus cursos van a tener en cuenta la caracterización de las actividades novedosas pues es posible que alguna actividad novedosa pueda surgir para ser planteada a sus alumnos durante el desarrollo de los cursos. Por ello, podemos afirmar que este taller les aportó a los profesores una herramienta para el diseño de actividades y enriqueció el conocimiento didáctico del contenido.

El profesor P1 al finalizar el taller afirmó que: "*Viendo la caracterización de las actividades novedosas me aclaró algunas ideas borrosas que tenía al momento de elaborar actividades que me parecían que estaban buenas*". Esas *ideas borrosas* que el profesor menciona refieren a que el marco teórico presentado sobre actividades novedosas le permitió mapear algunas ideas previas que ponía en juego al diseñar actividades para sus alumnos sobre las características de las actividades novedosas. El profesor se apropió de un marco teórico de referencia para el diseño de actividades que ahora le permite justificar las actividades que él elabora y le garantizan una serie de ventajas como son las que proporcionan las actividades novedosas. Es decir, el profesor elaboraba actividades que según él *estaban buenas* pero no podía justificar teóricamente su diseño ni identificar claramente las características de las actividades que hacían que "estuvieran buenas". La explicitación realizada de las características de las actividades novedosas así como su potencial para el aprendizaje encontraron un anclaje con la actividad didáctica que el profesor venía realizando al crear situaciones para sus estudiantes. Esto demuestra que la presentación de las actividades novedosas en el taller enriqueció el CDC del profesor pues clarificaron aspectos didácticos a partir de los cuales el profesor pudo dar sentido y justificación a un tipo de tarea propia del profesor: el diseño de actividades.

Del taller se puede concluir que los profesores se encontraron entusiasmados con las actividades novedosas y que se encuentran abiertos a trabajar en un futuro en la elaboración de las mismas. Fueron muy receptivos a la presentación de las actividades novedosas, identificaron su potencial y estuvieron de acuerdo en que sería positivo incorporarlas, a futuro, en sus clases del curso de Fundamentos.

Capítulo 7: Reflexiones finales

El análisis acerca de si las dos actividades propuestas en los cursos de Fundamentos podían ser consideradas novedosas, dio lugar a que los profesores participantes del taller reflexionaran sobre su potencial y esbozaran alguna reformulación para que fueran desafiantes y desestabilizadoras para los estudiantes, sin perder de vista los objetivos de las mismas. Es decir, analizar las actividades propuestas en los prácticos con la óptica de las actividades novedosas, permitió a los formadores una reelaboración posible (ya sea en su diseño[8] o en el momento del desarrollo del tema en que podrían aplicarlas) para que estas pudieran ser consideradas novedosas y de esta forma asegurar las ventajas para el aprendizaje que ellas conllevan.

En particular, el análisis de la actividad novedosa planteada para la elaboración de la tesina, les permitió a los profesores reflexionar sobre la metodología utilizada para llevar la actividad al aula. Uno de los profesores pensó en llevarla al aula para trabajar en grupos pues según él resultaría más enriquecedor que trabajarla de forma individual. De esta manera la actividad generaría un hacer matemático en la clase, logrando el debate entre los estudiantes y la posibilidad de realizar generalizaciones. El profesor encontró otra ventaja de trabajar con las actividades novedosas: visualizó una estrategia de trabajo grupal que podría mejorar sus prácticas de enseñanza.

A partir del taller que desarrollamos con los dos profesores del curso de Fundamentos podemos concluir que la presentación de las actividades novedosas y la posterior reflexión sobre su potencial les permitió a los profesores participantes encontrar un marco teórico de referencia para la elaboración de actividades de enseñanza y para ubicar algunas ideas que traían a priori sobre diseños de tareas por ellos realizados pero sin un marco de referencia. Si bien ellos elaboraban actividades que consideraban interesantes, no poseían, en forma explícita, un repertorio de las características que hacían que dichas actividades fueran de mayor potencial frente a otras. Al presentar las características y los ejemplos de actividades novedosas, los docentes participantes

[8] Cuando al profesor P1 se le pregunta si la actividad de polinomios del práctico de fundamentos diseñada por él era desafiante, el profesor responde: "*Al estar tan pautada la actividad, se desprende que las funciones son iguales, quizás si la pregunta de la segunda parte fuera ¿son iguales las funciones? ahí sí lo desestabilizaría al estudiante*". Pensando en una reelaboración de la misma para que sea desafiante.

pudieron reflexionar acerca de la presencia de esas características en otras actividades elaboradas por ellos con anterioridad para el curso de Fundamentos. En suma, el taller aportó a los formadores CDC a través del análisis de las actividades novedosas siendo este uno de los objetivos de nuestro proyecto de intervención.

Los profesores se mostraron interesados y muy receptivos frente a la propuesta de trabajar en la planificación e implementación de actividades novedosas en sus prácticas ya que encontraron en ellas otros alcances comparándolas con otras propuestas llevadas adelante en sus cursos.

Las actividades novedosas mostraron ser muy flexibles, es decir, son susceptibles de ser adaptadas a los objetivos de enseñanza de cada profesor. Pueden ser propuestas tanto para introducir un tema (como el ejemplo del práctico de Fundamentos cuando se desea poner en evidencia que los polinomios no se comportan como las funciones polinómicas asociadas) como para trabajar una noción vista anteriormente (como la actividad de investigar cuáles son las funciones polinómicas biyectivas). Le permiten al docente evidenciar intuiciones, conceptos previos y concepciones inadecuadas de sus estudiantes, así como evaluar temas enseñados con anterioridad.

Para finalizar, deseamos señalar que esta etapa del proyecto de intervención tuvo una muy buena recepción por parte de los profesores participantes. Esto nos permite vislumbrar una posibilidad de trabajo conjunta con los formadores para que, a futuro, pueda desarrollarse este proyecto de intervención en todas sus etapas y alcanzar el objetivo de aportar para una mejora de las prácticas de enseñanza en la formación de profesores de matemática.

Referencias

Beltrán, A. y Lázaro, W. (2014). *Caracterización del conocimiento del formador de profesores en didáctica de las matemáticas a través de un estudio de caso*. Tesis no publicada para obtener el título de Magister en Docencia de la Matemática, presentada en Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá.

Blanco, L. (1996). Aprender a enseñar Matemáticas. Tipos de conocimientos. En J. Giménez; S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria*. *Cuestiones desde la educación matemática*, pp. 199-221. Granada: Colección Matema.

Bocanegra, I., Galeano, O. y Huérfano, H. (2013). *Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial*. Tesis no publicada para obtener el título de Magister en Docencia de la Matemática, presentada en Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá.

Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olave, M. (2011). Una mirada a las prácticas de los formadores de futuros profesores de matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza. *Revista UNION*, 28, 85-97.

Franco, G. y Siberio, D. (2013a). Repartido Teórico de Divisibilidad del curso de Fundamentos. Recuperado desde http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/course/category.php?id=2

Franco, G. y Siberio, D. (2013b). Repartido Teórico de Polinomios del curso de Fundamentos. Recuperado desde http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/course/category.php?id=2

García, V. y Blanco, M. (2004). Formadores de profesores de matemática. Una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de educación*, 333, 481-493.

Marcelo, C. (1994). *Investigaciones sobre prácticas en los últimos años: qué nos aportan para la mejora cualitativa de las prácticas*. Ponencia presentada al III Symposium Internacional sobre Prácticas Escolares, Poio, Junio, 1994.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2009). *Los modelos docentes en la formación de profesores de matemática: elementos para repensar los ambientes didácticos*. (No publicado). Montevideo: Dirección de Formación y Perfeccionamiento Docente (DF y PD).

Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes?* Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN, México,

Oktaç, A., García, C. y Ramírez, C. (2007). Diseño de Actividades: Ejemplos de Álgebra lineal. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López, C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*, pp. 315-327. México: Ediciones Díaz de Santos.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis no publicada para obtener el título de Doctor en educación Matemática, presentada en Universidad de Salamanca.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma, *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de profesorado*, 9 (2), 1-30.

Tirosh, D. y Wood, T. (2008) (Eds.). *Tools and Processes in Mathematics Education*. *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. *Vol. 2*. West Lafayette: Sense Publishers.

Zazkis, R. y Hazzan, O. (1998). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (4), 429-439.