LOS OBJETOS MATEMÁTICOS Y SUS REPRESENTACIONES: ¿LO QUE VES ES LO QUE ES?

Prof. Carla Damisa – Mtra. Silvina Ponzetti
carladamisa@gmail.com silvinaponzetti@gmail.com
IINN de Montevideo Paepu
Uruguay Argentina

Tema: Formación de profesores y maestros.
Modalidad: T
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Objeto matemático, representaciones, registros de representaciones semióticas.

Resumen

En matemática el trabajo sobre las representaciones de los objetos de estudio es imprescindible pues dichos objetos son ideales. Para organizar la enseñanza de algunas ideas matemáticas se hace imperioso diferenciar el objeto matemático de sus representaciones. Para ello recorreremos la temática estudiando las diferentes representaciones de un mismo objeto a partir de la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1993, 1996, 2006). Estos tipos de registros evidencian propiedades distintas del objeto matemático en cuestión. El poder manejar con solvencia los distintos tipos de registros y reconocer sus características, el identificar qué aporta y qué omite cada uno y el conocer cómo cambiar de un registro a otro conformarán la propuesta de análisis ofrecida por el taller, donde se trabajará con algunos ejemplos de geometría y otros de aritmética.

Poder acceder al análisis de estos aspectos a la hora de organizar la enseñanza es un aspecto altamente relevante para la formación docente.

La matemática se diferencia de otras áreas del conocimiento, entre otros aspectos, en que el estudio de ella es de naturaleza semiótica[1], es decir a través de la representación de los objetos de estudio. Esto se debe a que los conceptos matemáticos no son accesibles a través de la percepción ni tampoco a través de modelos. Por ejemplo la idea de triángulo no es accesible a través de los sentidos sino que es de naturaleza puramente mental. Sin embargo para acceder al concepto de triángulo necesitamos imperiosamente sus representaciones para analizar sus propiedades que hacen que esa figura sea triángulo y no por ejemplo cuadrilátero.

Las distintas representaciones de un mismo objeto no presentan las mismas propiedades y a su vez ninguna de las representaciones de ese objeto es completa. Estamos frente a una problemática que nos parece sustantiva. Para acceder a estudiar los objetos

[1] La semiótica es la teoría que tiene como objeto de interés el estudio de los signos.

matemáticos necesitamos de sus representaciones y a su vez éstas no son los objetos. Esta idea es la que Duval (1998, p. 175) plantea como paradoja:

> "... estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos".

Ahora bien, Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación que debe permitir tres actividades cognitivas:

1) Identificar una representación,
2) transformar una representación en otra dentro de un mismo tipo de registro (Tratamiento) y
3) la Conversión como una transformación de la representación de un objeto en otra representación del mismo objeto dentro de un registro distinto.

¿Por qué planteamos esto?

La concepción de aprendizaje de las ideas matemáticas según Duval (1998, 2006) y que nosotras compartimos, exige que para la comprensión de éstas ideas se articulen por lo menos dos registros de representación. En términos de Duval (1998, 2006): que se produzca la actividad de conversión como paso crucial para la compresión de conceptos matemáticos.

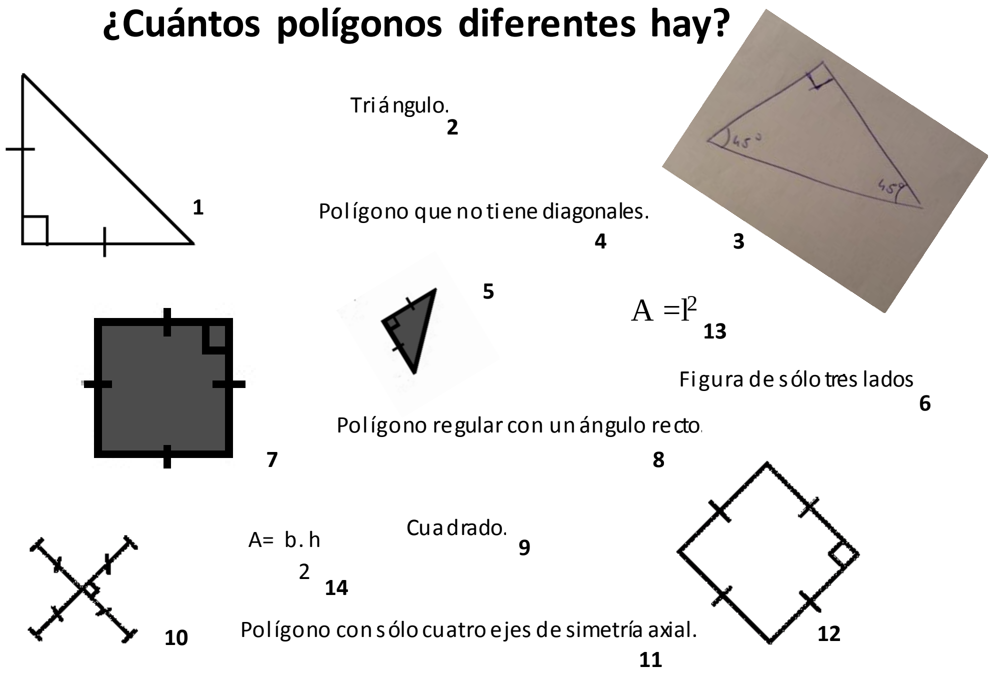
Esta constatación tiene derivaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En consecuencia será necesario en nuestras aulas habilitar actividades que favorezcan estas transformaciones. Por otro lado es de igual importancia que esas transformaciones se produzcan en situaciones que ayuden a la construcción de sentido de los conceptos y que no queden solamente en un plano sintáctico. Por ejemplo que no se limiten solamente a "pasajes mecánicos" de actividades de traducción de un tipo de registro de representación a otro.

A continuación presentamos dos actividades con el fin de esclarecer las ideas de registros de representación semiótica y poder establecer la diferencia con el objeto de estudio.

Las dos actividades tienen el objetivo de diferenciar objeto matemático de sus representaciones. En la primera la excusa es identificar polígonos y la segunda está en contexto aritmético trabajando con distintas representaciones de números racionales.

Actividad 1[2]:



Nota: Los números se incluyen a los fines de nombrar las diferentes marcas a analizar

El objetivo de la actividad es diferenciar el objeto matemático de su representación usando como excusa la clasificación de los polígonos ofrecidos. El problema es que las representaciones ofrecidas no son todas las que comúnmente viven en nuestras aulas de manera simultánea en una sola consigna. Para resolver la actividad, los alumnos deberán a partir de las representaciones de polígonos que se ofrecen determinar cuántos polígonos distintos hay. La consigna ya da por hecho que todo lo que está presentado en los distintos registros de representación son polígonos. Analizar este hecho no es trivial porque seguramente algunos estudiantes pensarán que la representación número 10 no concuerda con la idea de polígono que tenemos naturalmente. (Más adelante nos detendremos en este análisis).

Las representaciones que se ofrecen de los polígonos están en su mayoría en registro figural. Éstas son las representaciones habituales que aparecen en el trabajo geométrico: la figura a mano alzada con algunas marcas, los trazados o construcciones geométricas, las representaciones planas de figuras del espacio, etc. También se encuentran registros en lenguaje natural enunciando alguna propiedad de los polígonos en cuestión o

[2] Esta actividad fue diseñada por la mtra. Silvina Ponzetti en el marco de los cursos de alfabetización para nivel inicial primer ciclo de educación primaria de Paepu, no siendo presentada en ninguna instancia de dichos cursos.

identificando algún nombre. Se observan otros registros dados en lenguaje algebraico que indican la forma de calcular el área de los polígonos en cuestión.

Obsérvese que la cantidad de polígonos distintos representados son dos: cuadrado y triángulo. Cuando decimos distintos estamos pensando en “clase de polígonos” es decir que no importa su tamaño ni su posición sino lo que nos interesa son las propiedades geométricas de cada uno.

De igual manera si hubiéramos elegido otras representaciones podríamos hasta lograr clasificar al triángulo. ¿Qué representaciones deberíamos quitar para que la clasificación resultase triángulo rectángulo isósceles y no sólo triángulo?

Analizando los tipos de registros que aparecen tenemos que dentro del registro figural se encuentran las marcas: 1,5, 7, 10, y 12. A pesar de que todas pertenecen al mismo registro figural no todas connotan lo mismo para cada polígono, es decir no todas muestran lo mismo. Por ejemplo un triángulo aparece relleno y el otro no. Entonces uno de ellos apuesta a “evidenciar” sus puntos interiores y el otro hace foco en los lados y vértices. A pesar de que son la misma figura, y que se exponen en el mismo tipo de representación, cada una obliga a pensar en propiedades distintas de cada figura. Además la actividad exige pensar que representan el mismo objeto matemático teniendo que separarnos de las representaciones ofrecidas.

Lo mismo sucede con las representaciones de los cuadrados.

Una de las marcas que representa el cuadrado es la número 10. En un primer análisis, podríamos interpretar que se representan dos segmentos perpendiculares iguales que se cortan en el punto medio de ambos. Sin embargo es la representación de un cuadrado porque la actividad ya había avisado de ello exigiendo encontrar polígonos. Es una representación compleja del cuadrado porque están en juego cuatro propiedades de sus diagonales:

- que son dos,
- que son iguales en términos de longitud,
- que se cortan en el punto medio de ambas,
- que son perpendiculares.

Además de lo expuesto, observamos que no están a la “vista” ni los lados ni los ángulos del cuadrado. Sin embargo lo que está allí representado es un cuadrado.

¿Qué otro elemento del cuadrado podría significar esa representación? Podrían ser sus paralelas medias y cumplen con las mismas características que listamos para sus diagonales, pero son dos objetos matemáticos distintos.

Podríamos también establecer relaciones con la representación ofrecida en lenguaje natural: "Polígono con sólo cuatro ejes de simetría axial" y la representación número 10. Las dos representan un cuadrado sin embargo la expresada en lenguaje natural conlleva las dos "propiedades" que podría dar a entender, según quien lo trabaje, la representación 10: o bien diagonales del cuadrado o bien paralelas medias, ambos grupos funcionan como ejes de simetría. En consecuencia podría analizarse una equivalencia de propiedades evidenciadas en dos registros distintos, situación que no es nada natural para el que está aprendiendo.

Poder identificar esta equivalencia pone en juego actividades cognitivas de las que plantea Duval (1993), en este caso existen las marcas y podemos pasar de una a la otra a través de una conversión de registros, del figural al lenguaje natural.

Algo similar sucede con el análisis de las representaciones ofrecidas en lenguaje natural. La representación 2 y la 9 son las que quizás menos dificultad ofrezcan porque tratan del nombre de los polígonos en juego, este nombre debería connotar TODAS las propiedades del objeto matemático. Sin embargo las otras tratan de algunas propiedades. Por ejemplo propiedades en relación al número de diagonales de un polígono o de la cantidad de ejes de simetría. Estas propiedades están enunciadas y habrá que analizar a qué figura corresponden. Estas transformaciones que son necesarias no son nada naturales de realizar pues todas ayudan a completar el concepto matemático en juego y sin embargo ninguna ES ese concepto. Los procesos cognitivos que están en juego son de nivel de complejidad muy importante pues exige al alumno que vincule diferentes tipos de registros, en este caso entre figural y discursivo y que además analice a qué figura corresponden.

De igual modo sucede con el registro algebraico para el caso del cálculo del área, es necesario establecer alguna concordancia entre los registros de representación que están en juego para vincular los registros algebraicos con algún polígono.

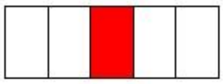
Podemos hacernos algunas preguntas a partir de esta actividad: estas marcas, ¿**definen** a la figura aunque pongan en relevancia una característica en particular? ¿Es suficiente la representación de alguna de las características de un determinado polígono para definirlo? ¿Cuántas características serían suficientes? ¿Todas? ¿Sólo algunas? ¿Cuáles?

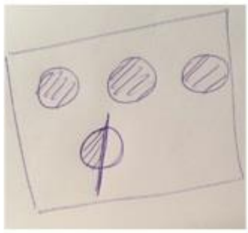
Contestar las interrogantes anteriores nos hace posicionar analizando la diferencia entre las representaciones de los objetos matemáticos y los propios objetos. También nos llevan a volver a pensar en la paradoja planteada por Duval (1998), de cómo se adquieren los conceptos en matemática y en qué ayuda al estudiante y al docente el manejar con solvencia y sentido varias representaciones de un mismo objeto matemático.

Ahora cambiando de contexto y pensando en un ejemplo en que estén en juego representaciones aritméticas podríamos analizar la actividad que sigue.

Actividad 2[3]

¿Cuántos números distintos hay?





3,5

$\frac{2}{10}$

Trescientos cincuenta centésimos

$\frac{7}{2}$ $\frac{1}{5}$ 0,2 $\frac{35}{10}$ $\frac{49}{14}$ $\frac{7}{35}$ $\frac{42}{12}$ $\frac{4}{20}$

Dos décimos

Nuevamente la idea es trabajar con las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, en este caso dos números racionales distintos $\frac{1}{5}$ y $\frac{7}{2}$.

Todas las representaciones que aparecen en registro aritmético ya sea en escritura decimal o fraccionaria nos informan características distintas de esos dos objetos. De igual manera la información ofrecida en registro gráfico también nos proporciona elementos distintos. Sin embargo ninguna de ellas "**son**" esos números pero para poder caracterizarlos y trabajar con ellos no tenemos otra opción que usarlas y a partir de ellas comenzar a conceptualizar la idea de número racional y en particular de $\frac{1}{5}$ y $\frac{7}{2}$.

Poder establecer que en todas esas representaciones ofrecidas en tres tipos de registro (gráfico, aritmético y lenguaje natural) se identifican solamente dos objetos matemáticos,

[3] Actividad adaptada a partir de Matemática: leer, escribir y argumentar. - 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, 2007.

en este caso dos números racionales, es complejo y necesita de un trabajo profundo por parte del docente (en la planificación de sus clases) y del estudiante. Al establecer relaciones entre las distintas representaciones aparecen otras ideas matemáticas en juego, por ejemplo la equivalencia entre los números racionales o la relación entre los dígitos que conforman las expresiones decimales y fraccionarias (que están mediadas, además, por la coma o la línea)

También, que en el registro gráfico puedo ver la relación parte todo más clara en la que representa a $\frac{1}{5}$ y no tan clara en la que representa a $\frac{7}{2}$ puesto que este último es mayora a la unidad. Podemos preguntarnos además (como lo hicimos en la actividad 1) ¿cómo sabemos que son números distintos?, ¿cómo podemos darnos cuenta rápidamente que uno de los dos números es mayor que 1 y el otro no?, ¿qué puede aportar la representación gráfica en un caso y en el otro?, ¿cómo podemos establecer relaciones entre las expresiones fraccionarias, las decimales y el lenguaje natural?, etc.

A modo de cierre

Panizza (2003), retoma lo presentado por Duval (1993) preguntándose bajo qué condiciones un numeral o un dibujo, por ejemplo, funcionan como representaciones de los objetos matemáticos. Podemos relacionar esta preocupación con lo expresado por Duval:

> "…es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es bajo esas condiciones que una representación funciona verdaderamente como representación, es decir que ella proporciona el acceso al objeto representado".

Esta exigencia de no confundir el objeto matemático de estudio con sus representaciones lleva a la organización de un trabajo docente diferente. No se puede dar por hecho que todas las representaciones planteadas en las actividades precedentes dan cuenta de propiedades diferentes de los polígonos o de los números en juego y que sin embargo ninguna de esas representaciones "**son**" esos polígonos y esos números.

En ese sentido Sadosvsky (2005) plantea que la exigencia de interpretar una cierta representación semiótica requiere desentrañar las relaciones implicadas en la misma, lo cual da lugar a la producción de conocimiento.

De esta manera, para que se produzca conocimiento matemático en nuestras aulas, será necesario generar espacios para que al hablar de tipos de registros de representación el discurso docente pueda entrar en diálogo con las preguntas y las ideas que los alumnos tienen al respecto de los objetos matemáticos a estudiar. Posibilitar espacios de diálogo y que los alumnos pregunten sobre esos números escritos y sobre las representaciones de esos polígonos, qué nos dicen, qué esconden, en qué representación está más visible una propiedad da mucho más sentido a las explicaciones del docente.

Es entonces que

> "… el trabajo con las representaciones cobra sentido cuando se aprecia su potencia para comprender ideas y producir conocimiento y su fertilidad se reduce enormemente cuando la actividad de representación se concibe en sí misma sin estar ligada a una finalidad en el marco de una problemática" (Sadovsky 2005).

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, *5*, 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar de registro de representación*. La Gaceta de la RSME. Vol. 9.1.

Hitt, F. (2000). *Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas*. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

MECCT (2007) *Matemática: leer, escribir y argumentar*. Buenos Aires.

Panizza, M. (2003). *Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática*. En Panizza, M. (Comp.). Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas, Capítulo 1, pp. 31- 57. Buenos Aires: Paidós.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*.Buenos Aires: Libros del Zorzal.