Carla Damisa | M. Laura Dodino | M. Inés Piedra Cueva

GEOMETRÍA EN EL AULA CON GEOGEBRA

Una experiencia de trabajo colaborativo en la escuela

Consejo de Formación en Educación

ADMINISTRACIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN PÚBLICA

GEOMETRÍA EN EL AULA CON GEOGEBRA

Geometría en el aula con GeoGebra

Una experiencia de trabajo colaborativo en la escuela

Carla Damisa
M. Laura Dodino
M. Inés Piedra Cueva

Consejo de Formación en Educación
ADMINISTRACIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN PÚBLICA

GEOMETRÍA EN EL AULA CON GEOGEBRA

Producción editorial:
GRUPO MAGRO EDITORES
Abayubá 2694 Ap. 101
Tel. 099 419 050 / 2202 0931
E-mail: info@grupomagro.com
www.grupomagro.com
Montevideo - Uruguay

ISBN impreso: 978-9974-8639-3-4
ISBN en línea: 978-9974-8639-5-8

Editor: Fernando Díaz
Diseño: Patricia Carretto

Printed in Uruguay - Impreso en Uruguay

ADMINISTRACIÓN NACIONAL
DE EDUCACIÓN PÚBLICA

ANEP

ADMINISTRACIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN PÚBLICA

CONSEJO DIRECTIVO CENTRAL

Presidente

Prof. Wilson Netto

Consejeros

Mag. Margarita Luaces

Prof. Laura Motta

Prof. Néstor Pereira

Consejo de
Formación en
Educación

CONSEJO DE FORMACIÓN EN EDUCACIÓN

Directora general

Mag. Ana Lopater

Consejeros

Mag. María Dibarboure

Mtro. Luis Garibaldi

Mtro. Edison Torres

Br. Marcelo Díaz

Coordinadora Académica del Departamento de Matemática

Dra. Cristina Ochoviet

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

Queremos dar las gracias a los integrantes del Consejo de Formación en Educación por habernos dado la oportunidad de continuar transformándonos como docentes a partir de investigar colaborativamente sobre la enseñanza.

A la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE), y en especial al investigador y docente Horacio Itzcovich por su apoyo generoso y franco.

A la Coordinadora Nacional del Departamento de Matemática, Dra. Cristina Ochoviet, por acompañarnos e impulsarnos en esta nuestra primera investigación como colectivo de profesores de Magisterio.

A los compañeros de la Sala de Matemática de los Institutos Normales de Montevideo, en especial a los Profesores Adriana López, Daniela Pagés y Gustavo Franco con quienes empezamos a soñar este proyecto en el año 2012.

A los niños y al equipo docente y no docente de la Escuela N° 14 de Montevideo porque sin ellos no tendría sentido nuestra tarea y gracias a ellos se revitaliza cada año.

Especialmente a las practicantes, nuestras alumnas futuras maestras: Antonella Vera, Tania González y Valentina González que aceptaron el desafío de pensar y hacer junto a nosotras.

A nuestras colegas maestras Ofelia Tejera, Virginia Méndez y M. Inés Rivero por ponerle una vez más a la túnica blanca de la escuela pública un millón de sueños y esperanzas.

A nuestras familias que pensaron que era posible y nos lo hicieron saber siempre.

PRÓLOGO

En los últimos años comenzaron a desarrollarse numerosas experiencias que tienen como objeto la reflexión sobre las prácticas de enseñanza. Si bien hay diferentes líneas que se ocupan de este asunto, algunas de ellas -las menos- parten de la premisa que los maestros deben ocupar otro lugar al momento de pensar y debatir sobre los problemas de enseñanza de la matemática en las aulas de las Escuelas Primarias.

En línea con lo recientemente enunciado, este libro desafía a pensar la posibilidad de que la Escuela no sea solamente un lugar donde se transmiten conocimientos, donde se enseña, sino que se transforme también en un lugar donde los docentes produzcan conocimientos, donde los docentes también aprendan.

Como se puede inferir de la lectura, la constitución de un equipo de trabajo colaborativo integrado por docentes de una misma Escuela, directivos, practicantes e investigadores no debe haber sido una tarea sencilla: diferentes miradas, diferentes roles, diferentes experiencias. Pero tal como relatan las autoras, esta diversidad, en lugar de jugar en contra, resultó potente al momento de sentarse a debatir sobre problemáticas que se presentan al momento de enseñar matemática, en particular, geometría. Y como si esto fuera poco, utilizando la computadora y el programa GeoGebra.

Nos encontramos así, al recorrer sus páginas, con un delicado y equilibrado entramado entre asuntos matemáticos –geométricos–, asuntos didácticos, asuntos de la práctica docente que se interrogan, pero fundamentalmente con la necesidad de elaborar hipótesis de trabajo y exploraciones en las aulas que puedan aportar al estudio de las incertidumbres que se explicitan en el espacio colaborativo, tanto sobre la enseñanza de la geometría como sobre el uso del recurso GeoGebra. Es allí donde uno se "topa" con las diferentes experiencias de los participantes, los intentos de conceptualizar a partir de ellas así como de comprenderlas y poder explicarlas, la elaboración de nuevas ideas que, en algunas oportunidades, transforman las que los protagonistas tenían, en definitiva, se producen nuevos conocimientos. A modo de ejemplo basta detenerse en dos de ellos: las relaciones entre el trabajo geométrico con lápiz y papel y el trabajo geométrico con el Geogebra y la emergencia de “los ángulos de afuera” como nuevo objeto de enseñanza. Resulta atrapante el modo en que estos dos asuntos -al igual que otros- se van edificando dentro del espacio colaborativo.

Es indispensable destacar también un aspecto que seguramente resulte novedoso: la inclusión en el espacio colaborativo de las estudiantes del magisterio, practicantes en la Escuela. Si bien al inicio de la trayectoria que se comparte en este libro no estaba claramente definido el rol que ocuparía cada participante -es una de las incertidumbres que este tipo de proyecto genera- mucho menos se podía anticipar un *nuevo modo* de establecer relaciones entre los Institutos de Formación Docente, las Escuelas y los practicante; las prácticas docentes con toda su complejidad entran en los Institutos y éstos se las deben ingeniar para alojar los problemas provenientes de las prácticas docentes. Allí en el medio se encuentran los estudiantes del magisterio. Este tipo de investigación quizá siente las bases para abrir nuevos interrogantes acerca del modo en que se pueden fortalecer esos vínculos, sistematizarlos y generar nuevos formatos de intercambio entre los Institutos, las Escuelas de prácticas y la investigación.

Desde hace ya algunos años circulan numerosos trabajos que refieren a la reflexión sobre las prácticas de enseñanza, que recuperan y analizan las experiencias desarrolladas por los docentes. Este trabajo quizá va un poco más allá: busca la esencia y no solo la apariencia, intenta comprender y hurgar en las razones de esas experiencias, compartirlas, transformarlas en ideas, interpretarlas desde referencias teóricas e incluso, si fuera necesario, invita a cuestionarlas y, eventualmente, elaborar otras. Pero a su vez pone en evidencia que es imposible llevar adelante estas reflexiones de manera individual; los problemas colectivos, sociales, requieren aportes colectivos, y la escuela y las prácticas que allí se desarrollan son un fenómeno social.

Pero lo más intrigante resulta ser el modo en el que se le da lugar, en el espacio colaborativo, al rol que juega cada uno, nadie pierde su identidad y desde ese lugar surge la posibilidad de *convencer, respetando al interlocutor; a dejarse convencer contra el propio deseo, a renunciar a la autoridad, a la seducción, a la retórica, a la forma, para compartir lo que será una verdad común*. Se pone en el centro el lugar que se le otorga a la palabra del otro, al posicionamiento del otro, es decir, la consideración del otro. Un viaje para el cual vale la pena sacar un pasaje.

Horacio Itzcovich

INTRODUCCIÓN

En este libro intentamos recoger parte del camino transitado durante la investigación "*Producción matemático- didáctica de un proyecto de enseñanza para nivel primario que incorpore el uso de las XO*[1]*, en el marco de un trabajo colaborativo entre maestros e investigadores"*. Fue un proyecto[2]desarrollado en el marco de un convenio entre Consejo de Formación en Educación de Uruguay (CFE) y la Universidad Pedagógica Nacional de Argentina (Unipe)[3]. El mismo se llevó a cabo en el periodo 2016-2017.

Esta investigación surge en el marco del proceso de transformación institucional de la Formación Docente, hacia una universidad. Esto implica, entre otros asuntos, ampliar el rol docente, incorporando la investigación como parte de su tarea. Ha sido permanente en la Sala de Matemática de los IINN de Montevideo, "María Stagnero de Munar y Joaquín R. Sánchez" la preocupación por estrechar los vínculos entre la formación matemática inicial de los alumnos y la enseñanza de la matemática en la escuela. Lo que supone considerar la interrelación entre las escuelas de prácticas, la Sala de Didáctica y la de Matemática. En este contexto, en el año 2012 surge la idea de realizar un estudio en escuelas de práctica que convocara maestros, estudiantes magisteriales (practicantes) y docentes de Matemática sobre la enseñanza de esta disciplina, incorporando las herramientas tecnológicas que estaban presente en las escuelas debido a la implementación del Plan Ceibal, específicamente las XO.

---

1. Las XO son las primeras computadoras entregadas en las escuelas Primarias de Uruguay en el marco del Plan Ceibal.
2. Fue presentado y aprobado en el Consejo de Formación en Educación según Acta N° 7, Resolución N° 31 EXP.5 /13749/14.
3. El equipo de Matemática de la Unipe está constituido por Patricia Sadovsky, Mónica Becerril, María Emilia Quaranta, Patricia García y quien interactuó con nuestro equipo fue Horacio Itzcovich.

En ese marco nos interesó investigar el uso del programa GeoGebra como recurso didáctico para enseñar un contenido geométrico. En ese momento existían en el país estudios que relacionaban el impacto de la incorporación de las computadoras en las aulas escolares uruguayas. Sin embargo no existían estudios específicos sobre la enseñanza.

Concebimos esta investigación desde la colaboración entre maestros, estudiantes e investigadores. La decisión de que este estudio fuera colaborativo presupone que se puede construir una simetría entre estas diferentes voces, aunque procedamos de espacios diferentes. El trabajo desde esta perspectiva se realizó con el fin de pensar alrededor de problemas de la enseñanza de la matemática a nivel primario, de manera conjunta, cargando de sentido lo que se enseña y cómo se enseña.

El lector en las páginas que siguen, encontrará distintas tramas que se entretejen. Las mismas refieren a lo producido a nivel matemático-didáctico, a la conformación del espacio colaborativo, y a lo sucedido en el aula escolar durante la implementación de la secuencia de enseñanza diseñada, todo esto permeado por el GeoGebra.

Entendemos que este libro tiene varias puertas de entrada. Para los maestros en su rol de enseñantes de Matemática, para estudiantes de Formación Magisterial, para colegas docentes en la formación inicial de maestros, para la formación en servicio de maestros y para investigadores en Educación.

En el Capítulo 1 nos centramos en el desarrollo del marco teórico de referencia, los antecedentes de este estudio y la metodología utilizada.

El Capítulo 2, *"De las vicisitudes en la elección del contenido matemático-didáctico",* pone el foco en la determinación del contenido matemático a ser enseñado, enfatizando en las interacciones entre los integrantes del espacio y entre éstos y el saber matemático-didáctico. En él se narran las idas y vueltas, las tensiones, las fundamentaciones y las decisiones que se fueron tomando para la elección del objeto de enseñanza. El objeto definido -"relaciones entre los ángulos de afuera y de adentro"- representa una problemática de enseñanza para todos los participantes tanto en relación a lo matemático como al uso del GeoGebra.

En el capítulo 3, "*La construcción del objeto a ser enseñado mediado por GeoGebra",* se pone énfasis en las interacciones en el espacio colaborativo (EC) con el recurso. Se detalla la incidencia del GeoGebra en la producción del objeto a ser enseñado y la transformación del mismo en recurso didáctico. Asimismo, encontrará el lector, el desarrollo y la caracterización del proceso de génesis instrumental del recurso a partir de un constructo que llamamos clonación.

El Capítulo 4 "*Del objeto matemático a ser enseñado a la planificación e implementación de la secuencia en el aula*", centra la atención en la producción realizada para el trabajo en el aula, más allá de la relación entre este desarrollo y lo analizado en el espacio colaborativo. Se presenta la secuencia de enseñanza implementada sobre las relaciones de "los ángulos de afuera y de adentro en polígonos" mediado por el GeoGebra. Se realiza en todas las actividades un breve análisis didáctico. A su vez, se van fundamentando algunas decisiones didácticas a lo largo del desarrollo tanto en la planificación como en la implementación de la secuencia de actividades. Se profundiza el análisis en la actividad 4 en relación tanto al estudio a priori de ella como a posteriori. Aparecen producciones de los niños con el fin de ejemplificar lo que se fue produciendo en el aula, las relaciones que se encontraron, cómo se produjeron y cómo las fueron argumentando. Aparecen también elementos de la puesta en común y otros asuntos en relación a la gestión docente.

En el Capítulo 5 presentamos las conclusiones a las que arribamos y las preguntas que se nos abren a partir de esta trayectoria.

Esperamos que este texto resulte un insumo y un aliento a quienes bregamos por establecer puentes entre la investigación, la formación docente y las prácticas de enseñanza. El trabajo colaborativo, en nuestra experiencia, es viable y puede ser una realidad en los distintos territorios por donde se transite. Tenemos la esperanza que lo presentado en estas páginas aporte a la producción de nuevos conocimientos matemático-didácticos.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO, ANTECEDENTES Y METODOLOGÍA

1.1. Marco Teórico

Entendemos la Matemática -y por lo tanto el trabajo matemático- en la escuela primaria como una producción cultural y social: "Cultural, porque sus producciones están permeadas en cada momento por las concepciones de la *sociedad* en la que emergen y condicionan aquello que la *comunidad de matemáticos* concibe en cada momento *como posible* y *como relevante*". (Sadovsky, 2005, p. 22).

A su vez,

> "La matemática es también un *producto social*, porque es el resultado de la interacción de personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad. Las respuestas que plantean unos, dan lugar a *nuevos problemas que visualizan otros*, y las demostraciones que se producen se *validan según las reglas* que se aceptan en cierto momento en la comunidad matemática." (Sadovsky, 2005, p. 23)

Desde esta perspectiva concebimos a los alumnos y a nosotros mismos como productores de conocimiento. Para que esta producción se haga efectiva es indispensable desarrollar en la clase de matemática un proceso que tenga en cuenta las condiciones de la institución escolar, que son esencialmente diferentes de las que rigen la producción de saberes realizados por los matemáticos.

Las condiciones del aula de matemática están permeadas por: la gestión del docente a partir de un objeto matemático de enseñanza, el grupo de alumnos de referencia, las interacciones dadas entre los alumnos, entre el docente y los alumnos, a propósito de un cierto conocimiento. A su vez forman una comunidad donde lo que se produce tiene características propias. Es en el seno de esta comunidad donde se irán transformando y construyendo ciertos conocimientos matemáticos, los cuales serán necesariamente validados en el marco de esa comunidad, bajo las circunstancias específicas de ella.

En la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1986, 1991, 2007), que servirá como referencia para nuestro trabajo, la producción de conocimientos matemáticos en la clase se interpreta a partir de dos tipos de interacciones básicas: a) la de los alumnos con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que permiten transformar y validar los conocimientos matemáticos puestos en juego y, b) las del docente con los alumnos a raíz de las interacciones de estos últimos con la problemática. La relación didáctica se sostiene en un sistema de expectativas mutuas con relación al conocimiento y se constituye -también- en el ámbito en el que emergen las normas matemáticas en la clase. (Sadosvsky, et al., 2012, p. 11).

Nos apoyaremos en los distintos tipos de situaciones que plantea Brousseau en su TSD, situaciones de acción, de formulación y de validación, con el fin de negociar la confección –de manera colaborativa con las maestras y las practicantes– de una secuencia de enseñanza en la que el carácter de necesidad de los conocimientos sea esencial en ese diseño. Es decir que al realizar el análisis didáctico de cada actividad y en general de la secuencia de enseñanza será importante identificar con claridad los distintos aspectos a los que se apunta en cada etapa. Lo importante será no confundir la condición de necesidad con lo que es posible (como procedimiento) por parte del alumno.

Al hablar de análisis didáctico nos referimos a ofrecer ciertas categorías que permiten describir y comprender los procesos que se dan en las aulas. Estas categorías nos orientan tanto la planificación como la implementación de las clases. A partir de las categorías podemos responder algunos de estos interrogantes: cuál es el sentido que se le otorgan a esos problemas, cómo es el vínculo que se establece con los problemas matemáticos, qué autonomía dejan al alumno, cómo son las formas de validación, qué transformaciones de las ideas matemáticas son posibles, cuándo y de qué forma participa el docente en relación al trabajo matemático del alumno, qué relaciones se plantean entre las producciones de los alumnos y las ideas que se van conceptualizando, cómo emergen los aspectos de las reglas del debate matemático en el marco de todas las interacciones que se dan en el aula.

Concebimos este estudio en términos de la colaboración entre maestros e investigadores. Entendemos por *trabajo colaborativo* una forma de trabajo horizontal, no jerárquica, sobre una base de igualdad en la que cada integrante del grupo aportará desde su rol, sus experiencias, conocimientos a la investigación. Es importante precisar que el diálogo se entiende más que como un instrumento de consenso, como un instrumento de confrontación de ideas para la construcción de nuevas comprensiones. Para poder encauzar las acciones hacia la obtención de un fin u objetivo común, el proceso de indagación se construye en forma crítica y cooperativa. De este modo se supera el aislamiento del docente y del investigador.

Es en ese sentido que el trabajo que concebimos en el espacio colaborativo supone una ruptura tanto con el lugar de práctico que el docente tiene otorgado en la cultura, como con la posición de prestigio y autoridad que se suele atribuir a los investigadores. Esta ruptura es condición para dar lugar a un reconocimiento genuino de lo que cada actor tiene para aportar. Sensevy (2011) aporta la idea según la cual, para instalar la colaboración, es necesario construir una simetría que se basa en la elaboración compartida de razones en el marco de los trabajos que se realicen, antes que en la negación de las diferencias. En este sentido sería, según el autor, un modo de superar una división de trabajo basado en los dilemas teoría-práctica, fines-medios: la teoría y los fines para los investigadores, la práctica y los medios para los docentes. Desde esta perspectiva, se subraya el papel del docente en tanto productor de conocimiento a partir del análisis y reflexión de sus prácticas. Esta relación aporta a la construcción de un clima de trabajo en el que investigadores y maestros nos involucramos en una tarea desafiante.

Según Boavida y da Ponte (2002), una de las características de este tipo de abordaje es que el plan de trabajo puede no estar predeterminado antes del inicio. Lo que orienta a este plan son los objetivos a alcanzar teniendo en cuenta los contextos naturales y sociales y los problemas de enseñanza –agregamos nosotros– que pudieran emerger en los ámbitos donde el trabajo se desarrolla. En nuestro caso es la escuela como institución general, la escuela N°14 como particular y un aula de 5° grado dentro de esa escuela.

Los autores toman como dos de los aspectos relevantes del trabajo colaborativo al diálogo y a la negociación. A su vez citando a H. Christiansen (1999), sostienen que el diálogo es un instrumento de confrontación de ideas y de construcción de nuevas comprensiones. En relación a la negociación, Boavida y da Ponte, aportan que “es preciso ser capaz de negociar objetivos, modos de trabajo, modos de relación, prioridades e incluso significados de los conceptos fundamentales.” (p.130). Agregan además citando a H. Christiansen et al., […] “la clave para una colaboración exitosa es una negociación abierta de la repartición de poderes y expectativas respecto al papel de cada uno de los participantes, a medida que un proyecto se desarrolla" (1997, p. 285).

Aquí encontramos un nexo posible entre lo que plantea Sensevy (2011) en términos de construir simetría fundada en las razones y la negociación abierta de la repartición de poderes y expectativas que plantean Boavida y da Ponte. Este nexo podría alojarse en lo que dice Brousseau (1991) en cuanto a que la enseñanza de la matemática habilita entre otras cuestiones no solo a los fundamentos de la actividad cognitiva sino también a reglas del debate y de la toma de decisiones a raíz del mismo. Por eso el espacio de colaboración puede sostener algunas interrogantes para lograr la simetría en término de negociaciones. Por ejemplo si es posible en este espacio de colaboración responder algunas preguntas que Brousseau (1991, p. 19) plantea y que estas respuestas serían los productos construidos en el mismo:

> "cómo convencer respetando al interlocutor; cómo dejarse convencer contra su deseo o su interés; cómo renunciar a la autoridad, a la seducción, a la retórica, a la forma, para compartir lo que será una verdad común; de qué depende el uso que los otros hacen de sus conocimientos y de la manera en que tratan estos problemas de verdad."

A su vez tomamos de Sadovsky et al. (2016), el estudio sobre la producción matemático-didáctica en el marco de un trabajo colaborativo entre docentes, directivos de escuela primaria e investigadores en didáctica de la matemática. Los autores presentan resultados sobre los modos de problematizar el conocimiento matemático con los docentes y la complejidad de la construcción de un proceso colaborativo. En el marco de esa investigación elaboran también la idea de tensión en relación a algunos aspectos constitutivos de la colaboración: capacitación-colaboración, naturalización-problematización, y adaptación a condiciones institucionales-preservación de la colaboración. Estas tensiones se leen en términos de hacer visible la complejidad de los procesos de colaboración y sostienen que es necesario producir condiciones específicas para que estos procesos no solo dependan de la voluntad de los participantes sino que van más allá de esa participación. En sus conclusiones agregan concebir el trabajo de exploración sobre la enseñanza como parte de la tarea docente. Y continúan planteando que en ese sentido los aportes de los investigadores que asumen una posición colaborativa pueden contribuir a la constitución de ese posicionamiento de los maestros.

En relación al uso del GeoGebra tomamos de Gueudet, Trouche (2009) y Rabardel (2011) la idea de que los instru mentos están constituidos por el artefacto y los esquemas de utilización que despliega el sujeto, tienen por lo tanto una "doble composición". Es así que Rabardel (2011), propone una conceptualización general de la noción de instrumento, pues considera que se entiende al "artefacto" explícita o implícitamente como el instrumento. Esta nueva conceptualización implica concebir el instrumento como una entidad mixta que es a la vez el sujeto y el artefacto. El autor sostiene que este proceso de transformación de un artefacto a un instrumento, es llamado génesis instrumental, que implica la construcción de un esquema de uso para un conjunto particular de situaciones por parte del sujeto.[1]

En nuestro caso el GeoGebra es un artefacto que se constituye en instrumento dentro de una comunidad de práctica. Esta distinción fundamental recoge lo planteado por Rabardel (2011), entre el artefacto, aquello que está dado, y el instrumento, que es construido por el sujeto en tanto usuario de ese artefacto. Este proceso constructivo del instrumento a partir del artefacto, que se ha dado en llamar génesis instrumental, tiene una naturaleza dual: por un lado, el sujeto guía la forma en que se utiliza el artefacto y por otra parte, las posibilidades y limitaciones del artefacto influyen en la actividad del sujeto.

Trouche, (op. cit.) pone de relieve la necesidad de analizar la relación entre la gestión didáctica de los artefactos que serán introducidos en el aula y los objetivos de enseñanza que se plantea el docente, en lo que él llama "*Orquestación instrumental*". Según Kieran (2000), citado por Trouche, esta orquestación toma en consideración tanto los aspectos vinculados al artefacto como los aspectos matemáticos. Es así que el análisis involucra tanto el entorno, en este caso el GeoGebra, como las situaciones matemáticas que resolverán los alumnos, así como también la gestión del artefacto, el objetivo de enseñanza, el tiempo, el problema matemático, las variables didácticas, las fases de resolución y las diferentes estrategias de los niños, las intervenciones del docente, entre otras.

Como en nuestro estudio usamos el GeoGebra como instrumento para producir algunas ideas matemáticas en un aula de primaria tomamos de Acosta Gempeler (2004, p. 5), en Ferragina (2012), en relación a la característica dinámica del GeoGebra:

1. La traducción es de las investigadoras op. cit.

> "Lo que caracteriza los dibujos dinámicos (representaciones de figuras geométricas2) es la capacidad de ser modificados por un movimiento continuo de sus componentes, asegurando que las propiedades geométricas de dichos dibujos se mantienen invariantes. Esto quiere decir que toda propiedad geométrica se traduce en un fenómeno visual que se produce al arrastrar los objetos, de manera que el arrastre se convierte en un medio de reconocimiento y de verificación de las propiedades geométricas en un dibujo dinámico". Sadovsky et al. (2012)

Es así que tuvimos en cuenta en las actividades que conformaron la secuencia, elaboradas en el espacio colaborativo, el carácter dinámico y la prueba de arrastre de los dibujos con el fin de que se mantengan sus propiedades en tanto figura geométrica.

1.2. Antecedentes

Hemos encontrado estudios que nos sirven de antecedentes en relación a los resultados de aprendizaje en Matemática a partir de la incorporación en general de las XO[3] en las escuelas, tanto de instituciones públicas como privadas (UCU, 2012; Revoir, 2013). Sin embargo, ninguno de ellos toma como centro de la investigación la producción de actividades de enseñanza a partir de un contenido matemático específico, mediadas por las XO.

Sobre investigaciones vinculadas a la enseñanza de la Matemática con un enfoque de trabajo colaborativo entre investigadores y docentes hay una línea de investigación en la UNIPE (Sadovsky et al., 2012). Este recorrido comenzó en el año 2012, siendo su objeto de estudio la producción de conocimientos matemático-didácticos en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores en didáctica de la matemática, maestros y directivos de escuela primaria.

Una de las conclusiones a las que los autores llegan en esa investigación es que concebir el aula como espacio de producción de conocimiento no es sencillo para aquellos docentes que no tuvieron posibilidades de construir este tipo de vínculo con la matemática. En ese sentido el espacio colaborativo les permitió identificar que la relación entre lo que los niños pueden llegar a hacer y lo que el docente quiere enseñar es un trabajo de producción matemático-didáctico

2. El texto del paréntesis es de las investigadoras.
3. Se le llama XO a la primera generación de computadoras entregadas por el plan Ceibal haciendo alusión al logo que tiene en su carcaza.

original. Original porque es una producción que se va desarrollando de manera única, donde el recorrido de relaciones matemáticas se van transformando en esa construcción que es situada, colectiva, e institucional.

Sadovsky et al. (2012), pusieron el foco en establecer nexos entre las descripciones de los docentes en relación a su tarea, las reformulaciones de esas descripciones iniciales, los problemas a ser estudiados, las exploraciones y el análisis de lo realizado. Los autores concluyen que la planificación compartida, entra en diálogo entre "mi aula" y "las otras aulas", las producciones de "mis chicos", entran en relación con la de "otros chicos" y sostienen que "al abrirse la puerta del aula se modifica el conocimiento que allí vive porque está impregnado con las ideas de otros niños y maestros y a la vez deja salir ideas que van a filtrarse en la vida de otras aulas".

Por otro lado tomamos como antecedente el trabajo de Ferragina (2012). Este estudio se centra en el trabajo con Geometría a través de las TIC. En particular usando el software GeoGebra. En el estudio se presentan propuestas de actividades elaboradas de manera conjunta con docentes de escuelas primarias y medias de la Argentina. Tiene un nexo común con nuestro estudio pues al implementarse en Argentina el programa Conectar Igualdad, similar a nuestro Plan Ceibal a nivel de secundaria, aparecen las computadoras en las aulas. De ese modo algunos docentes comienzan a mostrar interés en estudiar el software GeoGebra como herramienta para enseñar matemática.

A partir del estudio de Ferragina, se producen actividades para la enseñanza de la geometría usando GeoGebra y se acompañan con reflexiones sobre la gestión de las mismas. Dicho estudio no solamente propone actividades geométricas usando GeoGebra en los últimos años de la primaria y algunos de la secundaria, sino que promueve el uso del software para trabajar la parte algebraica, funcional y estadística. Los autores ponen el foco en la forma de trabajo docente y que éste no solamente se quede en "mostrar lo que está en la pantalla", sino profundizar en los conceptos matemáticos, las relaciones entre ellos y la producción de validaciones que sustentan la tarea matemática. Es así que el trabajo apuesta a producir avances en la enseñanza y en el estudio de la matemática.

1.3. Metodología

Esta investigación es de carácter cualitativo, descriptivo, de corte estudio de casos y etnográfico, asumiendo la constitución de un espacio de trabajo colaborativo y reflexivo.

Para el trabajo colaborativo nos apoyamos en los aportes de Boavida y da Ponte (2002); Sadovsky et al. (2016). El análisis se centra en caracterizar el modo en que se produce conocimiento matemático-didáctico a raíz de las interacciones que se dan entre el equipo docente y de investigadores, al identificar un problema de enseñanza asociado a un contenido geométrico específico, utilizando la XO, en una escuela primaria de práctica[4], en 5° grado, bajo ciertas condiciones. Planificar acciones para estudiar dicho problema e implementar actividades en el aula que aporten información en torno a dicho estudio.

Asimismo este estudio, que es de corte etnográfico, se respalda también en Guber (2014) para sostener la relación entre el trabajo colaborativo y reflexivo.

Por ser una investigación que articula un centro de Formación Docente (los IINN[5] de Montevideo), una escuela de práctica, maestras, practicantes[6] e investigadores se tomaron algunas consideraciones a la hora de la elección de la escuela de práctica donde se llevó a cabo la investigación. Se realizó un llamado a directoras de las escuelas de práctica para participar en este estudio. Para postularse debían cumplir con ciertas condiciones: tener años de experiencia como directoras de práctica, poseer un equipo docente dispuesto a participar en la investigación, espacios destinados una vez por semana a las reuniones, compromiso de las maestras en la participación del espacio colaborativo.

Se presentaron 9 escuelas de 13. El equipo docente quedó conformado finalmente por dos maestras una de 5to grado y otra de 6to, la maestra directora y 3 practicantes de la Escuela N°14 de Montevideo.

Desde el primer encuentro en la escuela se grabaron en audio todas las sesiones, se fotografiaron pizarrones, se realizaron capturas de pantallas, se recogieron y analizaron producciones de los niños. Además se llevaron bitácoras de campo en donde tanto las maestras participantes, las practicantes y las investi-

4. Son las escuelas donde los estudiantes de formación magisterial realizan su práctica docente como parte de su formación inicial.
5. Institutos Normales (IINN) de Montevideo. Es uno de los Institutos de Formación Docente de Uruguay. En ellos se forman los maestros para la escuela primaria uruguaya.
6. Llamamos practicantes a los estudiantes de los Institutos de Formación Docente.

gadoras realizamos anotaciones con el fin de triangular luego la información. Se filmaron clases con los niños en algunas de las actividades realizadas.

Los insumos obtenidos a partir de las desgrabaciones de audio de todas las sesiones también se tomaron para triangular, revisar las acciones, reflexionar sobre ellas y volver al territorio con cierta interpretación fundada de los sucesos. De esta manera se volcaban estas reflexiones en el espacio de colaboración con las maestras y a partir de allí continuábamos avanzando. Este proceso se daba por un lado en la determinación del contenido matemático a ser enseñado, por otro en diseñar una secuencia de actividades en relación a la producción del conocimiento matemático que se determinó en colaboración con las docentes.

Se conformaron tres espacios, uno el espacio colaborativo (EC) donde participaban las maestras, la directora, las practicantes y las investigadoras en la escuela. Estas reuniones se dieron semanalmente desde mayo a setiembre de 2016. El segundo espacio fue el espacio de las investigadoras (EI) donde se analizaba lo sucedido en el EC y se realizaban lecturas, interpretaciones y reflexiones sobre lo que se iba produciendo en el EC. Esas interpretaciones, análisis y reflexiones eran compartidos posteriormente en el EC. Sin embargo muchas veces las ideas producidas en el EI las encontramos difíciles a la hora de presentarlas en el EC porque o bien no se tomaban o nos costaba mucho ponerlas a discusión o las ideas que traían las docentes desde su espacio eran las que sosteníamos para profundizar la construcción del espacio de colaboración. Una de las ideas fuertes que sostuvimos en el EC fue el trabajo con GeoGebra. En un principio impuesto por el encuadre de trabajo que sosteníamos hasta que éste ocupó un lugar en el EC.

Esta situación nos plantea un juego dialéctico entre la metodología y la conceptualización del espacio de colaboración. La pregunta sería ¿dónde alojar ese juego en lo conceptual o en lo metodológico o en ambos? Es así que una posible explicación puede estar dada en términos de tensiones que se dan en el EC entre investigadoras y docentes.

A su vez, las docentes y las practicantes formaron un tercer espacio, no previsto, donde también compartían lo vivido en el EC y traían luego a éste sus reflexiones, actividades realizadas con los alumnos junto con producciones de los niños con el fin de analizarlas a la luz de lo que se iba discutiendo.

Cuando se tuvo definido el contenido matemático a ser enseñado a través de GeoGebra en los espacios de discusión se tenía en cuenta también la forma de implementar la secuencia, el análisis detallado de cada actividad que diseñamos, las posibles producciones de los niños, así como también las intervenciones docentes. A medida que se fueron definiendo estos aspectos, la secuencia quedaba abierta para volver al espacio compartido con el fin de analizar a la luz de lo sucedido en el aula y de nuestro objetivo las modificaciones necesarias a ser realizadas.

Por otro lado uno de los ejes de discusión pasaba siempre por la condición implicada en la investigación que era el uso de GeoGebra. Este recurso puesto en juego desde un principio se presentó como una variable determinante. Aparece así a lo largo de toda la investigación un continuo de valores dado al GeoGebra para enseñar geometría. En ese sentido se distinguieron momentos entre el "rechazo", "no tenerlo en cuenta", "la necesidad por condición", hasta una relación "amigable", en donde se le pueden cargar algunas condiciones no persé pero si de importancia para considerarlo con el fin de usarlo para enseñar.

Cuando la secuencia de enseñanza estuvo diseñada con algunas actividades, realizamos la puesta en acto de ella en la clase de 5to grado. A partir de lo que sucedía en la implementación de las actividades se analizó si era necesario modificar alguna de ellas o si a partir de lo sucedido incorporar alguna otra actividad con el fin de cumplir con el objetivo que nos habíamos propuesto. Estas decisiones eran tomadas luego de las discusiones correspondientes a partir de las diferentes perspectivas que circulaban en el espacio de discusión semanal en la escuela (EC), a partir del análisis de las producciones de los niños, del análisis de alguna de las filmaciones de clases y de las intervenciones docentes realizadas.

Las decisiones que se fueron tomando también permitieron evidenciar la presencia de aspectos en común, de marcos que se fueron edificando en el espacio a partir de las interpretaciones de lo sucedido. Es ahí donde se jugó la producción de las ideas que se fueron gestando a lo largo del proceso. Esta forma de trabajo que nos dimos caracterizó desde un principio el espacio donde el equipo de maestros junto con el equipo de investigación construyó ciertas normas para funcionar de manera colaborativa. Hubo tensiones, discrepancias, idas y vueltas. El resultado es una construcción colectiva de un espacio para producir un determinado conocimiento matemático-didáctico.

CAPÍTULO 2

DE LAS VICISITUDES EN LA ELECCIÓN DEL CONTENIDO MATEMÁTICO-DIDÁCTICO

2.1. ¿Cómo se decide el contenido a ser enseñado?

El equipo de investigación, desde los inicios del trabajo colaborativo, propicia la incorporación al espacio de discusión el estudio de algún contenido geométrico donde se detecten dificultades en su enseñanza. Es así que una de las maestras desde la primera sesión trae de manera libre a ese espacio una problemática sentida.

En ese contexto, la maestra[1] M2 presentó producciones de sus alumnos bajo la consigna: "*Qué sé de los rectángulos*", acompañada de la preocupación que sigue. M2 sostiene que sus alumnos no explicitaban la idea de perpendicularidad como una de las relaciones que caracterizan a los rectángulos. Al poner a discusión estas ideas aparecen algunos intercambios de los cuales elegimos algunos segmentos para ilustrar.

> M2: "*… falta perpendicularidad. Paralelismo lo nombran y preguntan. La síntesis de esta actividad fue qué podíamos mirar: vértices, lados, ninguna pregunta fue a la perpendicularidad, 90° fue lo más cercano. La idea de ángulo, nada. Voy a arrancar qué saben de triángulos y de ahí llevarlos al rectángulo. Empecé a hacer un punteo.*"

Frente a este planteo de M2, el equipo de investigadores (EI en adelante), en su espacio semanal de trabajo categoriza[2] las producciones de los alumnos frente a la actividad propuesta: *¿Qué sé de los rectángulos?* La idea de categorizar esas producciones era encontrar en qué se basaba M2 al final del primer encuentro para suponer la ausencia de la idea de perpendicularidad en sus alumnos. Por

1. Hacemos referencia a las voces de las maestras como M1, M2 y M3.
2. La decisión que se tomó in situ en realizar la categorización en el EI y no en el EC fue debido a una alta dosis de incertidumbre que caracterizaba al EC al comienzo de su constitución.

un lado, pretendíamos encontrar razones de sus conclusiones y por otro poner esas razones, en la segunda sesión a discusión. Las categorías que armamos a partir de los conocimientos que aparecen en las producciones fueron[3]:

Con respecto a los lados

- Sus 4 lados son rectos
- Tiene segmentos de recta
- El lado de arriba y de abajo son más grandes que el de los costados
- Dos lados largos y dos cortos (los lados no son del mismo tamaño)
- Nunca se puede poner la misma medida en los 4 lados
- Tiene 4 lados paralelos (dos pares)

Con respecto a los ángulos

- Tiene 4 ángulos rectos (Todos)
- Tiene ángulos iguales
- Tiene 4 ángulos mayores o menores a 90°

Con respecto a diagonales

- Tiene diagonales
- Sus diagonales miden lo mismo
- Sus diagonales forman 2 ángulos obtusos y 2 agudos

Con respecto a las clasificaciones

- Es muy parecido al cuadrado
- El rectángulo es casi como un cuadrado solo que es más ancho.
- Pertenece al grupo de los paralelogramos
- Es un polígono
- Es una figura geométrica
- Es un cuadrilátero
- Es una figura plana

Al analizar dichas producciones en el EI interpretamos que la relación de perpendicularidad aparece enunciada a través de los ángulos rectos y puesto en juego por los niños en esa caracterización, esto difiere de la interpretación que inicialmente hace la maestra M2.

3. El orden de aparición no indica jerarquía alguna.

Esas diferentes interpretaciones fueron volcadas al espacio colaborativo en el entendido que podrían resultar ser un motor para el intercambio dentro del EC y abonar a la elaboración de ideas acerca del problema de enseñanza a trabajar en esta investigación. Asimismo, interesaba al equipo de investigación ir instalando en el EC discusiones sobre ideas matemáticas que circulan en el aula como parte de la metodología de trabajo colaborativo. Se sitúa así la pregunta entre la relación de perpendicularidad y lo que tienen construido los alumnos sobre la idea de ángulos rectos, enmarcada en la continua preocupación de la maestra. Seguramente que los niños no tengan disponible aún el término "perpendicularidad" es una de las fuentes de las diferencias de interpretación.

> M2: *Son producciones de los chiquilines, ellos tenían que escribir todo lo que sabían del rectángulo... Es un legajo… del análisis de lo que salió ahí está la ausencia, no es que no aparezca, pero está la ausencia de la parte perpendicularidad… y me puse a pensar que saben y mi preocupación fue qué podía relacionar con ángulos…*

Luego de la discusión dada en el EC, entre la sesión 2 y la 3, la maestra M2 propone una nueva actividad a sus niños con el propósito de indagar si circulaba entre ellos alguna idea de perpendicularidad entre los lados del rectángulo y la trae al espacio para su discusión.

La actividad propuesta a los niños consistió en armar una serie de paralelogramos móviles y analizar qué cosas cambian para que esos paralelogramos se transformen en rectángulos. Para ello, M2 plantea a los niños que trabajen en equipos armen paralelogramos con varillas y mariposas y exploren. Interpretamos que esta actividad surge como consecuencia de las tensiones vividas en el EC a partir del análisis de las producciones de los niños de la primera actividad presentada. Se filman algunas explicaciones de los niños en el momento que la maestra interviene buscando explicaciones y fundamentaciones de lo realizado.

En la sesión 3, la maestra presenta en el EC descripciones producidas por los alumnos, y registros fílmicos. Lo que nuevamente da pie a diferentes interpretaciones. Las investigadoras interpretamos que los niños manejan la noción de ángulo recto y que los mismos viven en los rectángulos. Pero aún no la relación de perpendicularidad entre dos rectas secantes como una posición especial. A partir de los diálogos con los niños interpretamos nuevamente que lo que no conocen es el término perpendicularidad asociado al ángulo recto. En esos diálogos podemos observar que los alumnos manejan la idea de paralelismo y perpendicularidad y que algunos niños pueden establecer esas relaciones en los paralelogramos y en el rectángulo en particular.

Además de las escenas que se recogieron a través de las filmaciones se les pide a los estudiantes, luego de realizada la actividad anterior, que escriban sobre lo que sucede en la situación que sigue:

Si partiendo de un rectángulo, al moverlo, ¿sigue siendo rectángulo?

Esta actividad emerge a partir de las tensiones vividas en el EC. Las investigadoras han promovido las discusiones sobre si los niños manejan la noción de perpendicularidad entre los lados del rectángulo y han tensionado el espacio. Estas tensiones, que hacen a un EC, mueven tanto al equipo docente como a las investigadoras a buscar evidencias sobre las ideas de perpendicularidad de los niños. A la maestra M2, la lleva a proponer una nueva actividad a sus alumnos y a las investigadoras a categorizar las producciones de los niños en el EI.

Se recogen y analizan las producciones escritas de los alumnos y en el EI se categorizan en dos grupos:

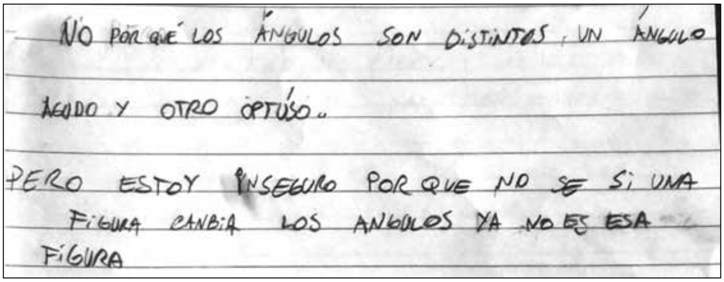
1. Los que tienen en cuenta solamente los lados.

Sí, porque tiene 2 lados largos e iguales y 2 lados cortos e iguales.

En este grupo la noción de rectángulo que manejan es la de un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos iguales y diferentes entre sí, sin tomar en cuenta los ángulos. Tampoco consideran la posición relativa de los lados consecutivos asociada a la perpendicularidad.

2. Los que tienen en cuenta los ángulos.

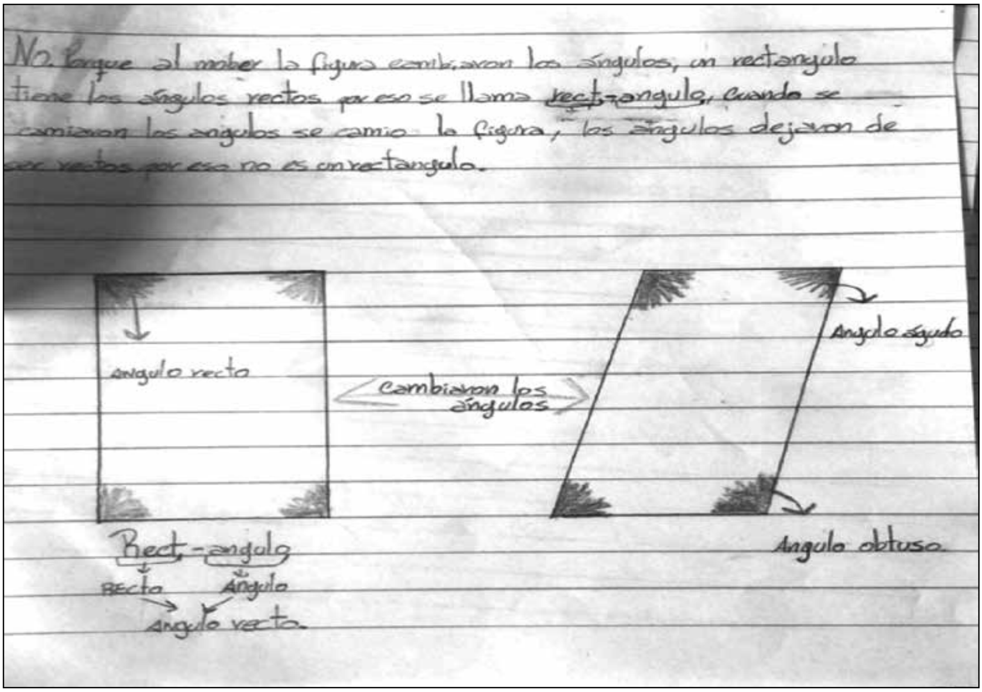
Para algunos no sigue siendo un rectángulo, pero tienen dudas. La imagen que sigue muestra cómo se interrogan los alumnos sobre: ¿*Si los ángulos de una figura cambian entonces la figura cambi*a?



NO POR QUÉ LOS ÁNGULOS SON DISTINTOS, UN ÁNGULO AGUDO Y OTRO OPTÚSO.
PERO ESTOY INSEGURO POR QUE NO SÉ SI UNA FIGURA CANBIA LOS ANGULOS YA NO ES ESA FIGURA

Seguramente apelaban a lo perceptivo, pero no analizan las relaciones entre los movimientos de los lados consecutivos y los distintos ángulos que se generan. Evidencian que no sigue siendo rectángulo porque los ángulos cambian. Una interpretación posible de que al niño le genera inseguridad es que cambian solamente los ángulos, los lados no. Esto trae como consecuencia que la figura sigue perteneciendo a la familia de los paralelogramos. Es un paralelogramo no rectángulo.

Para otros, no sigue siendo un rectángulo. Este grupo de producciones escritas evidencian que no sigue siendo rectángulo porque los ángulos cambian.



Podemos caracterizar las relaciones matemáticas relativas al rectángulo que circulan en este grupo de 5to año en: relaciones fuertes[4] y relaciones débiles. Las relaciones fuertes serían, la caracterización del rectángulo atendiendo a la longitud de los lados, que el ángulo recto mide 90 grados y la clasificación de ángulos en obtusos, agudos y rectos. Por otro lado, las relaciones débiles en cambio serían la caracterización del rectángulo atendiendo a ángulos, la relación ángulo recto con las rectas perpendiculares que contiene a los lados consecutivos.

El análisis colectivo de las producciones de los niños, y las diferentes interpretaciones que se fueron planteando en el EC sobre los conocimientos de los alumnos permitió la emergencia de preocupaciones de enseñanza sentidas por todo el colectivo. Esto configura una característica clave del funcionamiento de los espacios colaborativos, Sadovsky et al. (2016).

Se comienza a poner el foco entonces en los ángulos interiores de los polígonos como asunto de enseñanza, que tendría por finalidad el avance en los conocimientos de los niños en los procesos de caracterización de las figuras geométricas. Se abre entonces la discusión sobre lo que habilita a trabajar ese recorte, **“polígonos: ángulos interiores**”. Para ello las investigadoras proponemos una dinámica de trabajo en el EC que consiste en una lluvia de ideas sobre el tema. Se va listando en el pizarrón lo que cada integrante del equipo docente e investigador prioriza. La lista genera un cúmulo de relaciones que obliga a comenzar a acotar y tomar decisiones para centrarnos en la finalidad del trabajo y de allí en la elaboración de las actividades que se podrían proponer a los alumnos. En la imagen que sigue aparece el pizarrón que muestra los elementos por donde transitó el intercambio.

4. Entendemos por relaciones fuertes aquellas en las que los niños muestran mayor familiarización, y son de uso más frecuentes, es decir están instaladas en el aula en la mayoría de los alumnos.

La discusión versa sobre los distintos elementos y propiedades de los polígonos en general. Se tiene registro de lo que cada participante aportó.

En la sesión siguiente el equipo de docentes trae al EC, por sugerencia de las investigadoras, un recorte de lo que piensan que es posible trabajar con los niños a partir de los intercambios anteriores.

Polígonos: ángulos interiores

Ángulos – Relación con los lados. Polígonos

En triángulos: a mayor ángulo se opone mayor lado

Cuadriláteros. Relación con paralelismo. Ángulos complementarios/ suplementarios

Relación triángulos con lados. La conexión con cuadriláteros

¿Qué relación conocen con ángulos vinculados con triángulos y cuadriláteros?

Triangulación de figuras a partir de las diagonales

A partir de lo trabajado aparecen diferentes preocupaciones. Una de las-preocupaciones del equipo docente es en relación a las diferentes maneras de conceptualizar la idea de ángulos. Esta preocupación evidencia un cambio en el objeto a trabajar, se pasa de ángulos en polígonos a la posibilidad de conceptualizar la noción de ángulos. Esto se desarrolla en profundidad en la parte 2.3 de este capítulo. A su vez, las maestras vuelcan al EC la incertidumbre en cuanto a las relaciones entre la elección de una de esas ideas de ángulos y en consecuencia qué enfoque de enseñanza y qué planificación realizar para trabajar con los niños.

A partir de allí se discute en el EC cuáles son los enfoques habituales para trabajar ángulos, el rol de las definiciones en la escuela y la narración por parte de las maestras de qué recorrido de aprendizaje pueden realizar los niños al trabajar con ángulos, cómo puede progresar esta idea en los primeros años de la escolaridad básica.

> M3: *me quedé pensando en (...) cómo uno concibe un ángulo, desde el lugar que lo defino y que consecuencia tiene eso a lo largo del ciclo escolar. Si lo defino como intersección de semiplanos qué va a pasar después, porque eso tiene que ser coherente, ese lugar desde donde yo me paro tiene que ser coherente con el resto de los contenidos, poder articularse desde esa definición. Si yo me paro como: ¿La otra era conjunto de haces? (….)eso va a tener otras consecuencias, qué pasa con el concepto de vértice, con el concepto de movimiento, de giro… eso me faltó decir. Que no es lo mismo una y otra. Y pensar en la consecuencia que tiene para abordar otros contenidos*
>
> I1[5]: *quizás tengamos que indagar, no sé me lo pregunto, indagar cuáles han sido el enfoque de los abordajes de ángulo para trabajar esto, si nos parece pertinente.*
>
> I2: *mi pregunta es ¿qué es lo pertinente para trabajar en la escuela?, ¿qué es lo válido? ¿Se define ángulo en la escuela?*
>
> I1: (…) *pero alguna historia, algo de ángulos, ellos están trabajando ángulos, algún enfoque, alguna característica de algún enfoque han desarrollado.*

Una nueva tensión con el contenido ángulos se presenta en esta intervención de la maestra M3 y del resto del equipo docente que le sigue con atención sus reflexiones. La misma refiere a la problematización de la equivalencia de diferentes definiciones para un mismo objeto matemático. Esta problemática no

5. Las voces de las investigadores aparecen como I1, I2, I3.

se vuelve a retomar, fue una decisión tomada in situ por el equipo de investigadoras, aspecto que hace a la conformación del EC.

Este intercambio sobre el trabajo con ángulos genera condiciones para comenzar a explorar con GeoGebra. En este momento, por primera vez, el recurso toma presencia entrelazando las siguientes ideas que cada integrante del EC tiene sobre ángulos, la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y cómo poder analizar esta propiedad a partir de la exploración con GeoGebra.

En el EC se acuerda realizar la siguiente actividad[6] usando GeoGebra para analizar lo planteado anteriormente:

- Construir un triángulo.
- Determinar sus ángulos.
- "Pintar" y medir sus ángulos.

Este es uno de los **hitos** que encontramos en este estudio, la **presencia del recurso** como movilizador y condicionante de las propiedades geométricas que se habilitan para realizar la actividad anterior manteniéndose también el foco que ya en sesiones anteriores venía apareciendo: **el trabajo con ángulos**.

Esta consideración estuvo dada a dos niveles en cuanto a:

- lo que posibilitó el espacio colaborativo y
- la posibilidad que van asumiendo los docentes como productores de conocimientos matemático y didáctico.

El estudio detallado de este hito se realizará en el capítulo 3.

Asimismo, las maestras interpretan que los niños están familiarizados con la nominación ángulo *"de la etiqueta saben"* y dan cuenta que habitualmente "*se trabaja para la construcción de la noción y todo lo que implica, las propiedades que tengan, y no, con esto de que "el ángulo es tal cosa".*

Se sostiene en EC la discusión sobre la problemática vinculada entre el nombre del objeto (etiqueta) y las propiedades matemáticas del mismo. La noción de ángulo es interpretada de manera inversa a lo planteado inicialmente en relación a la perpendicularidad.

En relación a la idea de ángulo pegada al haz de semirrectas con origen común, la maestra M2 sostiene:

6. Esta actividad se analiza en el capítulo siguiente.

M2*: hacen referencia a la puntita pintada, pero hacen referencia a algo que se mueve,* (el gesto es de barrer con las manos... una mano quieta y la otra se mueve).

Además, M3 agrega algo en relación a la amplitud del ángulo y dice que está relacionada con el movimiento de uno de los lados:

M3: *Dicen acá se movió, está más chico,* (tiende a juntar las manos achicando el ángulo), *está más grande. Este es obtuso, este es recto. Acá… acá, (*gestos con la mano para establecer relaciones con la amplitud).

M1: *yo creo que lo ven como una punta y eso del movimiento como si fuera fijo uno de los lados.*

M2 plantea dos hipótesis como consecuencia de este abordaje de la idea de ángulo –ángulo como conjunto de semirrectas con ciertas características–, una la dificultad de los niños de trabajar con ángulo –giro más allá 180 grados. Lo dice en estos términos:

M2: *se mueve se va abriendo me parece a mí es como una suposición que tengo, el giro más allá de 180° (lo* que acompaña con un gesto con las manos).

La otra hipótesis es la no existencia del ángulo no convexo:

M2: *Que es de repente lo que no permite ver el tema del ángulo externo*[7]

Es así que M2, interpreta que sus alumnos relacionan el ángulo con el vértice y que la amplitud del mismo está relacionada con el movimiento de uno de los lados, y esta idea ella la asocia a que en los niños trae como consecuencia, la no existencia de ángulos mayores a 180°. Seguramente es porque están mirando las semirrectas interiores que genera el ángulo convexo.

A partir de estas discusiones se comienza a identificar con mayor precisión el objeto de enseñanza y que delimitará la producción de una planificación en conjunto en el EC. Observamos en esta intervención de la maestra M2 una primera tensión con el contenido a estudiar "ángulos". El equipo de maestras se cuestiona sobre la elección del abordaje de ángulos para la enseñanza que tienen que hacer en la escuela primaria, y las consecuencias que trae esta elección en las conceptualizaciones de los niños. Sostienen que estos niños ven el ángulo (ángulo interior) como giro y pegado al polígono por lo tanto esa idea no les permite

7. Al momento de la discusión, se aceptaba provisoriamente al ángulo externo como el ángulo no convexo a partir de un ángulo interior a un polígono convexo.

visualizar otros ángulos, como ser los externos, o los ángulos determinados por dos diagonales, entre otras posibilidades de "ver" geométricamente ángulos.

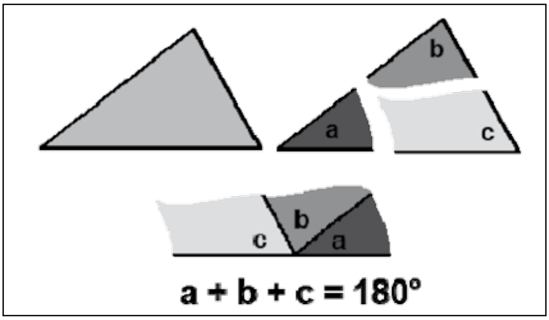
Como consecuencia de estos diálogos y de las discusiones que se fueron dando en el EC, las dudas y cuestionamientos que genera el tema ángulos, se pone el foco en el problema de los ángulos de los polígonos, sus características, qué cosas se evidencian de ellos y qué no, qué relaciones se establecen. Esto lleva a que M3 plantee, en el EC, la idea de probar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un llano (180°).

2.2. De la discusión del tipo de pruebas que se pueden producir en la escuela

M3 interviene y aclara que en la escuela esa "demostración" no la hacen, pero si lo prueban "cortando las puntas de los triángulos".

> M3: "*en triángulos, para demostrar la suma de ángulos internos, en primaria, no puedo usar propiedades matemáticas, alternos internos, ángulo opuestos etc., etc… Me siguen chiquilinas*[8]*… Atajo, en la escuela, ¿qué hacemos?, cortamos.*"

M3 presenta una prueba pragmática, recorta un triángulo al que le rompe "las puntitas" y éstas que tienen "pedacitos de ángulos" se colocan de manera que resulten ángulos consecutivos y así se visualiza que los ángulos sumados del triángulo es un llano. La figura muestra el procedimiento.



A partir de esta idea se profundiza el intercambio de cómo probar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° usando plegado y M1

8. El término chiquilinas es para las practicantes.

plantea si será posible hacerlo con GeoGebra. Este planteo queda instalado en el EC, pero primero se transita por una discusión que abona al asunto de la producción de distintos tipos de pruebas: pragmáticas e intelectuales. La idea de producción de pruebas usada en este estudio es la de Balacheff (2000). Para este autor una prueba es: "(...) una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser el objeto de un debate cuya significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores" (pp. 12-13).

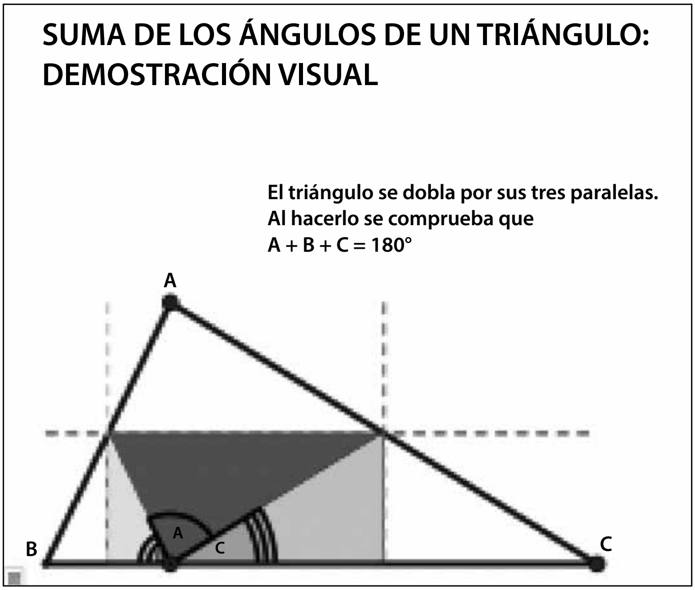
En este punto, también se discutió si la "demostración" que es una prueba intelectual podría vivir en la escuela primaria. Hacemos referencia al estudio de Duarte (2010), en donde plantea la posición de diferentes autores en relación a la argumentación, la prueba y la demostración. Para Duarte, De Villiers (1990) aporta diferentes funciones que tiene la demostración, algunas de ellas son la verificación, la explicación, la sistematización y la comunicación que luego Hanna (2000) las amplía agregando la construcción y la exploración. Hanna realiza un aporte más destacando el papel privilegiado que tienen las demostraciones que además de validar, explican, asumiendo que estas son más adecuadas para la enseñanza. Asimismo, ambos autores (De Villiers y Hanna), acuerdan conceptualizar la argumentación como un discurso razonado, pero no necesariamente deductivo pero que utiliza elementos de convicción, y la demostración como "una cadena de inferencias deductivas bien organizadas que utiliza argumentos de necesidad", Duarte (2010).

Creemos que el aporte de Balacheff (2000) y Duarte (2010) para nuestra investigación en el momento que estábamos transitando en el EC, fue de suma importancia y claridad. Balacheff clasifica las pruebas en tres categorías según sus propósitos, pruebas para decidir, para comunicar o para saber. Según Duarte (2010), Balacheff plantea esta categorización, que no supone una partición, a la luz de la Teoría de Situaciones (situaciones de acción, de comunicación y de validación), sosteniendo que dicha categorización contribuye "*a pensar sentidos posibles para una entrada al trabajo de la fundamentación*". (Duarte, 2010, p. 20)

A la luz de estos aportes se continuó en el EC discutiendo los tipos de pruebas que se producen en la escuela para fundamentar la propiedad de suma de ángulos interiores de un triángulo, ¿cuáles son posibles para los docentes y cuáles para los niños?, ¿cuáles no?, ¿qué impone cada una?, ¿qué propiedades están en juego en cada una de ellas?

Otra prueba que surgió en el EC para fundamentar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un llano, fue a través de la utilización del plegado del triángulo. Esta prueba pragmática se realiza pero no se complejiza y las investigadoras cuestionamos por dónde se pliega, qué implica ese pliegue, qué propiedades pueden estar en juego, etc. Surgiendo las siguientes interrogantes: ¿siempre sería el mismo tipo de pliegue independientemente del triángulo?, ¿qué propiedades del triángulo hacían esta prueba posible?, ¿qué relación con otros elementos del triángulo la habilitan?

Durante la discusión dada aparece que el punto A (ver figura que sigue) que se lleva al lado BC es siempre el pie de la altura con respecto a ese vértice. Se caracteriza también que el "doblez principal" resulta ser una de las paralelas media del triángulo, la que corresponde al pie de la altura considerada.



Todo este episodio de debate en torno a las pruebas, demostraciones, fundamentaciones que se despliega en el EC interpretamos que pone al equipo docente, y al EC en una instancia de producción de conocimientos. Las maestras están poniendo a discusión cuestiones matemáticas y tratan de resolverlas, tanto en el espacio colaborativo como en el espacio privado (ya que en más de una oportunidad comentaban que se reunían) que ellas han generado entre las reuniones con nosotras. La conformación del espacio colaborativo ha permitido que el equipo docente se coloque como productoras de conocimiento matemático. Es así que identificamos como las maestras van entrando en la elaboración de argumentos en tanto prueba intelectual apoyándose en algunas pruebas pragmáticas que viven en la escuela y estableciendo la relación entre cada prueba pragmática y "su correspondiente" intelectual. No para abordarlas en la clase con los niños sino para construir un saber matemático para ellas. De ese modo construyen autonomía de manera tal que podrán decidir otros asuntos en relación a las propiedades que involucra cada prueba. Concebir este escenario en acto, como posible, está suponiendo una ruptura sustancial con la escuela tradicional (Sadovsky et al. 2012, p. 3). Es así que esta ruptura conlleva una transformación esencial en el quehacer del maestro. Como sostienen Desgagné et al. (2001), los investigadores en enseñanza de la matemática pueden aportar en estos espacios su experiencia analítica si son capaces de acompañar a los maestros desde una posición de complicidad en la que se descarta toda mirada de asimetría.

2.3. De la transición del contenido matemático de: Polígonos: ángulos a Ángulos en…

La maestra M2, siguiendo el hilo de lo que se estaba trabajando, a partir de las argumentaciones matemáticas, de las actividades que venía planteando a sus alumnos en relación a lo que sabían del rectángulo y en qué se modificaba un paralelogramo articulado para que se transformara en un rectángulo, y del trabajo compartido de lluvia de ideas mencionado propone en el EC resolver esta situación:

M2: *Es una actividad, si tengo un cuadrilátero y dos ángulos de 90°, ¿puedo saber la medida de los otros dos?, ¿Hay una única posibilidad?*

Esta pregunta habilitó el análisis y a continuar profundizando el conocimiento matemático en el EC. Este conocimiento estaba en relación a "si sabemos algunas propiedades de los ángulos, ¿podremos saber de qué figura se trata?".

En el intercambio para resolver la situación planteada aparecen como posibles cuadriláteros solución el rectángulo, el trapecio birrectángulo, trapezoides. Esta discusión posibilitó pensar a partir del problema presentado por M2 qué conocimientos de los ángulos sabían los alumnos que iban a participar de este estudio. Las maestras M2 y M1 proponen en su clase la siguiente tarea donde se le pide:

"Escribo todo lo que sé sobre ángulos".

Para la sesión 5 las maestras M1 y M2 presentaron al EC las producciones de sus alumnos en relación a la actividad anterior.

A continuación listamos, una categorización que armamos nosotras, sobre las mismas.

1. En relación a una posible definición, elementos o ubicación de los ángulos:

- "Un ángulo es la unión de dos rectas en un punto fijo"
- "Los ángulos son una esquina de figura"
- "Se forma en las esquinas de las rectas"
- "Están en muchas figuras. En cada ángulo hay un vértice"
- "Un ángulo es la punta de algo"
- "Los ángulos siempre aparecen en los cuadrados, rectángulos, triángulos, octógonos y aparece en los vértices de la figura"
- "Un ángulo es lo que está en las figuras geométricas en el plano o en el espacio" (Dibuja cuadrado y triángulo y colorea los ángulos).
- "Una figura no puede tener menos de 3 ángulos a no ser que sea una figura abierta"

2. Con respecto a la representación

- Dibujan ángulos rectos, obtusos y agudos y los pintan.
- "Los ángulos no tienen terminación"
- Dibujan triángulos y marcan los ángulos como iguales. Indican las marcas como propias del ángulo. (Foto 1)
- Aparecen otros registros con clasificación de ángulos perceptivamente sin caracterizarlo por su amplitud en grados o con respecto al recto. Figuras que tienen y no tienen ángulos. Comienzan a explicitar algunas dudas.
- Marca el ángulo completo de forma "no convencional" representándolo sin los lados (foto 3) y en el ángulo llano no marca el vértice.

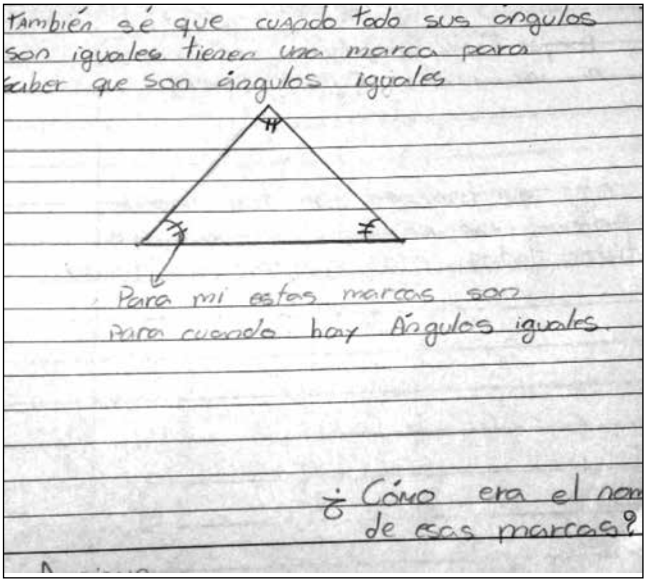

También sé que cuando todo sus ángulos
son iguales tienen una marca para
saber que son ángulos iguales
Para mi estas marcas son
para cuando hay Ángulos iguales.
¿Cómo era el nom
de esas marcas?

Foto 1

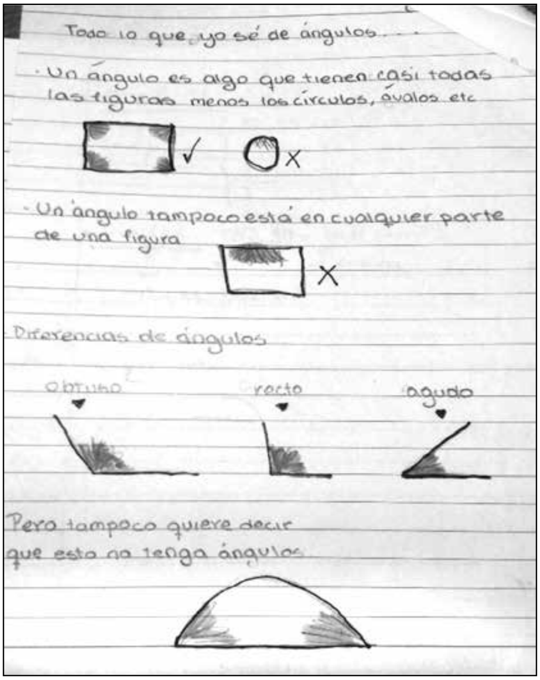

Todo lo que yo sé de ángulos...
· Un ángulo es algo que tienen casi todas
las figuras menos los círculos, óvalos etc
· Un ángulo tampoco está en cualquier parte
de una figura
Diferencias de ángulos
obtuso
recto
agudo
Pero tampoco quiere decir
que esto no tenga ángulos

Foto 2

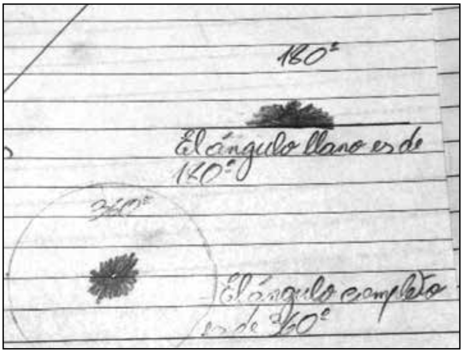


Foto 3

3. Con respecto a la medida

- En su mayoría los clasifican en agudos, rectos y obtusos.
- Algunos mezclan esa clasificación con su representación y señalan los lados.
- Indican los ángulos obtusos como más de un recto sin importar si son o no convexos.

Una posible explicación en relación a la medida de ángulos, su representación y algunas conceptualizaciones de los niños podría ser el uso del semicírculo como instrumento de medida. Este instrumento habilita a esa idea restringida sobre lo que es un ángulo obtuso en relación a su medida: es más que un recto, sin analizar la idea de la cota superior. Es decir el instrumento no habilita a medir ángulos cóncavos y quizás eso sea una de las causas de no "verlos". Seguramente en su recorrido escolar estos niños no han discutido los elementos de un ángulo, qué "cosas" debe tener una figura para ser ángulo.

4. Algunas preguntas que se hacen los alumnos

- ¿El semicírculo tiene ángulos?
- ¿Hay figuras que no tienen ángulos rectos?
- ¿Hay figuras además del óvalo o el círculo que no tengan ángulos agudos?
- ¿Esto es un ángulo? (foto 5)

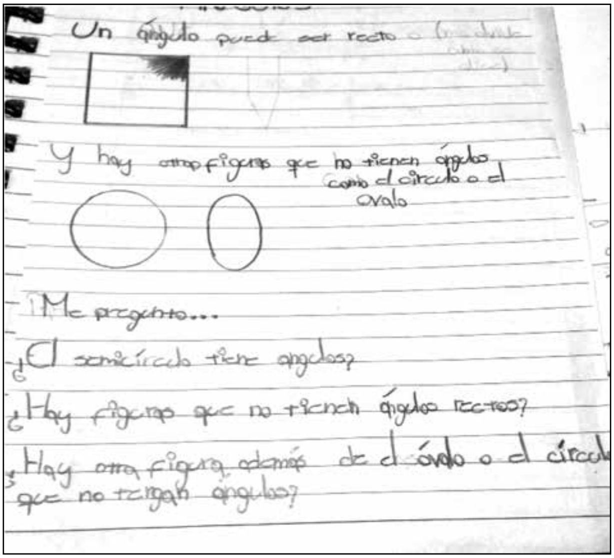


Foto 4

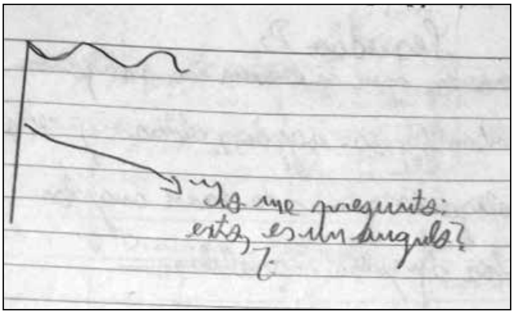


Foto 5

A partir de los conocimientos que poseen los alumnos sobre la idea de ángulo, lo que el equipo docente en su interna está indagando con GeoGebra[9], comienza a establecerse relaciones entre el GeoGebra, las ideas matemáticas que circulan y las ideas para la enseñanza de **"Ángulos en…"**

En este momento en el EC se está concretando la significatividad de trabajar ángulos para estas maestras, en relación a sus alumnos, a lo que ellos saben y

9. Este asunto será retomado en el capítulo 3.

las expectativas de avance en relación a la noción de ángulos. Es así que diseñar, planificar e implementar una secuencia de actividades con el foco puesto en "Ángulos en…" utilizando GeoGebra es relevante para esta comunidad.

La M2 lo expresa de la siguiente manera:

M2: *"El tema ángulos es que todo el mundo le saca el cuerpo, porque no sabes cómo entrarle. Sabes que a través de los polígonos pero nunca le hincas el diente. Es como que lo rondas, lo rondas, lo rondas. Por otro lado lo que obtuve de lo chiquilines es enquistamiento. Ángulos hay de tres tipos y no hay otra cosa después de esto (…) A mí me parece super interesante. Personalmente es algo nuevo y me genera un desafío, no es algo que se diga ah mirá yo lo trabajé así… y me parece que desde la investigación aporta, que es algo nuevo porque no hay material al respecto. Desde geogebra sabemos que está el tema de alturas, pie de altura, potencia, corro la altura, corro los triángulos, etc. Pero de ángulos no hay secuencias hechas, no hay reflexiones hechas… no hay de ángulos cosas elaboradas, no hay reflexiones."*

M3: *"para mí el concepto de ángulo no la información sobre…, para mí es una pieza clave en la construcción geométrica… es un elemento importante."*

En este último fragmento de los diálogos se concreta, se define la importancia del trabajo con los ángulos desde lo matemático, lo didáctico y en relación al uso del GeoGebra. Es sustantiva la justificación de porqué trabajar con ángulos a la que arribamos en el EC. Lo plantean en términos de "él debe de la escuela", "él debe de la formación". Surge así un contenido a abordar sensible para esta comunidad, que viene a intentar llenar un hueco en la enseñanza de ángulos. Parece significativo abordar la producción de conocimiento matemático-didáctico desde acá.

A través de los encuentros en el EC fuimos detectando el cambio de la idea de producir una secuencia de enseñanza centrada en **Polígonos y sus ángulos** a la consideración de las relaciones de los **Ángulos en los polígonos.**

Es relevante el cambio en relación al foco de estudio desde los polígonos y sus ángulos a centrarnos ahora en los "ángulos en general" en relación a polígonos. **Los ángulos han pasado a ser el centro de la discusión, ya no desde los polígonos sino por las relaciones que se pueden construir entre ellos como parte constitutiva y característica de los polígonos.**

CAPÍTULO 3

LA CONSTRUCCIÓN DEL OBJETO A SER ENSEÑADO MEDIADO POR GEOGEBRA

El ingreso del software GeoGebra al EC, marcó un punto de inflexión en el funcionamiento de dicho espacio. La asimetría existente fue diluyéndose, por varios motivos. Por un lado, el EC se fue conformando de manera de acoger los problemas que los integrantes del mismo teníamos en relación a la enseñanza de los ángulos como planteamos en el capítulo anterior. En ese espacio se discutían las situaciones y se trataba de otorgarles una interpretación posible. Por otro lado, el uso del GeoGebra tanto en su dominio específico, así como nuevo recurso de enseñanza generó un problema común en todos los integrantes del EC.

Se fue afianzando la colaboración, tal como lo expresa M3:

> M3: *El clima de confianza y bajo riesgo, pero también de rigurosidad, seriedad y respeto, creo que favoreció la gestación de un espacio que deseábamos compartir y disfrutábamos cada semana.*

Al "bajo riesgo" lo podemos atrapar como una nueva componente del funcionamiento del EC. Es una relación dialéctica entre lo que se puede producir en el EC y a su vez las características de ese espacio que generan condiciones para que se produzca conocimiento. Entendemos que el bajo riesgo hace referencia al aspecto emocional como modo de transitar el EC en términos de apertura al otro, de confianza, de escucha atenta, de valorar las distintas posiciones, de afecto. Esta caracterización del bajo riesgo se centra en lo emocional y se complementa con lo que expresa Sensevy (2011). El autor pone el foco en el aspecto intelectual de las relaciones y dice que para que se dé la construcción del espacio de colaboración es necesario instalar una simetría que se basa en la elaboración compartida de razones en el marco de los trabajos que se realicen antes que en la negación de las diferencias. Y es así que buscando razones de manera conjunta para analizar e interpretar lo que sucedía en el aula, con el uso del GeoGebra, se fue rompiendo esa división del trabajo asumida tradicionalmente, por un lado, los maestros desde la práctica y las investigadoras desde la teoría.

En los encuentros, trabajamos a diferentes ritmos con el GeoGebra. Al entrar éste al EC las practicantes modificaron su participación haciéndola más activa. Ellas fueron cambiando su modo de participar. Se fueron apropiando de su voz y explicitando razones de lo que pensaban y hacían.

Para gestionar las discusiones donde cada integrante del equipo usaba GeoGebra, fue necesario incorporar el uso del cañón para proyectar lo que se hacía. Esto permitió seguir de mejor manera las actividades y el proceso constructivo que se quería explicar o discutir. Aparecen aquí dos recursos en el salón de clases: la computadora y el pizarrón, potenciándose.

El recurso se instala en el espacio colaborativo (EC)

En las primeras sesiones la discusión en relación al GeoGebra estuvo centrada en el potencial que tenía como recurso para la enseñanza. Se planteaban cuestiones sobre si era un recurso más, se traían al espacio resultados de investigaciones sobre el uso que de él hacían los maestros, lo que daba cuenta de la gran incertidumbre que se sentía sobre el mismo. Es preciso recordar también que inicialmente en esas sesiones, tal como se presentó en el capítulo anterior, el foco del trabajo en el EC estuvo puesto en los contenidos matemáticos: polígonos, ángulos, suma de ángulos interiores, perpendicularidad, entre otros y en el análisis de las producciones de los niños sobre "*qué se dé rectángulos y de ángulos*".

En el espacio semanal de análisis e interpretación, por parte de las investigadoras, de lo sucedido en el EC, se consideró oportuno introducir el GeoGebra con el fin de ampliar la exploración sobre el mismo, pasando de un uso evocado a uno real. El uso real del GeoGebra era uno de los objetivos específicos de este estudio.

Identificamos luego de su introducción al EC, dos hechos que abonaron a la definición del contenido a enseñar, estos son: la clonación y el nacimiento de los "ángulos de afuera".

3.1. La clonación

En la planificación del trabajo de la sesión 4 habíamos previsto discutir los aportes de las maestras y practicantes sobre el trabajo que venían realizando con el GeoGebra durante la semana. Éste refería a la construcción de un triángulo y a la medición de sus ángulos interiores. El equipo docente y las practicantes comparten en el EC lo que habían trabajado en sus exploraciones y en ese sentido tenían una actividad para presentar.

Por otro lado, la actividad que las maestras compartieron, consistió en una macro, donde el GeoGebra es usado para hacer *"lo mismo"* que se hace usando un triángulo de papel, rasgando los ángulos y colocándolos consecutivos al ángulo que se deja fijo. Las maestras provocan que el GeoGebra haga lo mismo. Ellas se construyen un procedimiento para que el efecto de rasgar las puntitas de los ángulos se "vea" en el GeoGebra. (Ver figuras 1 y 2).

La discusión de esta prueba usando el rasgado de papel se dio explícitamente en el capítulo 2.

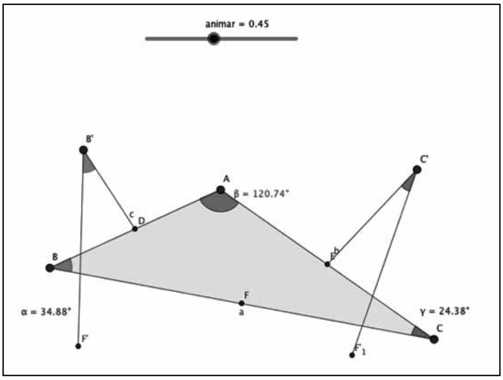


Figura 1

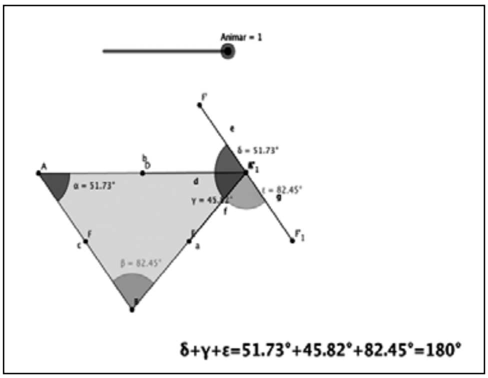


Figura 2

La maestra M1 mostró entonces al grupo cómo funcionaba la macro y las investigadoras propusimos que cada integrante del EC, siguiendo las orientaciones de M1, intentará hacerlo en su computadora de modo de familiarizarse con el GeoGebra y a su vez conocer más sobre su uso.

El procedimiento global seguía las siguientes fases:

Fase 1	Fase 2
1. Dibujar un triángulo, rotular sus vértices. 2. Marcar sus ángulos. Rotularlos. 3. "Pintarlos" de colores diferentes. 4. Medir los ángulos interiores.	Rotar dos de los ángulos hasta hacer que coincidan los vértices y los ángulos queden consecutivos. Usando puntos medios de lados como centro de rotación y la función de rotación, usando ángulos de 180°.

Consideramos de acuerdo a lo planteado por Trouche (2009) que el GeoGebra es un artefacto que se constituye en instrumento dentro de una comunidad de práctica[1]. Esta distinción fundamental recoge lo planteado por Rabardel (1995), entre el artefacto, aquello que está dado, y el instrumento, que es construido por el sujeto en tanto usuario de ese artefacto.

Los instrumentos están constituidos por el artefacto y los esquemas de utilización que despliega el sujeto, tienen por lo tanto una "doble composición". Este proceso constructivo de esquemas de uso de un artefacto es llamado génesis instrumental. La evolución de los esquemas de utilización se puede dar por acomodación, asimilación de nuevos artefactos a esquemas de usos antiguos. Consideramos que el proceso de clonación que presentaremos a continuación puede dar cuenta de un modo de génesis instrumental del GeoGebra.

En el marco de esta investigación decidimos producir un constructo llamado **clonación** con el fin de intentar caracterizar lo sucedido. Definimos dos tipos de clonación:

Clonación tipo 1: en términos de un cierto trabajo que intenta replicar lo que se hace con lápiz y papel. Es el proceso por el cual un aprendiz de un recurso nuevo, en este caso particular el GeoGebra, intenta aplicar los mismos saberes (conceptos, modos de hacer, de tratar, etc.) propios de otro recurso simi-

1. Recuperado en https://perso.univ-rennes1.fr/ghislaine.gueudet.1/CERME6/6_WG7_GueudetTrouche.doc

lar conocido sin realizarle a priori modificaciones, considerándolo una unidad genéticamente igual a su predecesora, es decir un clon.

Clonación tipo 2: Está referenciada a lo didáctico en términos de las condiciones bajo las cuales se desarrolla la tarea. Por ejemplo, cuando el docente no modifica a priori:

- la consigna de la tarea,
- las condiciones de realización: tiempos, organización grupal, materiales, etc.,
- anticipaciones de posibles procedimientos puestos en juego por parte de los alumnos y las posibles intervenciones docentes,
- la gestión de la puesta en común y
- los cierres provisorios en relación a la actividad realizada.

La clonación de tipo 1 en esta investigación se evidencia al intentar realizar el rasgado de las puntas de los ángulos de un triángulo usando GeoGebra.

Damos cuenta de la existencia de la clonación tipo 2 al no modificarse inicialmente la consigna del problema cuando se cambia el lápiz y papel por el GeoGebra.

La maestra M1usa el GeoGebra para clonar lo que habitualmente se hace usando papel, siguiendo la misma lógica considerándolo como un isomorfismo o iso-funcionamiento. Tanto M1 como M2 están motivadas de hacer el "rasgado en versión GeoGebra", replicando lo hecho en papel: dibujar un triángulo, romper las puntitas del triángulo, pegarlas y ver que es un llano. Tal como caracterizó M2 "*el plegado versión GeoGebra*". Dicho proceso presentó algunas dificultades tales como la elección de la ventana para determinar el ángulo, la rotulación de los mismos, la rotación de objetos, el uso del deslizador. El equipo de investigadoras decidió analizar lo relativo a la construcción del triángulo y a la determinación de sus ángulos, con el fin de seguir profundizando en la definición del contenido a ser enseñado.

La intención de clonar un procedimiento, puede permitir comenzar o profundizar la exploración del artefacto, pero rápidamente el aprendiz es "exigido" a movilizar otros conocimientos, el nuevo medio le impone condiciones o restricciones diferentes que en el mismo momento que las asume, "matan" su intención de clonar. La clonación está destinada, en algunos casos, a extinguirse rápidamente, pero configura una intencionalidad productiva para activar el proceso de creación de un instrumento nuevo (génesis instrumental). A su vez seleccionar y proponer un problema pensado para ser resuelto en lápiz y papel, sin mediar ningún tipo de transformación, con el fin de resolverlo usando GeoGebra, puede ser una puerta de entrada al nuevo trabajo de los estudiantes en el aula.

La maestra M3 narra que mientras experimenta con el GeoGebra, con similar intención de clonación (método del plegado), descubre una herramienta nueva en el recurso, el uso del zoom. Hecho que lo califica como un potencial del GeoGebra, pues se puede indagar en varios triángulos y "ver" en la pantalla todo a la vez. (Ver figura 3)

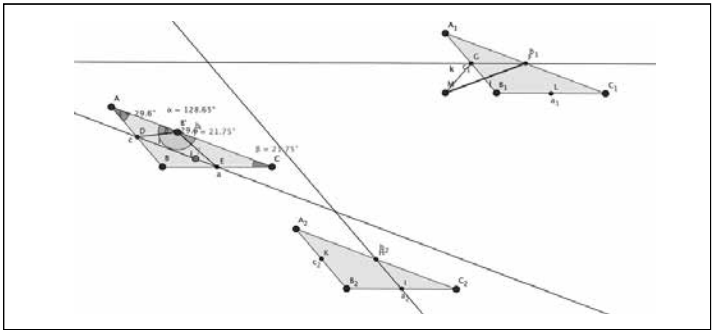


Figura 3

La figura anterior muestra las exploraciones de M3, que dieron cuenta en el EC de la relevancia que tuvo para ella poder experimentar con una variedad de casos particulares y compararlos en un mismo "plano" simultáneamente.

3.2. Nacen los ángulos de "afuera"

A partir de las indicaciones dadas por M1para la construcción del triángulo usando GeoGebra, ver fase 1 página 50, surge uno de los **hitos** que encontramos en este recorrido. La presencia del recurso como movilizador y condicionante de las propiedades geométricas que se habilitan para realizar la actividad anterior. La construcción del triángulo, no era de por sí un problema para los integrantes del EC. Se resolvía de manera sencilla usando la herramienta polígono, definiendo 3 lados. La potencialidad de la actividad, bajo las circunstancias dadas, venía determinada por cómo medir e identificar los ángulos interiores del triángulo construido. Al intentar marcar y medir los ángulos interiores aparecen los ángulos **"de afuera".** Éstos son los que completan 360° con cada ángulo interior del triángulo.

En el EC en un primer momento se definió algebraicamente la suma de los ángulos interiores a partir del GeoGebra, donde el movimiento de los vértices implicaba un cambio en las medidas de las amplitudes angulares que aparecía en la pantalla. Se comienza a observar, por parte de las maestras, una relación de dependencia entre el movimiento de los vértices y las medidas de amplitud angular. Esta constatación resultó novedosa a partir de visualizarlo en el GeoGebra.

El carácter dinámico del software se complementa con la posibilidad de visualizar instantáneamente, además de las medidas, la suma de los ángulos interiores del triángulo resultando efectivamente 180°. Aparece la idea de variable en términos de que "al mover" un ángulo se modifican los otros dos manteniendo constante la suma de los tres ángulos.

La siguiente imagen muestra una de las exploraciones realizadas que generó discusiones importantes.

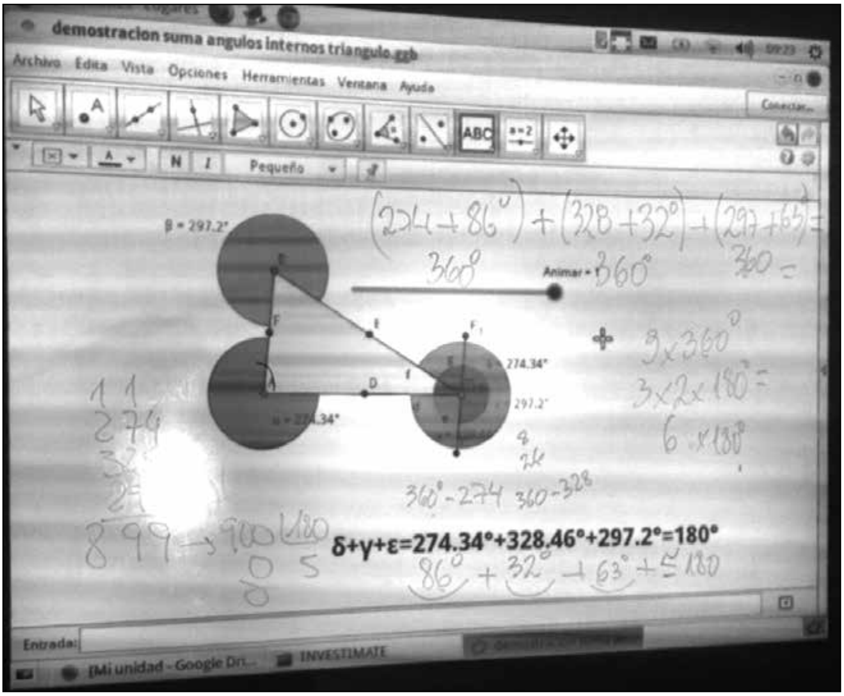


Figura 4

Para asombro del equipo de trabajo la suma de los ángulos interiores, terminó transformándose, en la de los ángulos de **"afuera"** y observando que la suma de ángulos que automáticamente venía realizando el GeoGebra, aunque los sumandos eran todos mayores a 180°, igual la suma seguía siendo 180°.

Realizar el análisis de las cuestiones matemáticas que estaban en juego posibilitó vivir la construcción de fundamentaciones para interpretar y entender lo que se había generado a partir del uso de GeoGebra. Sin duda que la nueva herramienta, posibilitó establecer nuevas relaciones matemáticas a partir de lo que sucedió. Como propone Brousseau (2007, p. 17), una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. En este medio estaba incluido el uso del GeoGebra y esto posibilitó el poder discutir la suma que aparece al final del pizarrón de la figura 4 como consecuencia de sumar los ángulos "de afuera" en el triángulo representado.

Este medio ofreció resistencias (medio antagonista) que determinaron nuevas discusiones y producción de fundamentaciones que usando "lápiz y papel" no hubiesen sido posible. Afirmamos esto pues al usar en GeoGebra la ventana "medir ángulo" sin tener en cuenta el sentido exigido para medir el ángulo interior permitió la aparición de la medida del **"*ángulo de fuera*"**, es decir la diferencia del ángulo interior al completo. Este hecho resultó ser un nuevo momento o episodio de simetría en el EC.

Analizando el pizarrón de la figura 4

Aparece en la pantalla la suma[2] 328°+ 274° + 297°= 180°, siendo 328°, 274° y 297° las medidas de los ángulos "*de afuera*".

La suma de 328° + 274°+ 297° es 899°, para el intercambio en el EC se aproximó a 900°.

I1: *la suma da 180° y los ángulos no son los convexos.*

I1: *la suma de* 328° + 274° + 297°= 180°

I2: *preguntas eso ¿no?*

M2: *si no veo el dibujo y veo la suma ¿qué pasa?*

P3: *da 180°*

Todas: *Chan, chan, chan…*

2. La suma está aproximada a enteros.

Todo el grupo de trabajo se alinea tras una problemática, tratar de interpretar las razones y relaciones matemáticas presentes en esa adición que plantea el GeoGebra y en estudiar el campo de validez de la misma, produciendo nuevas ideas. Esto implica cuestiones tales como: ¿qué adición de ángulos está modelando?, ¿puede ser posible que la suma sea 180°?, ¿cómo se justifica ese resultado que es "aritméticamente" falso?, esta suma es falsa en el modelo de "lápiz y papel" pero ¿podrá ser diferente en este nuevo entorno? Se ensayan diferentes explicaciones a este fenómeno.

I1: Aparentemente, suma el convexo, por más que ponga el número del otro…

M1: alguien más quiere pasar (….), Ahora vamos a sumar los externos.

P3[3]: la suma, da 900. 900 dividido 180 da 5.

I1: ¿por qué dividido 5? ¿Podes explicar de nuevo?

I1: si hay 5 veces 180, y los interiores un 180 más, entonces da 6, 180. Cierra (Refiriéndose a 3 ángulos completos)

I2: explicá todo de nuevo.

M1 se dirige a las practicantes.

I1: (…).son 3, de 360°.

M1: ah, da 5, 180°.

P3: entonces ese es 180° (refiriéndose a la suma de los interiores).

I1: otra manera de llegar a probar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180.

Se abren así varias discusiones que posibilitan la profundización de algunas ideas matemáticas en relación a: los ángulos y sus medidas y a la relación de los ángulos interiores de los triángulos. También se profundizan conocimientos tecnológicos en relación al uso del GeoGebra. Se visualizan ángulos que no se tematizan habitualmente cuando se trabaja solo con lápiz y papel y que el GeoGebra habilita para su identificación. La intencionalidad del resolutor fue marcar los ángulos de adentro, pero la manera en la que el artefacto está definido hizo que terminara marcando otro ángulo. Estas son condiciones que impuso el uso del recurso y que nuestro conocimiento parcial del mismo no logró inicialmente controlar.

3. Las voces de las practicantes se marcan con P1, P2 y P3.

Este análisis de la suma de los ángulos no convexos, además de sorprendernos a todas, lleva una vez más a ponernos en cierta simetría que nos obliga a buscar explicaciones y que ponen a todos los integrantes del espacio colaborativo en igualdad de condiciones frente a esta problemática.

Una posible explicación que surge es que parecería que el GeoGebra con cada ángulo mayor a 180° lo convierte en el complemento a 360° de ahí que cada vez que tenemos un ángulo cuya medida es de 360° vuelve a 0°. Por eso la suma de estos ángulos del triángulo mayores a 180° da como resultado 180°.

En cada vértice, aparecen considerados dos ángulos, ***el de adentro y el de afuera***, que juntos forman un completo, por ejemplo, aparece el binomio (274°, 86°) cuya suma da 360°, representando en la figura un ángulo de "afuera" y uno de "adentro" del triángulo respectivamente.

La suma de 328° + 274° + 297°, podría interpretarse como equivalente a la suma de: 32° + 86° + 63°. Cada uno de estos "nuevos sumandos" es la diferencia de la medida de un ángulo completo y el ángulo no convexo correspondiente a cada ángulo interior del triángulo:

$$32° = 360° – 328°, \quad 86° = 360° – 274, \quad 63° = 360° – 297°$$

Siendo el resultado de esa suma 180°[4].

Aparece una relación explícita 328° + 274° + 297° y una implícita de 32° + 86° + 63° = 180° cuyos vínculos pasan por crear un nuevo objeto "el ángulo de afuera" y su relación con el ángulo de "adentro", así como la invarianza de la suma de "los de afuera". Investigar estas relaciones de dependencia fue uno de los focos de esa sesión.

A partir de las discusiones se construyen generalizaciones probando con distintos polígonos convexos, analizando la suma de los ángulos interiores y "*los de afuera*". Se consideran algunas invariantes. Por ejemplo, en el triángulo como tiene 3 ángulos interiores tiene 3 de afuera. La suma de los tres de afuera y los tres interiores es 360° x 3 = 1080°, expresado de otra manera: 360° son 2 ángulos de 180°, por lo que 1080°= 180° x 2 x 3, lo que permite expresar a 1080° como 6 x 180° y como los interiores suman 180° entonces los tres de afuera suman 900°, es decir 5 llanos (5 x 180°). Otra manera de analizarlo es que 360° x 3 = 1080° y como los interiores suman 180° entonces 1080° - 180° = 900°.

4. Seguimos considerando la aproximación al entero.

Se puede relacionar esta propiedad con lo que planteó la practicante P3 al comienzo de la discusión. Es así que, si conocemos la cantidad de ángulos de un polígono convexo, podemos saber cuánto suman todos los de "afuera y los de adentro".

Se ha instalado un modo de producción de ideas matemáticas y especialmente de pruebas en el EC, que implican determinar y formular el problema matemático para ser comprendido por todos, la exploración de diversos casos, la búsqueda de generalizaciones, la elaboración de pruebas y fundamentación de ciertas relaciones. Esta manera de producir conocimiento matemático-didáctico hace a un cierto tipo de práctica, que caracteriza a este EC.

En la siguiente sesión de trabajo en el EC, aparece una nueva potencialidad del GeoGebra, en relación a que habilita una nueva manera de pensar geométricamente. Este recurso impone condiciones y propicia que las relaciones matemáticas que se conocen se vinculen de otra manera o se profundicen y se construyan nuevas al reflexionar sobre lo que va sucediendo. El comentario de M3 lo explicita:

> M3: *Esto suma a nuestro proyecto porque la herramienta ya no es un accesorio, no es algo que permita hacer algo que yo no pueda, sino que en realidad la herramienta se transforma en una manera distinta de aprender y ahí sí pongo en juego conocimientos matemáticos.*

El recurso es visto en ese momento como un medio para aprender de manera diferente, pero siguen invisibilizadas aún en el EC las interacciones que hacen que lo que surge "como mérito" del recurso se convierta en un problema matemático que todos quieren resolver. Este hecho se vincula con el carácter formativo de esta experiencia.

Sin embargo, aunque hay algunas cuestiones aún invisibilizadas en relación a la construcción del trabajo colaborativo hay otras que se muestran directamente en lo expresado por M3: "*Esto suma a nuestro proyecto"*. Esta es una marca en la colaboración y en la construcción de ese espacio. Desde el comienzo de las reuniones hasta llegar a este momento aparecen huellas de la construcción de una trama en relación a que en el EC estamos definiendo el contenido a ser enseñado a los niños, expresado por M3.

En cuanto a "los ángulos de afuera y las relaciones con los de adentro", se sigue profundizando. A continuación, se describe el diálogo mantenido.

M3: Esto de los 5 para que me cierre bien (….). Esto de los 900° son la suma de 5 veces 180° porque el sexto son la suma de los ángulos de un triángulo.

I1: Se podría demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° por ese camino… o investigar.

I3: También en cada vértice del triángulo hay un ángulo completo formado por uno de adentro y uno de afuera. Es una regularidad porque cada ángulo de adentro forma con uno de afuera 360°. Hay 3 de adentro y cada uno de adentro tiene otro de afuera, aparece otra constante que es una regularidad que tuvimos que pensar para resolver esta situación.

M3: Así como uno habla de la suma de los ángulos interiores se podría hablar de la suma de los (exteriores) de afuera (…) Y entonces eso que veíamos el otro día como un obstáculo didáctico que siempre que nosotras enseñamos ángulos siempre vemos el convexo y nunca el cóncavo, entonces podríamos hablar de la suma de los ángulos internos y no vemos las regularidades que se dan en los externos (los de afuera).

El uso del GeoGebra para M3, posibilitó construir que la suma de los *"ángulos de afuera"* en un triángulo también es constante. Relaciones que no son trabajadas en general en el aula, pues los ángulos de "afuera" no son un objeto de enseñanza en tanto no existen como contenido curricular. Tampoco lo es la regularidad explorada en el EC referida a que la suma de los afuera también es constante dando siempre 5 llanos (900°). Estos ángulos y la propiedad construida en este espacio son las relaciones "duales" de los que habitualmente sí se trabajan en la escuela. Parece ser que el uso del GeoGebra bajo ciertas condiciones propiciadas en el EC permitió que esas relaciones pudieran transformarse en objeto de enseñanza.

La investigadora I1 pone sobre la mesa, otra potencialidad del recurso, a partir del diálogo desarrollado con los maestros, "*la medida de los ángulos*". En el cuaderno, para medir ángulos, en general usamos como instrumento el semicírculo. Este nos permite medir ángulos convexos, por lo tanto, este instrumento no habilita a medir los ángulos de afuera. En cambio, el GeoGebra, puede enfrentarnos a la determinación y medición de los ángulos no convexos, según como seleccionemos los vértices, ver figura 5.

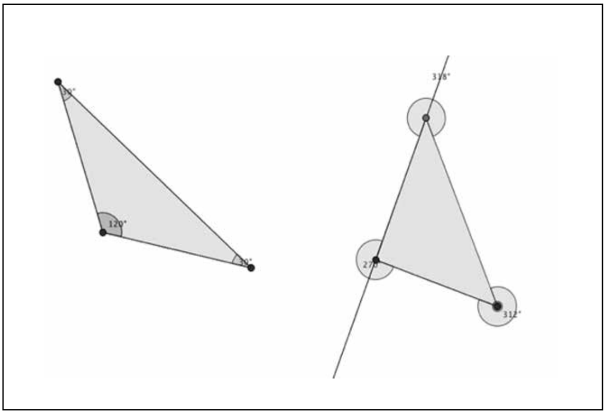


Figura 5

El fragmento de diálogo que sigue muestra uno de los intercambios dados en el EC al analizar producciones de los niños:

MI: *Eso es lo que yo veo más (…) no sé si es un obstáculo. Se miden con semicírculo.*

M2: *Hay muchas preguntas que tienen que ver con que se miden (…) Van a las marcas, a los registros.*

M3: ¡*Fíjate esto que interesante! Se están preguntando, ¿un triángulo tiene 3 ángulos?*

I3: *M2, sabes lo que estaba pensando que esa afirmación después de 180° no hay* (se refiere a la no existencia de ángulos no convexos)*, está muy reducida a la herramienta semicírculo, que usan para medir. Sin embargo, esta herramienta GeoGebra sí nos habilita a saltar, a incorporar ángulos que miden más de 180°, es una potencialidad del GeoGebra. El semicírculo puede, pero hay que hacer otras cosas.*

El equipo docente sigue pensando en el potencial del GeoGebra en relación a que nos permitió **"ver"** otros ángulos. Y que al determinarlos y medirlos surgen **los de afuera y sus medidas**. Relacionando la definición del contenido a trabajar, (ángulos: en polígonos convexos) con la importancia de trabajarlo usando el GeoGebra.

M3: *Entonces a mí me parece muy importante trabajar en esto de los ángulos, no solo los que están dentro del polígono, de los interiores, sino abrir para poder descubrir y en eso* ***esta herramienta*** *nos da posibilidades que* ***no nos da el papel y el lápiz****.*

M2: *¡Pero al intentar medir surgen otros y opa! ¡Es porque hay otro ángulo!!*

El equipo de investigadoras comparte con el equipo de maestros esta potencialidad del recurso. Recordemos que el potencial del nuevo recurso fue un tema que estuvo presente desde el inicio del trabajo en el EC y que el grupo de maestros ha ido elaborando *razones* para utilizar el GeoGebra desde el uso posibilitador de construir otras ideas matemáticas que con lápiz y papel no hubiesen surgido.

Observamos cómo se va avanzando en la definición del contenido matemático a trabajar incorporando el recurso. Esto es un avance ya que el GeoGebra ahora es parte real de la secuencia a diseñar. Nos hemos ido apropiando del mismo como instrumento didáctico, ya no es solo un artefacto.

La maestra M2, claramente define el contenido a trabajar y da razones de ello.

> M2: *A mí me parece super interesante. Personalmente es algo nuevo y me genera un desafío, no es algo que se diga ah mirá yo lo trabajé así… y me parece que desde la investigación aporta, que es algo nuevo porque no hay material al respecto. Desde GeoGebra sabemos que está el tema de alturas, pie de altura, potencia, corro la altura, corro los triángulos, etc.* ***Pero de ángulos no hay secuencias hechas, no hay reflexiones hechas, no hay de ángulos cosas elaboradas, no hay reflexiones***.

En síntesis:

Se ha comenzado un proceso de conceptualización, en el sentido de Vergnaud de los **ángulos de afuera** de los triángulos. Pues se han identificado relaciones vinculadas a ellos. En cada vértice existe uno, cada ángulo de adentro y su correspondiente "de afuera" forman un ángulo completo, la suma de los tres ángulos de afuera son 5 llanos es decir 900°, la suma de los ángulos interiores y los de afuera dan tres completos (3 x 360°= 1080°) y hemos creado una nominación para identificarlos con el fin de comunicar sus propiedades: se llaman "**los de afuera"**.

Se han producido relaciones que es necesario nombrar, caracterizar. Una de ellas es la del ángulo de "adentro"[5] con el "de afuera". Dicha relación es biunívoca, es decir que por cada ángulo interior a un polígono (de adentro de aquí en más) existe y es único un ángulo de afuera y recíprocamente, con el mismo vértice y los mismos lados. La propiedad que cumple el ángulo de afuera y el de adentro es que ambos suman un ángulo completo (360°).

5. Nos referimos al ángulo interior.

El EI caracterizó la clonación como un constructo que permite dar cuenta de dos aspectos: del proceso de génesis instrumental de un recurso y del proceso por el cual los docentes lo convierten en una herramienta didáctica. El GeoGebra sufrió un proceso de génesis instrumental, que podemos caracterizarlo desde la "clonación" hasta transformarse en un instrumento didáctico, con características propias que hacen que pensemos que estamos frente a una ruptura de racionalidades al pasar del lápiz y papel al uso del GeoGebra.

Este equipo de trabajo ha creado un objeto de enseñanza asociado a un recurso didáctico: **los ángulos de afuera mediados por el GeoGebra.**

CAPÍTULO 4

DEL OBJETO MATEMÁTICO A SER ENSEÑADO A LA PLANIFICACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA EN EL AULA

En este capítulo se presenta el diseño, la planificación y la implementación de la secuencia que se realizó en el espacio colaborativo con el objetivo de enseñar las relaciones entre los ángulos de afuera y de adentro en polígonos a través del uso del GeoGebra.

Dada la complejidad del proceso de colaboración, decidimos poner el foco en este capítulo en las relaciones entre las interacciones de los niños, los maestros y el conocimiento y desde ahí realizar el análisis.

Por otro lado, pensamos que en este capítulo se aportan insumos para el trabajo en el aula con los niños de educación primaria, así como también para el trabajo en formación docente. Detallaremos el análisis didáctico en profundidad del problema 4.

Es así que este capítulo muestra como asunto central lo sucedido en el aula, las preocupaciones allí surgidas. Estas preocupaciones eran llevadas luego al EC para analizarlas y tomar decisiones a partir de lo que ya se tenía planificado. Los debates dados en EC no serán objeto de análisis de este capítulo. Solamente los tomaremos en cuenta para presentar algunas modificaciones a la secuencia de enseñanza.

4.1. De la secuencia de actividades

El proceso de planificación de las actividades para la secuencia, si bien fue corto en el tiempo, tres sesiones de trabajo, fue arduo e intenso. En ese proceso se diseñaron diferentes actividades, se realizó un análisis didáctico de cada una de ellas. La secuencia de actividades fue modificada varias veces como consecuencia de ese proceso de discusión, de idas y vueltas. El sentido otorgado al proceso tiene relación con la idea de trabajar los ángulos de afuera, los de adentro y sus relaciones como motor de un cierto tipo de trabajo matemático[1]. Los intercambios y debates en el EC fueron insumos para la construcción y modificación de los problemas que se iban construyendo. Para dicho diseño se tuvo en cuenta la Teoría de las Situaciones Brousseau, (1986, 2007) y aportes de Sadovsky (2005) en relación a dicha teoría.

A continuación, se presenta la secuencia de actividades diseñadas que resultó como producto del trabajo realizado.

1. El tipo de trabajo matemático del que estamos hablando se desarrolla a lo largo de los capítulos 2 y 3.

Tema: Ángulos en *triángulos, cuadriláteros y otros…*

Problema 1

Construir un rectángulo usando GeoGebra. Al moverlo, debe seguir siendo rectángulo. Registrar los pasos realizados.

Problema 2

Ahora construir un rectángulo que resista la prueba del arrastre, es decir que "sea un rectángulo". Registrar los pasos realizados

El problema 1 y 2 funcionan como etapas de la misma situación. Los hemos separado solamente para su análisis didáctico y su implementación.

Problema 3

a. Con el GeoGebra construí dos tipos distintos de triángulos según sus ángulos.
b. Explicá por qué es del tipo que elegiste.

Problema 4

a. En los triángulos del problema 3, ¿qué relaciones encuentran entre:
    1. un ángulo interior y el de afuera?
    2. todos los de afuera y los interiores?
b. Por escrito, expliquen las conclusiones a las que llegaron. Luego tendrán que presentarla a los compañeros.

Problema 5

¿Y en los cuadriláteros y sus ángulos qué sucedería? ¿Y con los pentágonos?

Problema 6

Escribe una carta a Horacio contándole todo lo que aprendiste de ángulos.

Problema 7

Devolución de Horacio a los niños.

Los problemas 1 y 2 fueron planteados como un solo bloque, cuyo objetivo general era un primer acercamiento al recurso para trabajar la prueba de arrastre y para ello se trabajó con el tema rectángulo por la historia de este grupo de niños. Los problemas 3, 4 y 5 forman otro bloque cuyo objetivo general es establecer relaciones entre los ángulos de adentro y de afuera en los triángulos, cuadriláteros y pentágonos. Los problemas 6 y 7 corresponden a la evaluación de lo aprendido y su correspondiente devolución.

Presentamos a continuación una breve descripción de los objetivos de cada actividad, de las condiciones de realización y de su gestión. Esta secuencia fue trabajada en un grupo de 5° año de escuela.

Problema 1

> Construir un rectángulo usando GeoGebra. Al moverlo, debe seguir siendo rectángulo. Registrar los pasos realizados.

En este problema no se realizaron restricciones sobre las herramientas disponibles con GeoGebra.

El objetivo del mismo estaba centrado en la exploración y en el arrastre. La idea era que los alumnos entraran en el juego con GeoGebra, y de alguna manera indagaran la condición dada, que una figura se diferencia de un dibujo si no se deforma al arrastrarla. La consecuencia de la prueba de arrastre es que mantiene las características de la figura en cuestión, sus propiedades y relaciones. Si solamente las figuras fueron construidas perceptivamente y no se pusieron en juego propiedades de esas figuras, las mismas son simplemente dibujos.

Problema 2

> Ahora construir un rectángulo que resista la prueba del arrastre, es decir que “sea un rectángulo”. Registrar los pasos realizados.

El problema 2 es la continuación del problema 1, tenían que construir un rectángulo que resistiera la prueba del arrastre y registrar los pasos realizados.

A partir del trabajo anterior, en donde libremente usaron las herramientas disponibles en el GeoGebra aparecieron como novedad el uso de “objeto fijo”, “polígono rígido” y “el candadito”. Estas herramientas hicieron que el rectángulo no se moviera en el problema 1. En el EC se acordó como condición de realización para el problema 2, restringir el uso de ellas. El objetivo de este problema fue validar las propiedades del rectángulo usadas para su construcción. Para el cierre se pensó en formular las siguientes preguntas, ¿qué hicimos para que no se deforme?, ¿qué procedimientos usamos?, ¿qué propiedades validan cada paso de los procedimientos?

En el cierre de esta actividad quedan plasmadas las relaciones que se venían poniendo en juego de acuerdo a los procedimientos de resolución confrontados y se centra en el asunto de porqué podemos estar seguros que la construcción es un rectángulo.

Una de las conclusiones a la que los niños arribaron al finalizar el problema dos fue:

> "Para tener ángulos rectos y poder construir un rectángulo podemos usar el trazado de rectas perpendiculares y esto asegura la presencia de ángulos rectos. Que no es necesario medir los ángulos porque ya se saben que son rectos porque trazamos las rectas perpendiculares".

Las ideas expresadas en el párrafo anterior muestran un avance vinculado a una de las preocupaciones iniciales traídas al EC por una de las maestras: "*la ausencia de la idea de perpendicularidad*". Interpretamos que con estas actividades se están trasformando alguna de las "relaciones débiles" identificadas en el capítulo 2. Es así que esta secuencia abonó a enriquecer las relaciones entre ángulos rectos y rectas perpendiculares.

Se decidió en el EC trabajar la prueba de arrastre con el rectángulo, porque los alumnos estaban familiarizados con él, no les era una figura ajena, e intentar cerrar cuestiones matemáticas que habían aparecido en las actividades desarrolladas en el capítulo 2 como por ejemplo la relación de perpendicularidad entre los lados consecutivos del rectángulo y atarla con ángulos rectos y recíprocamente.

Estas dos primeras actividades permitieron un primer cierre al tema de la perpendicularidad y su relación con el ángulo recto, una primera entrada al uso del recurso, a la exploración de las diferentes herramientas, como son el polígono rígido, el candadito, la medida de ángulos entre otras. Un tercer elemento que surgió fue el tema del **ángulo de afuera**, al medir el ángulo de 90°, apareció el ángulo de "afuera" de 270°.

Las siguientes fotos muestran los registros de trabajos de dos grupos de niños.

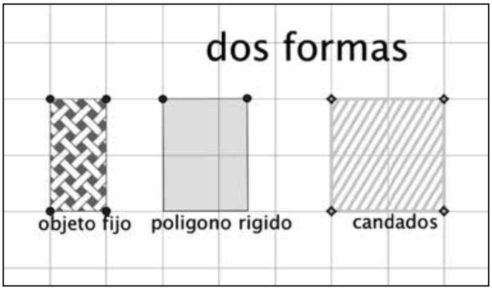


Foto 1

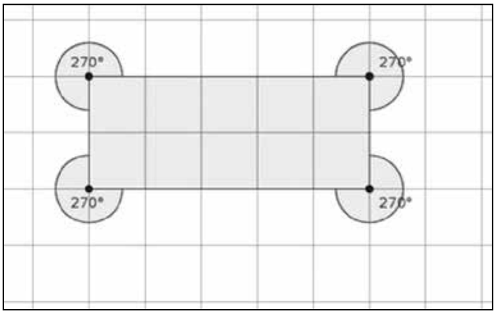


Foto 2

La primera foto hace referencia a las herramientas utilizadas por los niños, para que el rectángulo no se moviera. Muestra que los niños comienzan a usar el GeoGebra de manera intuitiva y van utilizando las ventanas que le ofrece dicho programa. El único acercamiento que estos niños habían tenido al uso de GeoGebra había sido una clase de exploración del programa de manera libre anterior a esta propuesta. Es decir, *proponer una construcción sencilla es fuente de exploración del funcionamiento del programa al mismo tiempo que lo es del estudio de alguna propiedad de la figura en cuestión*. Es decir que no es necesario un manejo previo competente de uso de GeoGebra para proponer actividades matemáticas a los estudiantes usando este recurso. Esta evidencia la podemos alojar en términos de Trouche como un modo de génesis instrumental del GeoGebra para los estudiantes.

La segunda foto hace referencia a la aparición sorpresiva de los ángulos de afuera, es en esta actividad en donde surgen dichos ángulos. Este grupo de alumnos quería validar la construcción del rectángulo mediante la medida de sus ángulos, "*si los cuatro ángulos medían 90°, entonces el cuadrilátero dibujado con GeoGebra era un rectángulo*". Lo que sucedió es que, al intentar medir los ángulos interiores, miden los de "afuera". Es así que el equipo de niños al ver que cada uno de los de afuera medía 270° concluyó que los de "adentro" debían medir 90°, porque los de adentro y los de afuera suman siempre un ángulo completo, es decir 360°.

Problema 3

a. Con el GeoGebra construí dos tipos distintos de triángulos según sus ángulos.
b. Explicá por qué es del tipo que elegiste.

El objetivo del mismo fue la exploración de la ventana ángulos y la determinación y medición de ángulos. En cuanto a las condiciones de realización se continúa con las restricciones anteriores, y se agrega el uso de la pantalla blanca sin ejes cartesianos ni vista algebraica. La organización de la clase fue la misma que en la clase anterior.

Para el cierre se pensó en posibles conclusiones que los niños podían arribar, como por ejemplo en palabras de un niño: "*Medimos los ángulos con la herramienta medida de ángulo para garantizar el tipo de triángulo elegido y lo movemos hasta…" y/o "Para garantizar el tipo de triángulos tuvimos en cuenta construirlos con ángulo según su amplitud" "Aparecen ángulos afuera del triángulo con el mismo vértice" "Nos damos cuenta que moviendo los vértices del triángulo cambian los ángulos"*

Problema 4

a. En los triángulos del problema 3, ¿qué relaciones encuentran entre:
   1. un ángulo interior y el de afuera?
   2. todos los de afuera y los interiores?
b. Por escrito, expliquen las conclusiones a las que llegaron. Luego tendrán que presentarla a los compañeros.

Como hemos visto al llegar al problema cuatro, ya vivían en el aula los ángulos de afuera y los de adentro.

El objetivo entonces fue establecer relaciones entre dichos ángulos en los triángulos. Relaciones entre "todos los de afuera", o relaciones "solo entre los interiores", o tomando en cuenta "los tres de afuera y los tres interiores".

Esta actividad se dividió en dos partes, una primera en donde los alumnos investigaron las relaciones entre los ángulos de "adentro" y los de "afuera" y una segunda parte en donde tenían que comunicar y explicar a sus compañeros las conjeturas realizadas. Se implementaron en días diferentes y se mantuvieron los mismos equipos de niños en la primera como en la segunda parte.

Las condiciones de realización de la primera parte fueron las mismas que en las actividades anteriores. Se podía utilizar la ventana polígono, se pidió que trabajaran con pantalla blanca y la medida del ángulo se expresó a través de números enteros.

Para el cierre como parte del análisis didáctico se anticiparon en el EC posibles conjeturas a las que podrían arribar los niños.

Encontramos en los ángulos de los triángulos que*:*

1. *Hay por vértice dos ángulos: uno de afuera y otro de adentro.*
2. *Los lados del de adentro y el de afuera son comunes.*
3. *Uno de afuera y su correspondiente de adentro suman siempre 360°.*
4. *Todos los de afuera y todos los de adentro suman 1080° (360°*x *3).*
5. *Los de adentro suman siempre 180°, entonces los de afuera suman 900°.*
6. *Los de afuera suman 900° entonces los de adentro suman 180°.*

En la primera parte de esta actividad se realizaron cierres parciales en cada uno de los grupos, no hubo puesta en común. La segunda parte consistió en la puesta en común por parte de cada grupo de niños, coordinado por la maestra y con presencia del grupo de investigadores y del representante de UNIPE.

Problema 5

¿Y en los cuadriláteros y sus ángulos qué sucedería? ¿Y con los pentágonos?

El objetivo planteado fue, *"Construir conjeturas de las relaciones entre los ángulos de afuera y los interiores en cuadriláteros convexos y generalizar"*, se mantuvieron las restricciones anteriores.

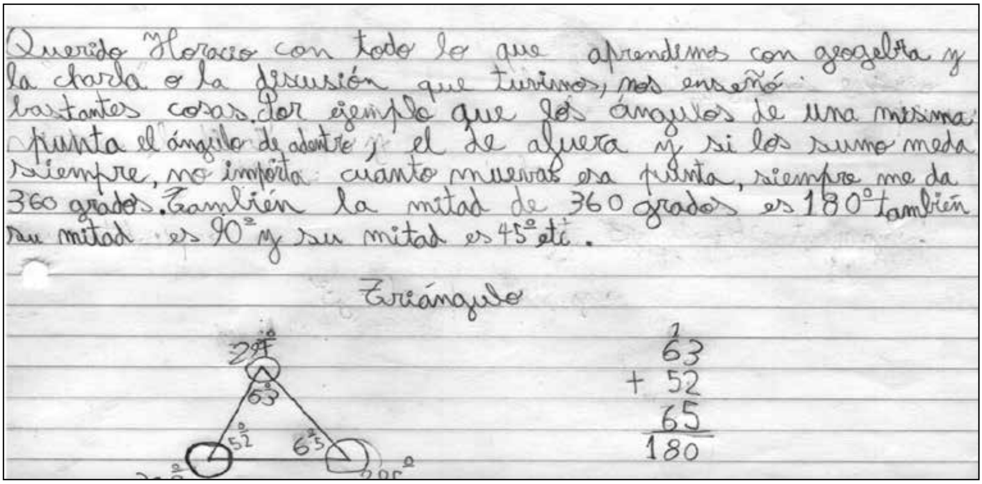
Problema 6

Escribe una carta a Horacio contándole todo lo que aprendiste de ángulos.

El problema 6 es una actividad de evaluación, en donde el alumno debe contar a otra persona "lo que sabe de…" Esto lo ayuda a tomar conciencia de lo que ha aprendido y cómo lo ha hecho, estamos frente a una actividad de tipo meta – cognitivo.

Según Celman (1998) la meta cognición da cuenta del nivel de conciencia que tiene un sujeto de sus modos de aprender, esto significa tomar conciencia de cuáles fueron las formas en las que se aprendió y a qué dificultades se enfrentaron.

A continuación, presentamos algunas de las cartas enviadas a Horacio:


Querido Horacio con todo lo que aprendimos con geogebra y la charla o la discusión que tuvimos, nos enseñó bastantes cosas. Por ejemplo que los ángulos de una misma punta el ángulo de adentro y el de afuera y si los sumo me da siempre, no importa cuanto muevas esa punta, siempre me da 360 grados. También la mitad de 360 grados es 180° también su mitad es 90° y su mitad es 45° etc.

Triángulo

63
+ 52
65
180

Si sumas todos los ángulos de adentro te da 180
no importa cuanto lo muevas y eso también para
con los de afuera, que si los sumas te da 900 y si los
sumas todos te da 1080 que es 360 x 3

Gracias por leer mi carta chau.

. Un ángulo (de afuera y de adentro) siempre tiene 360° grados
aunque en geogebra modificaras el de adentro, el de afuera se afectará
quedando siempre en 360° grados.

Problema 7

Devolución de Horacio a los niños.

La actividad 7 fue una devolución realizada por Horacio Itzcovich, les envió una carta a los niños. Transcribimos algunos párrafos de la misma.

H: "Les decía que lo que no sabía, y que les pido que lo lean en voz baja, es que existe el ángulo de afuera. Yo conozco uno que se llama externo, pero Uds "fabricaron" otro que lo llamaron "el de afuera", que junto con el de adentro, suman 360°, todo un círculo, siempre apoyado en el mismo vértice. Y lo otro que no sabía era que la suma de todos los ángulos de adentro y los de afuera en CUALQUIER triángulo suman 360 x 3 = 1080".

Y tampoco sabía que la suma de todos los ángulos de adentro y los de afuera de CUALQUIER cuadrilátero suman 360 x 4 = 1440. Esta buenísima esta idea, si conozco cuánto suman lo de adentro, puedo saber cuánto suman lo de afuera y si conozco cuánto suman los de afuera puedo saber cuánto suman los de adentro.

…Bueno, estoy impresionado por todo lo que han trabajado. Se nota que les interesó lo que les propuso su maestra. Quiero que sepan que me encantó visitar vuestra escuela, verlos trabajar, explicar cómo habían pensado el problema, como se los contaban a sus compañeros, como manejaban la computadora. Para mí fue un placer enorme verlos y espero que nos volvamos a encontrar en alguna otra oportunidad. Muchas gracias por permitirme verlos, conocer su aula, y muchísimas gracias por las cartas que me enviaron.

4.2. Del análisis e implementación de la actividad 4

Problema 4

a. En los triángulos del problema 3, ¿qué relaciones encuentran entre:
   1. un ángulo interior y el de afuera?
   2. todos los de afuera y los interiores?

b. Por escrito, expliquen las conclusiones a las que llegaron. Luego tendrán que presentarla a los compañeros.

El problema 4 consta de dos partes, una primera parte en donde los alumnos a partir de la actividad anterior tienen que indagar qué relaciones existen entre un ángulo interior (de "adentro") y el de "afuera", entre todos los de afuera, entre todos los de afuera y los de adentro en un triángulo. Una segunda parte en donde tienen que escribir las conclusiones a las que llegaron para luego presentárselas al resto de los compañeros y dar una explicación de las mismas.

En el EC se tomaron dos decisiones. En la primera parte se propone rearmar los grupos de niños con el objetivo que queden conformados con alumnos de niveles similares de desempeño de manera que todos puedan participar. En la segunda, posponer para otro encuentro la puesta en común y producir un texto escrito para explicar a los otros compañeros sus conclusiones y donde expresen por qué funcionan las mismas.

Hay que destacar que en el análisis de la actividad anterior y en la planificación de ésta, la participación de las practicantes en el aula marcó un hito. Las practicantes que en los primeros encuentros participaban muy poco y con mucha inseguridad, han logrado hacerse un lugar en el EC asumiendo un rol de suma importancia y muy activo. Parecería que las practicantes se han apropiado de una manera de intervención en el aula, problematizan y requieren explicaciones a los niños sobre lo que están trabajando. Esto es consistente con lo discutido en el espacio colaborativo, durante el análisis didáctico de cada una de las actividades diseñadas.

La necesidad de realizar un análisis didáctico que inicialmente parecía naturalizado, se configuro en un hito. El equipo docente asumió el valor del **análisis didáctico** como herramienta metodológica y éste se explicita en los intercambios realizados. Es así que se puso en acto la anticipación de los posibles procedimientos de los niños como elemento para definir el problema 4, las conclusiones a las que podían arribar los alumnos, las explicaciones que los niños podrían ofrecer, etc.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de la parte b) del problema 4, era que los niños explicitaran las conjeturas a las que arribaron en relación a la suma del ángulo de afuera con el correspondiente de adentro en un triángulo, la suma de todos los ángulos de adentro del triángulo, la suma de todos los de afuera y la suma de todos los de adentro con todos los de afuera en el triángulo.

Algunos de los procedimientos esperados por los niños

Procedimientos posibles	Explicaciones posibles[3]
Siempre la suma del ángulo de "adentro" con el de "afuera" correspondiente es 360°.	1. Una explicación posible esperada es que usaran la ventana de medida de ángulos con el GeoGebra y sumaron en una hoja aparte y alcanzara con probar en cada uno de los tipos de triángulos que tenían en la pantalla. 2. Otra explicación posible es que al medir con GeoGebra veían que daba un ángulo completo, en palabras de niño "un círculo".
La suma de los ángulos de "adentro" en un triángulo es 180°.	La explicación posible es que al medir cada ángulo y sumar (mentalmente o haciendo la suma en papel) daba 180°, y que eso es siempre porque al mover un ángulo, todos variaban y siempre daba 180°.
La suma de los ángulos de "afuera" en un triángulo es 900°.	La explicación posible es que al medir cada ángulo y sumar daba 900°. Siempre sucede eso porque al mover un ángulo, todos variaban y siempre daba 900°.
La suma de todos los ángulos, los de adentro y los de afuera, en un triángulo es 1080°.	1.Medir cada ángulo (el de adentro y el de afuera) y realizar la suma, esto lo realizaban en cada tipo de triángulo. 2. En cada vértice "veían" que la suma daba un ángulo completo y como son tres vértices, multiplicaban 360 por 3.

Interacciones entre el docente y el alumno a partir de la situación: la puesta en común un problema desde el inicio

En cuanto a la gestión de la clase, durante los primeros encuentros en el EC existía una tensión en relación a la manera de realizar la puesta en común con el GeoGebra

2. Algunas de las explicaciones posibles que siguen están en términos de niños.

M2: mi bichito es ¿cómo gestiono una puesta en común con esto[3]?, ¿cómo hago que esto circule, que todos estén mirando eso…?

Se observó un control significativo en M2 en relación a la tensión anterior a medida que se avanzó en la implementación de la secuencia. Durante la implementación de la misma, el problema de gestionar la puesta en común con GeoGebra se fue diluyendo y el recurso apareció como otro más al igual que el pizarrón. Interpretamos que además de las características personales de M2, este cambio fue producto del trabajo realizado en el EC, del proceso que hicimos todos los integrantes en relación a la discusión, al análisis de las clases, a la gestión puesta en marcha en cada uno de los encuentros. Posiblemente en la soledad de la planificación de la clase los maestros no tienen con quién discutir en profundidad, sin apelar a recetas. La no posibilidad de la confrontación con otro y la invisibilidad de la tarea de la planificación y del diseño de actividades para llevar al aula hacen que el uso del GeoGebra para enseñar no se vea como un recurso más. Sensevy (2009), sostiene que al analizar la acción didáctica de los docentes sobre las tareas que ellos proponen en sus clases, éstas funcionan como instrumentos a través de los cuales piensan sus clases y es así como las hemos vivido nosotras en este espacio. Es entonces que sostener una puesta en común con un recurso nuevo, fue todo un desafío para el equipo en general.

Hemos constatado que lo que permite desde la planificación y la implementación de las actividades, la acción docente fundamentada, es el pensar y reflexionar sobre la gestión. Esa reflexión, sobre lo que se produjo, lo que suponemos que se producirá, es la que hace que las relaciones entre los ángulos de adentro y los de afuera que surjan se puedan comunicar y discutir en la clase. Se evidencia en algunos diálogos la manera en que la docente rescata los dichos de los alumnos y éstos se transforman en propiedades a partir de confrontarlos y ponerlos en discusión.

La clase

En la implementación de esta actividad estaban presentes 26 niños, la maestra del grupo, la directora de la escuela, la otra maestra que participaba del proyecto, las tres practicantes, las tres investigadoras, la inspectora de Primaria

3. “Esto” hace referencia al uso del GeoGebra.

de esa zona, una maestra directora de otra escuela y el representante de la Unipe, Horacio Itzcovich.

La gestión de la clase la realizó la maestra del grupo y los demás adultos no participamos. Los niños estaban sentados en círculos alrededor de la mesa en donde estaba el computador. Estaba instalado el cañón, y se proyectaba la pantalla en el pizarrón. Los niños también tenían las notas escritas que ellos habían producido en la parte b) del problema.

La clase comenzó con la presentación de los trabajos realizados por algunos grupos. Se había decidido en el EC, que se comenzaría con un grupo de niños cuya producción involucrara una relación entre los ángulos de adentro y de afuera. Se buscó como resultado de la discusión colectiva que cada grupo pudiera relacionar la producción en discusión con la suya con el fin de que se enriquecieran las producciones.

Es importante destacar que todos los niños entraron en las actividades propuestas y que cada uno a su nivel logró explicar a sus compañeros las relaciones construidas.

Algunos momentos de la puesta en común

El primer grupo (G1) que presentó su trabajo explicó la relación que habían establecido "*la suma de un ángulo de adentro más el de afuera en un triángulo es 360 grados*".

Lo justificaron diciendo que midieron los ángulos de adentro del triángulo y los de afuera y les daba 360 grados, en varios triángulos.

Este grupo de niños encontró esta relación basándose en la medida de cada uno de los ángulos. Además, observaron perceptivamente que el ángulo de afuera más el de adentro da un "círculo" (ángulo completo) (Foto3). La validez de esta propiedad para ellos venía dada por el hecho de haberlo hecho muchas veces y en diferentes tipos de triángulos. Estamos en presencia de un tipo de pruebas pragmáticas según Balacheff (2000), donde yendo caso a caso con distintos tipos de triángulos establecen la relación: "*el de afuera y el de adentro forman un círculo*". Estos alumnos también han podido establecer las relaciones de dependencia entre el ángulo de afuera y el de adentro pudiendo encontrar una relación constante con respecto a la suma de los ángulos en juego.

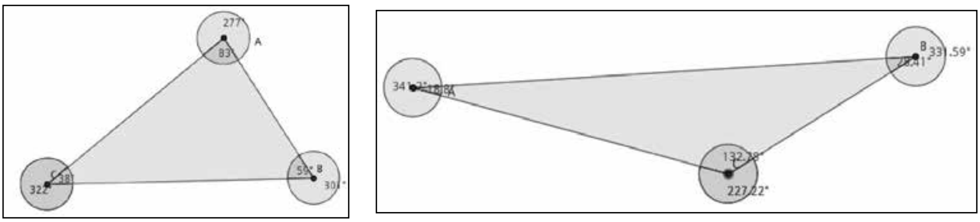


Foto 3

Algunos compañeros de otros equipos intervinieron afirmando que eso es verdad si los ángulos son en el mismo vértice.

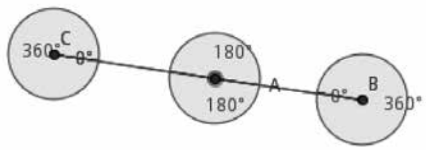
A1: Si sumas un ángulo de afuera con uno de adentro siempre va a dar 360°. Siempre si es el mismo vértice.

Y aclaran poniendo un ejemplo: si suman el ángulo de adentro de 83° (ver foto 3, vértice A) con el de 300° de afuera (vértice B) no da 360°. Se observa como estos niños están estableciendo condiciones de validez en su postura, "*siempre, si es el mismo vértice*", apelando a un contraejemplo para sostener sus dichos. Otro alumno expresa que lo establecido por el grupo 1, si se le agrega que todos los ángulos del triángulo sean iguales, no sería necesario decir que sea en el mismo vértice. Esta discusión entre alumnos permite entrar en otra cuestión: las condiciones donde una proposición vive. Este alumno está validando la propiedad estableciendo en qué condiciones para él/ella se cumple. Hay que destacar que en este grupo de niños está circulando dos elementos fundamentales en la enseñanza de la matemática, el uso de contraejemplos para indicar que la proposición es falsa y el uso del dominio de validez de una propiedad.

Esta primera intervención del grupo 1, produjo en el resto de los niños nuevos cuestionamientos. Surge en la discusión el tema que, si un ángulo se mueve en el triángulo, todos los ángulos también varían. Por ahora miran la variación del ángulo de adentro y su correspondiente de afuera.

A1: si afectas el de adentro va a afectar el de afuera.

El uso del GeoGebra hace posible que los alumnos vayan probando que si mueven un ángulo los demás también varían. Detectar esta relación de dependencia y variación los pone en situación de plantearse la existencia de un triángulo en que un ángulo es de 180° y los otros son de 0°. Ponen en la discusión la siguiente idea: "si el ángulo mide 0° el mismo sigue siendo ángulo". En el cuadro 1 se observa la pantalla del computador y el diálogo de dos niños.



A2: la condición que sea un triángulo es que tiene que tener tres ángulos,

A3: ¿pero un ángulo de cero grados, sigue siendo un ángulo?

Cuadro 1

En esta dinámica de la clase surgen nuevas preguntas que no siempre se terminan por responder porque abren otros aspectos diferentes a los que se quería establecer en ese momento. Estas son decisiones que la docente tiene que ir tomando en relación a sus intervenciones. Estas preguntas que aún no son respondidas son anotadas en un costado del pizarrón donde se recogen todas las cuestiones pendientes en relación a la actividad. El diálogo que sigue entre los alumnos muestra las ideas que van surgiendo a partir de la exploración de la actividad 4:

A4: *Encontramos que el ángulo de adentro nunca va a ser más grande que el de afuera. En los triángulos.*

A5: *Si el de adentro mide más de 180 el de afuera es más chico.*

A4: *Si el de adentro no es más de 180 el de afuera no puede ser más chico.*

A6: *Me interesa saber si en toda figura el ángulo de adentro es más chico que el de afuera.*

Estos alumnos, sin intervención de la maestra, están estableciendo relaciones y dando razones de que el ángulo de adentro es siempre más chico que el de afuera en los triángulos. Primero los niños observan que, si el ángulo de adentro es mayor a 180°, el de afuera necesariamente tiene que ser menor, ya que ambos forman un ángulo completo. Luego concluyen que eso no puede pasar en los triángulos porque no tienen un ángulo que mida más de 180°.

Mientras se da esa discusión, un alumno pregunta si no habrá figuras en las que sí suceda que el ángulo de adentro es más grande que el de afuera (A6). Frente a esta pregunta un grupo de alumnos narran que ellos encontraron que sí existía y lo presentan en la pantalla:

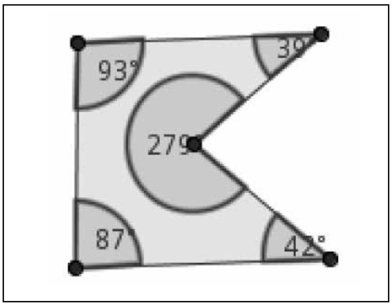


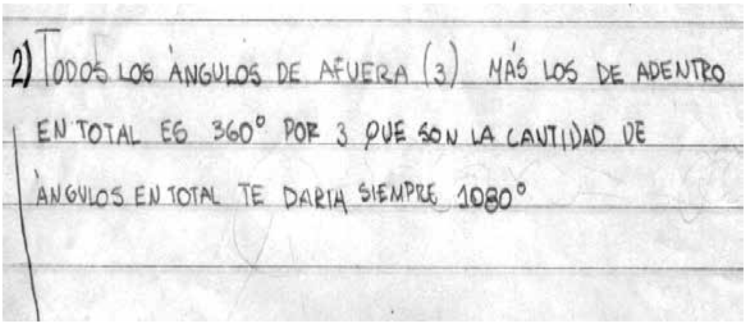
Foto 4

Nuevamente aparece el contraejemplo como manera de mostrar cuando una proposición es falsa. El polígono no convexo representado en la foto 4 muestra un contraejemplo de la proposición *"siempre los de afuera son más grandes que los de adentro".*

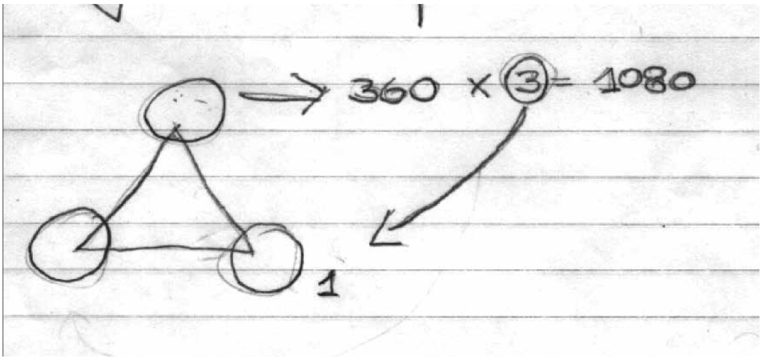
Esta primera parte de la clase finaliza con la propuesta de la maestra de sintetizar hasta ahora lo que van encontrando.

> M: *todos encontraron que la suma del ángulo de adentro más el ángulo de afuera da 360° en todos los triángulos, en cualquier tipo de triángulo. Movemos un ángulo y se mueven otros. Si movemos un ángulo afecta a todos los demás. Formulamos dos preguntas que dejamos en pausa…*
>
> *1) ¿si el ángulo mide cero grados sigue siendo un ángulo?,*
>
> *2) ¿qué sucede si movemos un lado del triángulo, afecta los ángulos?*

El grupo 2 (G2) presenta sus conclusiones:



2) TODOS LOS ÁNGULOS DE AFUERA (3) MÁS LOS DE ADENTRO EN TOTAL ES 360° POR 3 QUE SON LA CANTIDAD DE ÁNGULOS EN TOTAL TE DARIA SIEMPRE 1080°



> A7: *si sumamos todos los ángulos de adentro con todos los de afuera. En cada vértice 360, por 3.*
>
> A8: *sumamos todos los ángulos de adentro y de afuera da 360° por 3, 1080°. Porque 360° que es un ángulo completo por la cantidad de vértices.*

A7: *por 3 porque son tres vértices*

A9: *pero eso solo en el triángulo, en el cuadrado va a dar más…*

El G2 plantea una nueva relación, que la suma total de ángulos de adentro y de afuera es de 1080° y dan razón de ello. Pero también ya anticipan qué sucederá en el cuadrado o en los cuadriláteros en general. Las variaciones que están presentando el grupo 2 no son solamente de dependencia a la interna de la figura entre los ángulos de afuera y de adentro, sino que avanzan introduciendo una nueva variable que es el número de lados del polígono en cuestión.

La dinámica del grupo continua, y surge la discusión sobre si la suma de ángulos interiores de un triángulo es 180°, y pegada a esta discusión aparece la relación que la suma de todos los ángulos de afuera es 900° ya que los de adentro suman 180° y en total ya habían comprobado que todos suman 1080°. Esto lo podemos evidenciar en el siguiente diálogo:

A10: *maestra nosotros hicimos...*

A11: *eso más eso más eso, 360 más 360 más 360 siempre te va a dar 1080.*

A10: *Yo le reste los ángulos de adentro que es 180°, y me da 900°, que son los de afuera. Usamos calculadora.*

Nos parece sustantivo el aporte que hizo este niño y la intervención de la maestra:

A10: *Para comprobar que siempre va a dar 180°, lo que podés hacer es sumar todos los de afuera y a ese número sumarle 180, si te da 1080 es porque los de adentro suman 180, sino está mal.*

M: *¿Y eso por qué pasa?*

A11: *los de adentro y los de afuera son 1080°.1080° le reste los de adentro y me da 900°.*

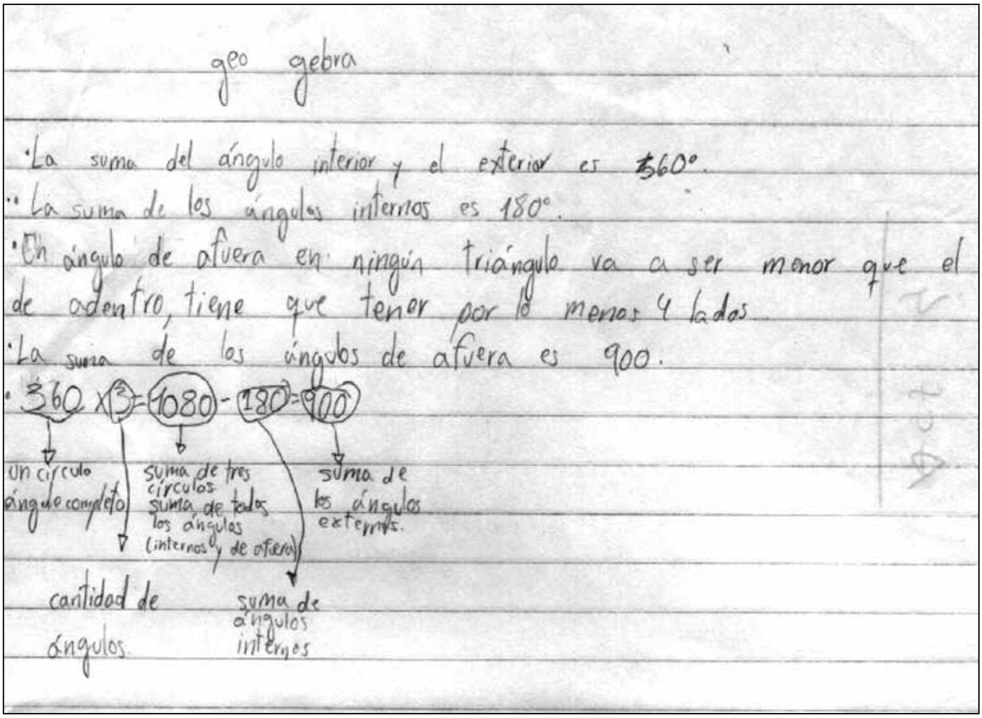
M: *A10, no pensó así, él hizo la suma de los de afuera.*

A10: *sumé este ángulo de afuera, más este, más este. A ese número. Todos los de afuera, les suma 180 y te tiene que quedar 1080. O sea, si da 1080, está bien la relación.*

El alumno A10 propone una nueva manera de comprobar que la suma de los ángulos de adentro de un triángulo es 180°. Para ello parte de que la suma de todos los ángulos de "adentro" y los de "afuera" es 1080° (propiedad justificada por los niños a través de 360° x 3) y propone sumar solo los de afuera. Esta suma se realiza probando en distintos triángulos como vimos anteriormente. Si a la suma de los ángulos de afuera, le suma 180° y da 1080°, concluye que efectivamente la suma de los ángulos interiores es 180°. Es importante destacar que este tipo de trabajo en el aula promueve que los alumnos vayan desarrollando cadenas lógicas de pensamiento que hacen a una manera de concebir la matemática, habilitando no solo encontrar la relación, sino que es necesario probarla. Es así que tomando como válido que saben que los de afuera son 900°, entonces los de adentro suman 180° para preservar los 1080°.

En relación al objetivo planteado para esta actividad en el EC y en cuanto a los procedimientos esperados, este grupo de alumnos superó lo planificado.

Para finalizar adjuntamos un registro de uno de los grupos, en donde relatan luego de la puesta en común y de haber explorado con el GeoGebra lo que han producido en esta clase:


geo gebra

·La suma del ángulo interior y el exterior es 360°.

·La suma de los ángulos internos es 180°.

·Un ángulo de afuera en ningún triángulo va a ser menor que el de adentro, tiene que tener por lo menos 4 lados.

·La suma de los ángulos de afuera es 900.

·360 x 3 = 1080 - 180 = 900

un círculo ángulo completo

cantidad de ángulos

suma de tres círculos suma de todos los ángulos (internos y de afuera)

suma de ángulos internos

suma de los ángulos externos.

Al llevar al aula esta secuencia de actividades, pensada, discutida, planificada en el EC, constatamos que colaboró para la producción de conocimiento por parte de los niños.

Hemos compartido evidencias de ello a lo largo de este capítulo. Podemos afirmar que hubo producción de conocimientos matemáticos y que el uso del recurso GeoGebra posibilitó que aparecieran de manera dinámica las relaciones de dependencia y variación con algunas sumas constantes.

Sostenemos que hubo producción matemática en el EC y por parte de los alumnos, en cuanto se establecieron algunas de las relaciones entre la suma de los ángulos de afuera, también entre los de adentro en el triángulo y la suma de todos los ángulos (de adentro y de afuera) en el triángulo y en los cuadriláteros. El tipo de ángulo nominado como "el de afuera", que no forma parte de los contenidos oficiales de enseñanza, posibilitó sin duda la producción de relaciones matemáticas que tiene un potencial formativo en sí mismo, más allá del objeto. En particular la construcción de relaciones de variación y dependencia entre los ángulos de afuera y de adentro dio cuenta de un proceso de generalización y de producción de explicaciones.

A su vez el GeoGebra habilitó que los ángulos de afuera se visibilizaran y a partir de esa visibilidad se pudiesen construir algunas relaciones. Éstas no solamente quedaron pegadas al triángulo, sino que se exploraron en otros polígonos. En relación al uso de GeoGebra, aprendieron a construir rectángulos, triángulos, a medir ángulos, a realizar la prueba de arrastre, a usar la posibilidad dinámica del recurso con el objetivo de establecer relaciones de variaciones y dependencia entre los ángulos de afuera y de adentro en cualquier polígono.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y NUEVAS PREGUNTAS

En este capítulo presentamos algunas reflexiones finales sobre lo estudiado y las principales conclusiones a las que hemos arribado. Asimismo dejamos planteadas algunas preguntas que nos han ido surgiendo a lo largo de este estudio.

Organizamos conclusiones y preguntas en tres grupos: primero, en relación a la constitución del espacio colaborativo; segundo, en relación a la construcción de conocimientos matemático-didácticos mediados por el GeoGebra; y tercero, relacionado a la formación de los estudiantes que se preparan para ser futuros maestros.

5.1. Constitución del Espacio Colaborativo

El espacio colaborativo se constituyó como un espacio de producción didáctico- matemático donde se desarrollaron tareas en relación al diseño y planificación de actividades de enseñanza. En este espacio, los maestros, en conjunto con los investigadores comenzamos a pensar problemas en torno a las prácticas de enseñanza y actuar sobre ellas. Es así que, a modo de eje central en relación a la construcción del espacio colaborativo, éste se constituyó en lugar de encuentro y de pensamiento reflexivo. Podemos contraponer el trabajo habitual del docente en soledad, con la generación de espacios que favorecen y propician pensar cuestiones matemáticas relativas a la enseñanza. Es allí, en ese espacio, donde surgieron nuevas ideas usando nuevos recursos.

Algunas conclusiones en cuanto a las condiciones que creemos que posibilitaron la colaboración fueron las siguientes: sostener las discusiones en el tiempo y en un lugar físico, realizar intercambios fundados y no simples opiniones, aceptar las diferentes miradas las cuales ayudaron a la profundización de las ideas. Las distintas concepciones de los integrantes del EC –maestros, practicantes e investigadores– posibilitaron generar intercambios que establecieron una nueva forma de pensar y hacer matemática en la escuela.

Las intervenciones de las investigadoras aportando dudas, discrepancias, acuerdos, a lo que presentaban las maestras y las practicantes, favorecieron el clima de trabajo. Así como también las que las maestras y las practicantes presentaban al EC.

En el EC estaba presente el pensamiento y el hacer de los niños, las maestras y las practicantes lo traían a través de sus percepciones, las producciones de los mismos e interpretaciones de diferentes asuntos vinculados con la enseñanza.

Un último aspecto que queremos destacar se refiere a la preservación de las tensiones que fueron emergiendo. Es decir, no buscar resolverlas inmediatamente, no buscar que quienes confrontan "se amiguen pronto" resultó un motor para preservar el debate.

De todas maneras siguen quedando abiertas numerosos interrogantes, entre ellos podemos destacar: ¿Cuáles son las características que hacen posible la conformación de espacios colaborativos?; ¿Cuáles son los asuntos que abonarían a la emergencia de problemas de enseñanza que contemplen la producción de conocimientos matemático-didácticos?, ¿y a la emergencia de objetos de enseñanza?

5.2. La construcción de conocimientos didáctico - matemáticos mediados por el GeoGebra

El trabajo realizado en el EC impuso condiciones en la forma de hacer matemática en el propio espacio y con los niños, en particular, al poner en escena el GeoGebra. Las producciones de los alumnos en el aula fueron espejo de algunas discusiones dadas en el EC. Por ejemplo, se valoró la importancia de no solo determinar las relaciones entre los objetos matemáticos sino la necesidad de fundamentarlas. Se incorporaron algunas de las reglas del debate matemático: contraejemplos y condiciones bajo las cuales las proposiciones son válidas.

También surgió explícitamente el reconocimiento y uso del análisis didáctico (Brousseau, 1986) como herramienta para pensar la enseñanza y es en este sentido donde se centra la intencionalidad didáctica. Pensar a partir de lo que los niños pueden producir, lo que van produciendo durante la secuencia y de cómo ésta se modifica ayudó a generar nuevas ideas sobre la enseñanza, a pesar de la complejidad que involucró todo esto, producto de la intención de maniobrar con el GeoGebra.

En este espacio se produjo un contenido “nuevo” desde la enseñanza de la matemática para dar lugar a generalizaciones y nuevas relaciones fundadas: **los ángulos de adentro y los ángulos de afuera.** Se construyeron relaciones entre ellos, la suma de todos los ángulos de afuera y de adentro, la suma solamente de los de adentro y la suma solamente de los de afuera en los triángulos, en los cuadriláteros y pentágonos. Es decir que al recorrer las relaciones matemáticas y analizar sus transformaciones, en relación a los distintos recursos, se confronta y se producen ideas nuevas, apelando constantemente al recurso. Aunque el nuevo objeto de enseñanza producido en el EC no forma parte de los contenidos oficiales de enseñanza, permitió involucrar a los alumnos en un proceso de producción de relaciones matemáticas que tiene un potencial formativo en sí mismo, más allá del objeto en cuestión, una vez más, mediado por el GeoGebra.

La noción de clonación, entre otras cosas, permite iluminar los diferentes análisis que se desarrollen al momento de planificar un proyecto de enseñanza o bien de formación docente, que contemple el uso de la computadora y el GeoGebra.

De todas maneras resulta necesario seguir profundizando sobre diversas cuestiones que se fueron identificando: ¿Qué condiciones e intervenciones hacen que el GeoGebra se haya convertido en instrumento?; ¿El uso del lápiz y papel será un obstáculo para comenzar a trabajar con GeoGebra?; ¿Cuáles serían las características de las actividades de clonación? ¿Para qué servirán: como disparador para usar el recurso y/o para analizar que se necesitan otras actividades para usar GeoGebra?; ¿Hay que enseñar a usar el GeoGebra antes de enseñar geometría con este recurso, o será al revés, o van en simultáneo?

5.3. Espacio de Formación para estudiantes de Magisterio

El espacio colaborativo se volvió también espacio de formación no solo de los maestros e investigadores sino también para la formación de estudiantes que están realizando su práctica en la escuela. El EC es en donde las estudiantes “viven” lo que están estudiando y aprenden a planificar, implementar y analizar conjuntamente sus prácticas. De este modo no es un conocimiento declarativo, sino que hay marcas de ese proceso, hay huellas, que en este texto no hemos desarrollado. Este estudio posibilitó mostrar otra forma de hacer en la formación en la práctica de los estudiantes de magisterio, estableciendo relaciones en el territorio entre las clases de los Centros de Formación Docente y el hacer en la escuela.

Transcribimos parte de lo expresado por una de las estudiantes que participó en el proyecto al final del mismo.

> P1: … *"El ver en las discusiones y en práctica los conceptos que fuimos estudiando en didáctica a lo largo del año como el de variable didáctica o el de contrato didáctico me ayudó a comprenderlos, a ver cuál es su importancia en la planificación y puesta en práctica de las actividades.*
>
> *El hecho de que se trabajara de forma cooperativa hizo necesaria la explicitación de todas esas cuestiones en las discusiones que se fueron dando y ese análisis que se hizo antes y después de cada actividad sobre cada decisión que se tomó; por qué, para qué, cuándo, fue muy beneficioso para mí que intentando aprender esta profesión. Considero que es una modalidad de trabajo que debería darse en magisterio porque facilita la comprensión de la teoría y muestra claramente cómo se expresa en la práctica".*

Si bien nos queda como deuda desarrollar este asunto, compartimos algunos interrogantes que siguen pendientes:

¿Cómo producir conocimiento matemático-didáctico en la formación de futuros maestros a partir de las producciones de los niños?; ¿Será posible desplegar otro dispositivo para la Formación Docente Inicial a partir del trabajo entre investigadores, maestros y estudiantes con características colaborativas?; ¿Qué lugar podrían ocupar en este tipo de espacios los practicantes?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133.

Boavida, A. y da Ponte, P. (2002). Investigación colaborativa: potencialidades y problemas. En GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional.* Recuperado de http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4069/1/02-Boavida-Ponte%20(GTI).pdf

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática.* Córdoba: Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? *Enseñanza de las Ciencias*. 9 (1), 10-21.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Celman, S. (1998). *¿Es posible mejorar la eval*uación y transformarla en herramienta de conocimiento? En Camillioni, A. y otros, *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo.* pp.35-66. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. y Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en **éducation**: un rapport nouveau à **établir** entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*. Recuperado de http://id.erudit.org/iderudit/000305ar

Duarte, B. (2010). *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática* (Tesis doctoral). Universidad San Andrés, Buenos Aires, Argentina.

Ferragina, R. (2012). *Geogebra entra al aula*. Buenos Aires: Espartaco.

Guber, R. (2014). *La etnografía. Método, campo y reflexividad.* Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Instituto de Evaluación Educativa (2012). Impactos del plan ceibal en las prácticas de enseñanza en las aulas de primaria. Informe final. Recuperado de http://evaluacioneducativa.ucu.edu.uy.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* Bucarmanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Revoir, A. (Coord.) (2013). *Plan Ceibal e Inclusión Social. Perspectivas interdisciplinarias.* Recuperado de http://rea.ceibal.edu.uy/art%C3%ADculo/noticias/institucionales/nuevolibroplanceibaleinclusionsocial.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P., Quaranta, M., Becerril, M. e Itzcovich, H. (2012). *Producción matemático-didáctica a propósito de una experiencia de planificación en el marco de un trabajo colaborativo entre maestros e investigadores.* Buenos Aires: UNIPE.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta M.E., Becerril, M., y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Revista Educación Matemática*. 28 (3), pp. 9-29.

Sensevy, G. (2009). *Categorías para describir y comprender la acción didáctica*. Recuperado de http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/acciondidactica-Sensevy-2007.pdf

Sensevy, Gérard. (2011). *Le sens du savoir.* Élements *pour une théorie de l' action conjointe en didactique.* Bruselas: De Boeck. Recuperado de https://rfp.revues.org/3958

Trouche, L. y Gueudet, G. (2009). Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218. Doi: 10.1007/s10649-008-9159- 8.

Este libro desafía a pensar la posibilidad de que la Escuela no sea solamente un lugar donde se transmiten conocimientos, donde se enseña, sino que se transforme también en un lugar donde los docentes produzcan conocimientos, donde los docentes también aprendan.

La constitución de un equipo de trabajo colaborativo integrado por docentes de una misma Escuela, directivos, practicantes e investigadores no debe haber sido una tarea sencilla: diferentes miradas, diferentes roles, diferentes experiencias. Pero tal como relatan las autoras, esta diversidad, en lugar de jugar en contra, resultó potente al momento de sentarse a debatir sobre problemáticas que se presentan al momento de enseñar matemática, en particular, geometría. Y como si esto fuera poco, utilizando la computadora y el programa GeoGebra.

Lo más intrigante resulta ser el modo en el que se le da lugar, en el espacio colaborativo, al rol que juega cada uno, nadie pierde su identidad y desde ese lugar surge la posibilidad de *convencer, respetando al interlocutor; a dejarse convencer contra el propio deseo, a renunciar a la autoridad, a la seducción, a la retórica, a la forma, para compartir lo que será una verdad común*. Se pone en el centro el lugar que se le otorga a la palabra del otro, al posicionamiento del otro, es decir, la consideración del otro. Un viaje para el cual vale la pena sacar un pasaje.

Horacio Itzcovich

ISBN: 978-9974-8639-5-8

9 789974 863958

Consejo de Formación en Educación

ADMINISTRACIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN PÚBLICA