¿Cómo se define una *fracción*? Sus implicaciones en el discurso matemático escolar

Guillermo Barcelona

Sala de Matemática
I.F.D Tacuarembó (CFE - ANEP)

Resumen

En este breve artículo se hace un relevamiento bibliográfico acerca de las diferentes presentaciones de los números racionales, de las distintas definiciones de *fracción* y de sus implicaciones en el discurso matemático escolar. Finalmente, se comentan algunas conclusiones. Si bien aquí no se hacen aportes relevantes a la enseñanza de los números racionales, se espera que este trabajo contribuya, de alguna forma, a que el profesor analice su discurso matemático en función de los distintos enfoques y convenios.

§1 ¿Cómo se presentan los números racionales?

Básicamente, se reconocen dos maneras de definir a los números racionales: como clases de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, o como elementos de un determinado subconjunto de $\mathbb{R}$. Se exponen ambas maneras a continuación, sucintamente.

Los racionales como clases de equivalencia

Algunos textos presentan los números racionales como clases de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (Abella et al. (2007), Franco et al. (2022), Osín (1966), Rojo (1996), y Trejo (1968)). En ellos, se ve definida una relación $\sim$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ del siguiente modo:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc. \tag{1}$$

A continuación se prueba que $\sim$ es una *relación de equivalencia* (esto es, se muestra que $\sim$ es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*), y para ello es necesario emplear algunas propiedades del producto en $\mathbb{Z}$. Luego, dando por obvio que el lector conoce los aspectos teóricos vinculados a las relaciones de equivalencia, se define el ***conjunto de los números racionales*** como el conjunto cociente que induce $\sim$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim .$$

Cada clase de equivalencia según $\sim$ se denomina ***número racional***.

Los racionales como elementos de $\mathbb{R}$ (enfoque axiomático)

Otros textos optan por presentar a los racionales como elementos de un determinado subconjunto de los números reales (Apostol (1984), Munkres (2002), o Spivak (2012)). Esta manera se reconoce cuando se presenta a $\mathbb{R}$ de un modo axiomático. Una vez que se definen los naturales (como elementos de todos los *conjuntos inductivos*), y los enteros (como los naturales y sus opuestos), se define el ***conjunto de los números racionales*** como el conjunto de todos los cocientes de enteros:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Si a y b son números reales y $b \neq 0$, el *cociente a sobre b*, denotado por $\frac{a}{b}$, es el producto

$$a\left(\frac{1}{b}\right),$$

donde $\frac{1}{b}$ es el *inverso de b*, es decir, el único número real tal que $b\left(\frac{1}{b}\right) = 1$. En esta presentación de $\mathbb{Q}$ no se necesita definir ninguna relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, aunque de las propiedades de *cuerpo* en $\mathbb{R}$ se sigue que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, \tag{2}$$

siempre que $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

§2 ¿Qué definiciones de *fracción* se reconocen?

En aquellos textos donde los números racionales se presentan como clases de equivalencia, se observan diferentes definiciones de *fracción* y distintos usos de la notación. Aparejado a esto, se reconocen ciertas implicaciones en el discurso matemático escolar.

Por ejemplo, en Franco et al. (2022), se define una *fracción* como un par ordenado (a, b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, que se denota con el símbolo $\frac{a}{b}$. Esto significa, entonces, que

$$\frac{a}{b} = (a, b).$$

Con esta definición queda claro que una fracción es diferente de un número racional, pudiéndose afirmar que *"un número racional contiene a todas las fracciones que son equivalentes entre sí"*. Respecto al clásico dilema de si las fracciones son *iguales* o *equivalentes*, se puede afirmar aquí que *"$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes pero no iguales"*, dado que $(1,2) \sim (2,4)$ y $(1,2) \neq (2,4)$.

Por el contrario, otros textos tales como Abella et al. (2007), Osín (1966) o Rojo (1996), consideran que un *número racional*, una *fracción*, o un *cociente de enteros*, aluden indistintamente a una clase de equivalencia según $\sim$. Además, denotan a la clase de un par (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ con el símbolo $\frac{a}{b}$. Esto significa que

$$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x,y) \sim (a,b)\}.$$

Con esta definición, se puede afirmar que

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \tag{3}$$

y consecuentemente se puede decir que *"$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son iguales pero no equivalentes"*, dado que si $(a,b) \sim (c,d)$, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son conjuntos iguales (contienen a los mismos pares ordenados), pero como $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no pertenecen a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no son equivalentes según $\sim$[1]. Vale observar, también, que si $\frac{a}{b}$ representa una clase de equivalencia, combinando (1) y (3) se obtiene que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc,$$

lo cual es simbólicamente igual a (2).

Otros textos hacen una presentación un tanto "intermedia", como Trejo (1968). Se define una *fracción* como un par ordenado (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, y se reescribe el par con el símbolo a/b. No obstante, la clase de equivalencia del par (a,b) según $\sim$ se denota con el símbolo $\frac{a}{b}$. Para este autor, claramente, a/b y $\frac{a}{b}$ no significan lo mismo, y por tanto se puede afirmar que *"$1/2$ y $2/4$ son equivalentes pero no iguales"*, y también que *"$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son iguales pero no equivalentes"*.

En el enfoque axiomático, curiosamente, no se observa por parte de los autores ningún uso del término "fracción".

§3 Conclusiones finales

Si bien la presentación de los *números racionales* como clases de equivalencia es igual en toda la bibliografía revisada, se reconocen distintas definiciones de *fracción* y ciertas implicaciones en el discurso matemático escolar. Dependiendo de la definición y de las convenciones de notación que se adopten, se pueden hacer afirmaciones tan dispares como que *"$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes y no iguales"* o *"$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son iguales y no equivalentes"*. Al momento de discutir teóricamente si dos fracciones son *iguales* o *equivalentes*, es necesario explicitar qué relación de equivalencia puede dar lugar al término "equivalente", qué definición de fracción se considera y qué significado se le atribuye al símbolo $\frac{a}{b}$. Es en este enfoque, y no en el axiomático de $\mathbb{R}$, que se emplea (y

[1]De todas maneras, se pueden considerar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ como *equivalentes* según $=$ en $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$, pero $=$ y $\sim$ son diferentes relaciones de equivalencia.

se define) el término "fracción". Por último, si se quiere que la expresión simbólica de (2) sea verdadera cuando se presentan los números racionales como clases de equivalencia, se debe considerar $\frac{a}{b}$ como número racional y *no* como par ordenado. Esto puede ser deseable si se pretende formular simbólicamente lo mismo en uno u otro enfoque.

Bibliografía

Abella, A.; Gil, O.; Vilaró, R. (2007). $2/4$ *y* $1/2$ *¿iguales o equivalentes? ¿Qué hacer en la escuela?* Programa para el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática. ANEP: Montevideo.

Apostol, T. (1984). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal (Volumen 1)*. Editorial Reverté: Barcelona.

Franco, G.; Vitabar, F.; Olave, M. (2022). *¿Cuál es el título de este libro? Parte 1. Texto para la asignatura Fundamentos de la Matemática de la formación de profesores.* Cuarta edición. Ediciones Palíndromo: Montevideo.

Munkres, J. (2002). *Topología*. Segunda edición. Pearson Educación, S.A.: Madrid.

Osín, L. (1966). *Introducción al análisis matemático*. Editorial Kapelusz: Buenos Aires.

Rojo, A. (1996). *Álgebra I*. Decimoctava edición. Editorial El Ateneo: Buenos Aires.

Spivak, M. (2012). *Calculus*. Tercera edición. Editorial Reverté: Barcelona.

Trejo, C. (1968). *El concepto de número*. Departamento de Asuntos Científicos. Secretaría General de la O.E.A: Washington D.C.