Las tareas de final abierto: su incidencia en el aprendizaje de la matemática

Ana Martínez

Departamento de Matemática
Consejo de Formación en Educación
Uruguay

Las tareas de final abierto: su incidencia en el aprendizaje de la matemática

Ana Martínez

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

1ª edición: 2020
Fotografía de cubierta: Rosedal del Prado de María José García
Edición: Departamento de Matemática
ISBN 978-9974-8779-9-3

Montevideo, Uruguay

Trabajo realizado en año sabático y aprobado por
el Consejo de Formación en Educación por
Acta 29 Resolución 8 del 26 de agosto de 2020.

ÍNDICE

Resumen

En el marco del año sabático se desarrolló un proyecto de investigación con el objetivo de contribuir a la mejora de la enseñanza promoviendo cambios en las prácticas de aula de los profesores de matemática mediante la reflexión sobre las tareas que acostumbran proponer a los estudiantes. Con este propósito se diseñó una tarea de final abierto, esto es, con múltiples respuestas correctas, se puso en escena en tres grupos de enseñanza media de liceos de Montevideo y se analizó la producción de los estudiantes centrándose en las diferentes estrategias que utilizan al resolver este tipo de tareas poniendo énfasis en los procesos de razonamiento. Las evidencias indican que este tipo de tareas contribuyen a promover un trabajo más participativo y generan situaciones con ricos procesos de aprendizaje en los que los estudiantes pueden pensar con más libertad y de acuerdo a sus posibilidades en un ámbito en el que el debate y el intercambio de ideas matemáticas aparecen de forma natural.

Palabras clave: tareas de final abierto, prácticas de aula, resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN

Es sabido que la matemática es una de las asignaturas que más dificultad acarrea a los estudiantes desde que comienzan en primaria. Sin duda que esto se debe a múltiples factores. Uno de los más relevantes radica, a mi entender, en el hecho de que solo el 50% de los profesores de matemática son egresados de los institutos de formación docente y, por lo tanto, formados profesionalmente para la tarea.

El abordaje de la enseñanza de la matemática en el Uruguay es, por lo tanto, muy dispar. Ha sido estudiado que los docentes reproducen en sus clases la manera en la que ellos aprendieron que es, en general, la que se enmarca, según Charnay (1995), en el *modelo normativo de aprendizaje*. En este modelo, centrado en el contenido, el docente es quien comunica los conceptos, propone ejemplos y muestra cómo resolver los diferentes ejercicios. El estudiante es un mero receptor que se entrena imitando lo que el docente hace.

Es por este motivo que es muy importante realizar un aporte con el propósito de poner en evidencia que es posible cambiar las prácticas de aula de manera que el estudiante viva la matemática de otra forma y se logre que el aprendizaje de los estudiantes se realice en un ámbito que posibilite un trabajo similar al que realiza el matemático: ensayando, elaborando conjeturas, argumentando, discutiendo con sus compañeros y comunicando sus resultados.

Si bien el cambio en las prácticas de aula se puede enfocar desde distintos abordajes, este trabajo se centra en las tareas que los docentes proponemos a los estudiantes.

En este documento se reporta una experiencia realizada con estudiantes de primer, segundo y tercer año de enseñanza media en liceos de Montevideo a partir de actividades de final abierto (Zaslavsky, 1995, 2008). En ella participaron los docentes a cargo de esos grupos, los practicantes que cursaban su práctica en estos y una educadora popular. Con base en esto se reflexionará sobre las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes de enseñanza media en la resolución de problemas de final abierto, los procesos de aprendizaje que generan y qué aportes realizar para promover un cambio en las prácticas de los docentes, a través de su análisis y su potencia para el aprendizaje.

Capítulo 1
REVISIÓN DE ANTECEDENTES Y FORMULACIÓN DE OBJETIVOS

Presentamos a continuación la revisión temática realizada, luego una síntesis de los trabajos analizados y finalmente los objetivos de este trabajo.

Chan y Clarke (2017) informan sobre un estudio realizado en un aula de laboratorio para registrar los puntos importantes de las interacciones sociales de los estudiantes al trabajar en forma colaborativa en la resolución de tareas de final abierto en matemática. Los autores señalan que el plan de estudios contemporáneo exige tanto de las habilidades de la resolución de problemas como de las habilidades de negociación necesarias para el trabajo colaborativo. Señalan, además, que las tareas de final abierto proporcionan condiciones para que los estudiantes desarrollen ambas habilidades. Por otro lado, agregan que estas tareas requieren que el docente renuncie a cierto nivel de control sobre la actividad de los alumnos ya que el hecho de ser de final abierto brinda a los alumnos la posibilidad de trabajar de acuerdo a sus intenciones en lugar de trabajar solo de acuerdo a las de los docentes.

Sullivan, Clarke y Clarke (2013) describen la naturaleza de las tareas de final abierto y el potencial para su uso en el aula. Reportan, a través de la experiencia con docentes en un proyecto de investigación, algunos desafíos a los que los docentes se enfrentan al usar este tipo de tareas así como las oportunidades para el aprendizaje de la matemática que se presentan en el uso de estas.

Señalan que al trabajar con tareas de final abierto los estudiantes se involucran en acciones diferentes a las utilizadas en las tareas cerradas que son las que tienen un único resultado. El hecho de tener un final abierto hace menos probable que recurran a recordar una regla o estrategia conocida para resolver la tarea y deban trabajar con el significado de los conceptos involucrados, tomar decisiones sobre los caminos a seguir y pensar de qué forma comunicar los resultados.

En otro trabajo, Sullivan et al. (2013) reportan una experiencia en la que se les presentó a los docentes tres tipos de tareas con igual contenido, una de ellas con final abierto. Los docentes realizaron las tareas y discutieron acerca de estas. Luego se les pidió que se las plantearan a sus alumnos en forma consecutiva indicando y justificando el orden en que las propondrían. Ninguno de los maestros eligió comenzar por la tarea de final abierto. El supuesto parece ser que las preguntas abiertas son más difíciles para los niños. Los autores señalan a partir de la experiencia, que muchos maestros encuentran que las tareas de final abierto son difíciles de enseñar al menos inicialmente. Los autores sostienen, a partir de los datos obtenidos, que hay una diversidad de creencias entre los estudiantes y docentes en términos de preferencias para diferentes tipos de tareas en cuanto a su contribución a la motivación, el disfrute y el aprendizaje. Indican la importancia de proporcionar una amplia variedad de tipos de tareas así como variedad en las secuencias en que estas se realizan a fin de satisfacer las necesidades del mayor número de estudiantes posible.

Zaslavsky (1995) señala que los documentos *Curriculum and evaluation standards* (NCTM, 1989) y *Professional teaching standards* (NCTM, 1991) fomentan que los profesores de matemática enseñen matemática de forma diferente a como ellos la aprendieron. En este sentido, la autora propone el trabajo con tareas denominadas de *final abierto* que, en oposición a las estándar o cerradas, son aquellas que admiten múltiples respuestas correctas. El tener múltiples respuestas correctas permite a los alumnos trabajar de acuerdo a sus posibilidades disminuyendo el temor que puede producirles el no llegar a *la* respuesta correcta. Estas tareas motivan el trabajo en equipo y animan a los alumnos a comparar sus respuestas y verificar su validez lo que promueve la comunicación matemática. Por otro lado, permiten que los estudiantes trabajen de acuerdo a su nivel obteniendo de esta manera algún éxito. Esto promueve un acercamiento a la matemática por parte del estudiante.

La autora reporta una experiencia con profesores de matemática a partir de una tarea de final abierto que facilitó poderosos procesos de aprendizaje e interacción. En las reflexiones que hace a partir de la experiencia destacamos el aumento de la conciencia, por parte de los profesores, de las diferencias individuales y el rol y legitimidad que tienen los errores en el proceso de aprendizaje así como también la fuerza del trabajo colaborativo que empoderó a cada integrante del grupo.

Tal como plantea Zaslavsky, este tipo de tareas con varias respuestas correctas parece ser una manera de manejar las diferencias individuales entre los estudiantes alentando a que cada uno proponga una respuesta adecuada a sus posibilidades.

Zaslavsky (2008) examina tareas de matemática de final abierto para nivel secundario, que requieren clasificar y/o comparar distintos objetos matemáticos. Señala que estas tareas pueden proporcionar un rico contexto para obtener distintos puntos de vista respecto a estructuras matemáticas, son de "bajo riesgo" debido a que el abordaje de las mismas puede hacerse de diferentes maneras y con mayor o menor profundidad de acuerdo a las posibilidades de cada estudiante y su análisis puede tomar diferentes direcciones de acuerdo a las decisiones tomadas por los estudiantes. Por otro lado, generan la discusión sobre varios temas. Esto ayuda a una visión menos compartimentada de la matemática.

En síntesis, los documentos revisados indican que las tareas de final abierto favorecen poderosos procesos de aprendizaje y ayudan a un acercamiento a la materia por parte de los estudiantes. En contraposición a las tareas estándar, donde la respuesta es única, permiten a los estudiantes trabajar de acuerdo a sus posibilidades respetando las diferencias individuales y utilizando caminos y estrategias no preestablecidas. Promueven el trabajo colaborativo y el debate matemático lo que favorece la comunicación matemática.

Por otro lado, las tareas de final abierto permiten a los docentes trabajar de forma diferente a la acostumbrada permitiéndoles estar más atentos a las estructuras cognitivas individuales de los estudiantes y motivando una reflexión permanente sobres sus prácticas de aula y sobre temas que habitualmente enseñan, lo que da un nuevo significado a lo que involucra el "saber".

En el presente trabajo nos proponemos trabajar con problemas abiertos y reportar la reacción de estudiantes de tres niveles distintos frente al mismo problema. La intención es comparar las estrategias que despliegan los alumnos a medida que avanzan en sus estudios.

A continuación, formulamos los objetivos de este trabajo.

Objetivo general

Desarrollar elementos que aporten a la reflexión de los docentes que trabajan en el área de matemática sobre sus prácticas de aula de forma de promover cambios en las mismas y en su visión respecto a la enseñanza de la matemática.

Objetivos específicos

1. Analizar las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes al resolver tareas de final abierto poniendo énfasis en los procesos de razonamiento.
2. Comparar las diferentes respuestas a las que arriban los estudiantes de los distintos cursos (1°, 2°, 3° año de Ciclo básico) al resolver una misma tarea de final abierto y formular posibles explicaciones.
3. Describir el efecto que tiene este tipo de tareas en el aprendizaje de la matemática.

Capítulo 2
MARCO CONCEPTUAL

En este trabajo se tuvieron en cuenta los aportes de Zaslavsky (1995, 2008) referidos al diseño de tareas de final abierto para la clase de matemática y su potencial en el aprendizaje.

Zaslavsky (1995) observa que en el diseño de situaciones de aprendizaje se plantean dos consideraciones conflictivas. Por un lado, el desarrollo del currículum de secundaria como se acostumbra, que es coincidente con la forma en que los docentes han aprendido, y que influye, en gran medida, en las concepciones que estos tienen acerca de la enseñanza.

Por otro lado, la necesidad de crear situaciones de aprendizaje nuevas, de enseñar en forma diferente a como se ha aprendido. Ante este conflicto, los docentes sienten que implementar ideas nuevas solo se puede realizar en ocasiones muy especiales o para estudiantes con altas capacidades en matemática.

La autora propone crear puentes entre estas dos consideraciones modificando tareas estándar, basadas en contenidos matemáticos familiares del currículo de secundaria, y transformándolas en tareas de final abierto; esto es, con múltiples respuestas correctas. Señala, además, que es sencilla y directa la aplicación a muchas propuestas estándar que se encuentran en los textos comunes realizando pequeñas modificaciones en su consigna; agrega que pequeños cambios pueden hacer grandes diferencias y propone tres formas para realizar estos cambios: omitir un dato, re-redactar la consigna y plantear un ejemplo.

Zaslavsky (1995) plantea que las tareas estándar que llevan a una sola respuesta correcta no promueven la discusión y se desarrollan en un ambiente de escasa comunicación matemática. Además, las tecnologías cada vez más accesibles permiten a los estudiantes obtener respuestas en forma inmediata, y como la respuesta parece ser el fin último, no se alcanza la reflexión matemática que se pretende.

En cambio, como afirma Zaslavsky (1995), en las tareas de final abierto, el uso de las tecnologías no constituye un obstáculo en el sentido anterior, sino que, por el contrario, nos permite visualizar en forma rápida las distintas respuestas; el centro del problema no es el resultado, la reflexión se enriquece, se construyen otras interrogantes que permite a los estudiantes crear conexiones hacia una amplia gama de ideas matemáticas y diferentes niveles de generalización y abstracción. También contribuye a la visualización de dificultades y errores conceptuales, la legitimidad que tienen los errores en el proceso de aprendizaje, así como otras situaciones deseables de aprendizaje.

Por otro lado, se promueve el trabajo colaborativo. La fuerza del grupo como un todo y la naturaleza del trabajo colaborativo que se da, empodera a cada integrante. Una tarea con múltiples respuestas correctas permite que los estudiantes puedan trabajar de acuerdo a sus posibilidades y que todos puedan dar al menos una respuesta correcta. Motiva a que los estudiantes comparen sus respuestas y busquen relaciones entre estas, lo que permite incluso generalizar. Al comparar las respuestas y ver que hay diferentes respuestas correctas, necesitarán justificarlas y esto hace que deban elaborar justificaciones convincentes. De esta manera, se promueve el debate y aumenta la comunicación matemática ayudando a mejorar el discurso matemático. El grupo llega a un logro que no hubiera sido alcanzado de forma individual. Zaslavsky (1995) afirma que el docente deja de ser un trasmisor de conocimientos y adquiere un rol más creativo de la situación de aprendizaje, sin interferir demasiado en direccionar los debates que se generan hacia un plan preestablecido, lo que contribuye a la riqueza y diversidad de los aportes. Plantea que la matemática es generalmente considerada como una disciplina en la que siempre hay una única respuesta correcta como solución a un problema y que las tareas de final abierto, con múltiples respuestas correctas, pueden ayudar a dar una visión más humanista de la matemática. En ellas los estudiantes trabajan, como se dijo, de acuerdo a sus posibilidades y con la estrategia que elijan.

Señala que son tareas que se pueden abordar desde muchos puntos de entrada y desde varios caminos diferentes, y además generan un grado de incertidumbre sobre cómo proceder que involucra una motivación profunda para el aprendizaje.

Capítulo 3
MÉTODO

El proyecto se basó en la implementación en grupos de 1º, 2º y 3º año de liceos públicos de Montevideo de una misma actividad, extraída de un libro de texto utilizado en ciclo básico, modificada para que sea de final abierto, es decir, con múltiples respuestas correctas. Posteriormente, se reflexionó respecto a las reacciones de los estudiantes frente a la propuesta, nuestro rol como docentes y el potencial de este tipo de tareas.

El hecho de haber elegido la misma actividad en los tres cursos radica en que se pretende observar en qué difieren los razonamientos, estrategias y dificultades de los estudiantes en los diferentes niveles.

El método consta de cuatro fases:

1. Selección de la actividad.
2. Presentación del proyecto al equipo de docentes de enseñanza media.
3. Puesta en escena de la actividad.
4. Entrevistas.

3. 1 Fases

A continuación detallaremos las cuatro fases que se desarrollaron.

Primera fase. *Selección de la actividad*. En primer lugar se realizó una revisión de los libros de texto recomendados para los cursos de 1º, 2º y 3º de enseñanza media con el objetivo de seleccionar una de las actividades propuestas que fue modificada para convertirla en una tarea de final abierto en el sentido de Zaslavsky (1995).

La tarea elegida fue la siguiente.

Actividad original (Botadá 2 – pág. 29 ejercicio 17)

Pinta de un mismo color las sumas iguales.

–7 + 5	15 + (–10)	–5 + (–7)
0 + (–12)	9 – 11	–5 + (–5)
7 – 2	–11 + 1	5 – 5

Actividad transformada

En cada uno de los casilleros del cuadro se han colocado sumas de dos sumandos. ¿Podrías completar los espacios vacíos con números enteros para que haya sumas iguales?

– 7 + ___	15 + ___	–5 + ___
0 + ___	___ – 11	___ – 5
___ – 2	___ + 1	5 – ___

La tarea se eligió por considerar que es una tarea sencilla y porque se trabaja con adición y sustracción de números enteros, tema que atraviesa los tres años del ciclo básico.

Zaslavsky (1995) propone tres formas de modificar una tarea estándar para transformarla en una tarea de final abierto: omitir un dato, re-redactar la consigna o presentar un ejemplo. En nuestro caso la tarea fue transformada utilizando la primera sugerencia, es decir, omitiendo datos.

Pensamos que la propuesta de la tarea generará al principio cierto desconcierto debido a que los estudiantes no están habituados a trabajar con tareas en las que pueden encontrar varias respuestas correctas.

Respecto a su abordaje creemos que puede hacerse, en principio, de dos maneras: buscando números enteros para que todos los casilleros den la misma suma o buscando grupos de casilleros con sumas iguales. En ambos casos puede ser que se dejen casilleros vacíos o no.

Para el primer caso, en el que pretenden llenar todos los casilleros con números de tal manera que todas las sumas sean iguales puede, a su vez, ser abordado de dos formas: pensar un número para que todas las sumas sean ese número o elegir un casillero al azar, colocar un número cualquiera, buscar el resultado y luego buscar los números de los demás casilleros para que la suma dé ese número.

En ambos casos pueden encontrar una limitación con el casillero 5 – __, ya que si por ejemplo eligen que todas las sumas den 20, no podrán encontrar un número entero para colocar en ese casillero y que sea una suma que les dé 20. Para que el resultado dé 20 habría que poner 5 – (–15) y, en este caso, si bien 5 – (–15) = 5 + 15, en el contexto que estamos trabajando no es una suma, más allá que la suma entre los números enteros 5 y 15, dé lo mismo que la resta entre 5 y –15.

Pero, a su vez, podría dar lugar a observar que al ser el número faltante negativo, si se busca que la suma sea un número positivo, las posibilidades son –1, –2, –3, –4 o –5. El 0 también se excluye ya que 5 – 0 no es una suma, para que lo fuera tendríamos que pensar en 5 + (–0) y en este caso estaríamos pensando al 0 como un entero negativo.

Los estudiantes de segundo y tercer año podrían recurrir al álgebra, utilizando ecuaciones para resolver los casos que se les dificulten.

Ahora bien, de recurrir a las ecuaciones, en el ejemplo anterior pondrían plantear 5 – x = 20, obteniendo como raíz de la ecuación, –15. Por lo tanto verían que si ponen 5 – (– 15) obtienen 20. Nuevamente, aquí estamos frente a un planteo que a priori es una resta y no una suma, nuevamente en el contexto en el cual estamos trabajando que respeta la forma en que los docentes han planteado el tema en sus clases. Sin duda, esto motivará un trabajo acerca de qué significa 5 – 7 en el conjunto de los números enteros.

Segunda fase. *Presentación del proyecto al equipo de docentes de enseñanza media.* Se seleccionaron tres liceos de Montevideo y en cada uno de ellos un grupo: primer año en el liceo 17, segundo año en el liceo 31 y tercer año en el liceo 55. Se les presentó el proyecto a los docentes a cargo de los grupos y se les planteó la forma de trabajo, los objetivos del proyecto y el marco teórico. Los tres profesores aceptaron participar de la experiencia y se acordó con cada uno el grupo con el cual trabajar y el día que sería conveniente para la aplicación de la tarea así como también el rol que cada uno asumiría dentro del aula. Se conversó acerca de los conceptos que se iban a trabajar: adición y sustracción de números enteros.

El profesor a cargo del grupo de 1er. año comentó que ha trabajado el tema aunque aún sin mucha rigurosidad pero que los alumnos manejan la operatoria con números enteros.

Se integró al equipo una educadora popular que presenció las clases registrando las diferentes actitudes del grupo así como la forma en que se relacionan los estudiantes.

Tercera fase. *Puesta en escena de la actividad.* Se propuso la tarea a los tres grupos seleccionados. Participaron en total 75 estudiantes, 25 de primero, 24 de segundo y 26 de tercero.

La propuesta fue trabajada por la responsable del proyecto y tanto el profesor del curso como los practicantes y la educadora popular observaron la clase registrando los diferentes momentos, intervenciones de los estudiantes y reacciones frente a la propuesta. Las clases fueron audio grabadas para poder reconstruirlas y analizarlas de manera más precisa.

En primer lugar se les explicó a los estudiantes la dinámica a seguir. Se les entregó a cada uno la propuesta de la actividad y una hoja en blanco para escribir, dibujar o realizar lo que creyeran necesario mientras piensan la actividad. Se hizo hincapié en que lo importante era que pensaran en la manera de resolverla. Se les pidió que no borraran nada de lo que escribían en esa hoja borrador ya que de esa manera contábamos con más insumos a la hora de analizar los resultados. En esta etapa, la docente responsable del proyecto se aseguró que todos los estudiantes hubieran podido pensar algo de forma que no llegaran a la siguiente etapa sin nada escrito para compartir con los compañeros.

Luego se les pidió que se reunieran en grupos de cuatro o cinco estudiantes cada uno. En esa etapa ellos debieron compartir lo que pensaron, contar cómo lo pensó cada uno, validar los resultados a los que llegaron, intercambiar ideas y acordar lo que consideraban importante transmitir al resto del grupo. La idea fue que comunicaran las conclusiones a las que arribaron una vez que escucharon las diferentes formas de resolver la actividad y los diferentes resultados de la misma.

Cuando el equipo consideró que dio por terminado el intercambio se les entregó una hoja en la que hicieron un afiche donde anotaron las conclusiones a las que llegaron para luego comunicarlas al grupo.

Por último, se realizó la puesta en común. En la puesta en común cada uno de los equipos pasó al frente, mostró su afiche con sus conclusiones y explicó al resto del grupo a qué conclusiones llegaron y por qué.

En esta instancia, la docente responsable del proyecto hizo preguntas de modo de promover la reflexión y discusión de diferentes puntos de interés, ya fuera por la forma de razonar o por algún error cometido. Todo el grupo debatió respecto a lo que plantearon los integrantes de cada equipo justificando sus respuestas para intentar validarlas.

Una vez que todos los equipos expusieron sus conclusiones y acordaron con los integrantes del resto del grupo aquellos puntos donde había discrepancias, se realizó el cierre de la actividad.

Vemos claramente lo planteado por Zaslavsky (1995) respecto a que al tener la tarea múltiples respuestas correctas, los estudiantes comparan dichas respuestas y verifican su validez a través del debate.

Se observó en el trabajo individual que a muchos estudiantes les costaba empezar. Llamaban al docente para decir la idea que tenían de forma que fuera el docente quien les dijera si podían seguir por ese camino. Sin duda, esto denota la escasa autonomía que sienten los estudiantes al pensar una tarea. Parecería que la búsqueda de “la” respuesta correcta de alguna manera los induce a una forma de pensamiento del tipo instrumental donde el estudiante busca cómo llegar a la respuesta mediante caminos anteriormente transitados.

Cuarta fase. *Entrevistas.* Se realizaron entrevistas a algunos alumnos seleccionados, a los docentes responsables de los grupos, a los practicantes que están realizando su práctica docente en esos grupos y a la educadora popular que concurrió a presenciar las clases. En total se efectuaron 17 entrevistas de las cuales 11 fueron a los estudiantes seleccionados. El resto se dividieron en los dos practicantes, los tres docentes a cargo de los grupos y la educadora popular. Todas las entrevistas fueron semiestructuradas.

Entrevistas a los alumnos

Una vez que se analizaron en una primera instancia las respuestas de los alumnos y los audios de las clases en las que se propusieron las actividades, se seleccionaron 11 alumnos para realizarles entrevistas individuales que también fueron audiograbadas.

Los alumnos fueron seleccionados porque en sus respuestas aparecieron diferentes aspectos que nos interesaba profundizar.

Entrevistas a los docentes y practicantes

Se realizaron entrevistas semiestructuradas a los tres docentes a cargo de los grupos, a los practicantes y a la educadora popular.

En todos los casos se realizaron las mismas preguntas y se dio lugar a la aparición de emergentes que los entrevistados desearan plantear o a que se abrieran nuevas preguntas para profundizar en la indagación. Se les preguntó, fundamentalmente, por los aportes que podían generar este tipo de tareas a las prácticas de aula, por la visión de la enseñanza de la matemática a partir de estas tareas y por el trabajo de los estudiantes con las mismas.

La pauta para la entrevista es la que se presenta a continuación.

1. ¿Conocía las tareas de final abierto propuestas por Zaslavsky?
2. En caso de conocerlas, ¿había aplicado anteriormente tareas de final abierto en el grupo?
3. ¿Qué reflexiones acerca de su práctica de aula promovió la propuesta realizada en el grupo?
4. ¿En qué cambió su visión respecto a la enseñanza de la matemática el trabajo con las tareas de final abierto?
5. ¿Qué cree que le aporta a los estudiantes el trabajo con este tipo de tareas?
6. Durante la propuesta de las actividades, ¿observó cambios en la actitud en clase o en la actitud frente a la materia de alumnos que intervienen poco o que no se interesan en general por la misma? Si es así, ¿cuáles?

Capítulo 4
ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En esta sección se analizan los resultados obtenidos al proponer una tarea de final abierto a tres grupos de primer, segundo y tercer año de Ciclo Básico de acuerdo a Zaslavsky (1995).

El análisis se organiza en dos secciones:

4. 1 Análisis de la puesta en escena y de las entrevistas a los estudiantes.

4. 2 Análisis de las entrevistas a los docentes, practicantes y a la educadora popular.

4. 1 Análisis de la puesta en escena y de las entrevistas a los estudiantes

Se trabajó con tres grupos de Ciclo Básico. Un primer año en el liceo 17 al cual concurre un practicante. Un segundo año en el liceo 31 donde también concurre un practicante y un tercer año en el liceo 55. En este último grupo no hubo practicantes.

En la actividad participó un total de 75 alumnos. De estos, 25 fueron de primer año, 24 de segundo y 26 de tercero.

En todos los grupos hubo buena recepción a que la clase fuera dada por otra docente.

4. 1. 1 Análisis de la puesta en escena en primer año

El grupo es muy trabajador. Acostumbrado al trabajo en equipos y con excelente disposición para el trabajo. Muy entusiastas.

Cuando se les entrega la consigna, se les pide que la lean y se les pregunta qué tienen que hacer. Al principio algunos pensaron que tenían que buscar números para que todas las sumas dieran lo mismo. Luego, a partir de las intervenciones de algunos estudiantes y de la profesora a cargo, vieron que se pedía simplemente buscar números para que hubiera sumas iguales y que alcanzaba con que dos casilleros fueran completados con números para que dieran sumas iguales para cumplir con la consigna. De todas maneras muchos de ellos intentaron buscar que todas las sumas fueran iguales.

El hecho de que hubiera varias respuestas correctas les llamó la atención en casi todos los equipos que trabajaron lo que se puede ver en sus conclusiones finales, ya que varios lo expresaron.

A continuación presentamos las conclusiones que escribieron los diferentes equipos y que fueron compartidas con el grupo.

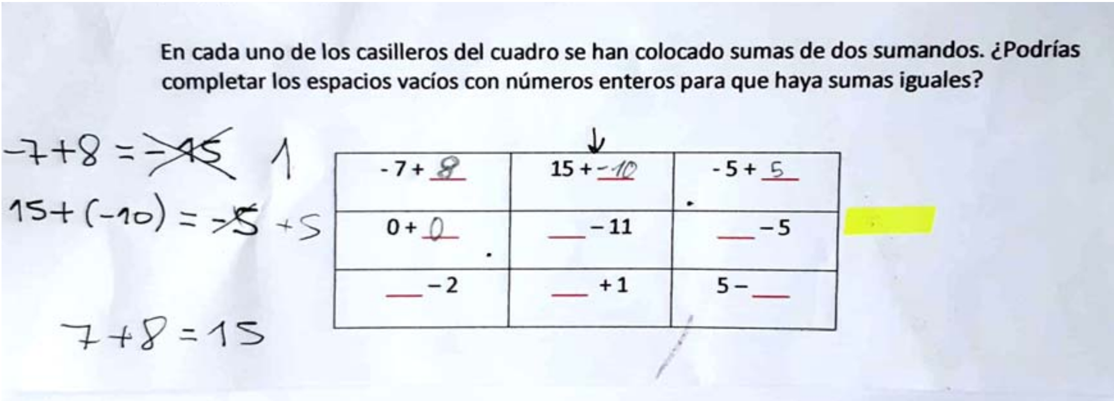
Equipo 1

“Nunca se especifica que todas las sumas deben dar el mismo resultado, pero sí se dice que deben haber sumas iguales, así que deben haber mínimo dos cuentas con el mismo resultado.”

En este equipo se hace énfasis en que alcanza con que “dos cuentas” tengan el mismo resultado. Sin embargo, en el trabajo individual, tres de los integrantes pusieron números para que todas las sumas fueran 0. Otro de ellos intentó que todas dieran 1 y el otro trabajó solo en cuatro casilleros. En definitiva parecería que lo que escribieron para compartir con el grupo fuera una afirmación que ellos mismos necesitaron para convencerse que realmente estaría bien si encontraban solo dos sumas iguales, pero a la hora de hacerlo la mayoría decidió que todas las sumas dieran lo mismo. Esto nos lleva a pensar que la práctica habitual de realizar tareas en las que el resultado es único está tan arraigada que de alguna manera necesitan obtener ese único resultado. En este sentido, prefieren que todos los casilleros tengan la misma suma ya que de esta manera, más allá de que la suma elegida sea diferente para los distintos individuos, se asemeja, en cierta forma, a un resultado único. Rechazan, de algún modo, el hecho de buscar sumas diferentes para casilleros de una misma propuesta. Parecería que realizarlo de esta manera les da más seguridad.

El caso de Nicolás fue diferente. Él es un estudiante con adecuación curricular. Tiene dificultad en el reconocimiento del significado, comprensión lexical descendida y poco vocabulario específico.

A continuación presentamos su trabajo:



Se transcribe parte de la entrevista que se mantuvo con él:

Profesora-investigadora (P): ¿Recuerdas cómo pensaste la actividad cuando estabas solo?

Nicolás (N): Miré el 15, ¿no? y hice – 7 + 8 te da 15 pero negativo. Y ahí hice –15 + (–10) que me da –5 y eso

P: ¿Cuál fue el primer casillero que rellenaste?

N: El –7 + __

P: ¿Y por qué pusiste el 8? ¿Porque se te antojó?

N: No, no, porque primero miré el 15 y miré esta cuenta, pensé en la cuenta

P: A ver si entiendo, vos miraste el 15 del casillero de al lado ¿y pensaste qué número poner acá (*nos referimos al espacio vacío en –7* + __) para que sumado con –7 te dé 15?

N: Claro.

P: ¿Y después? ¿Por dónde seguiste?

N: Acá miré el –5 y dije ta y dije 15 + –10 y le quité al 15 le quité 10. Si son de distinto signo te da negativo, entonces te dio –5

P: A ver, vos hiciste 15 + (–10) y te dio 5 ¿y ese 5 es con el que rellenaste el casillero de al lado?

N: Sí… si eran de distinto signo tenía que poner menos 5 en vez de acá el más.

P:¿Si son de distinto signo tenés que poner menos?

N: El profe dijo que si eran de distinto signo tenía que poner menos.

P: Pero eso ¿es en la suma o en la multiplicación?

N: No me acuerdo.

El estudiante lee los casilleros por filas empezando en el primero. Interpreta que el 15 del segundo casillero es el resultado de –7 + __ y por eso pone 8, ya que según él –7 + 8 da 15. Luego mira el tercer casillero, cuyo primer sumando es –5 y para él es el resultado de 15 + __ y pone –10 ya que para él, 15 + (–10) da –5. Y luego mira el cero del primer casillero de la segunda fila y eso le da para colocar el 5 en –5 + __ ya que –5 + 5 le da 0.

Luego no puede seguir porque le faltan los primeros sumandos en los casilleros y esto lo confundió porque no pudo continuar con su razonamiento.

P: Los otros ¿por qué no los hiciste?
N: No, porque me confundí y no sabía cómo hacerlo, entonces cuando no hay un número al principio no puedo hacer la cuenta.
P: En estos cuatro les falta el primer número ¿y a vos te confundió? ¿Te trancaste porque le faltaba el primer sumando?
N: Sí, porque no sabía cómo hacerlo.

Por lo que hizo podemos pensar que el estudiante no entendió la consigna; pero también podemos pensar que esas "sumas iguales" de las que habla la consigna, él las interpretó como las igualdades que planteó por fila. Es decir, –7 + __ para él tenía que ser igual a 15, primer sumando del segundo casillero de la fila; 15 + __ tenía que ser igual a –5, primero sumando del tercer casillero de la fila.

Pensamos que esto está asociado a ciertas cadenas de "igualdades" que los estudiantes suelen escribir, es decir, en su caso esto sería como poner:

–7 + **22** = 15 + (**–20**) = –5 + **5** = 0

Es posible que sea esa la cadena de razonamiento que se planteó. En ningún momento durante la entrevista surge el planteo de que lo que hizo no es lo pedido.

P: ¿Lograste encontrar sumas iguales? ¿Casilleros que tuvieran el mismo resultado?

N: ¿Cómo, cómo, cómo?

P: ¿Qué dice acá? (se lee la consigna), ¿lo lograste?

N: Sí.

P ¿Cuáles?

N: Los que dan cero.

P: ¿Qué te pareció la actividad?

N: Me pareció bien porque es una forma de pensar y eso, y si sacás un número no es que vayas a sacar todos los números.

P: ¿Pensás que lo hiciste bien o mal?

N: Más o menos, ahí.

P: ¿Encontraste sumas iguales?

N: Sí.

P: Entonces ¿lo hiciste bien?

N: Sí.

Es interesante el trabajo de este alumno ya que a pesar de sus dificultades él sintió que podía responder y trabajar con la tarea. En definitiva, a través de su razonamiento y lo que interpretó de la consigna, él logra encontrar sumas iguales de acuerdo a su criterio.

El estudiante expresa*: "*Me pareció bien porque es una forma de pensar y eso, y si sacás un número no es que vayas a sacar todos los números".

Parecería estar contento porque logró, de alguna manera, pensar y colocar números que, según el criterio que utilizó y más allá de los errores al aplicar las reglas de la suma de enteros, daban el resultado que él quería. Aparentemente, el tipo de tarea propuesta le dio seguridad en sí mismo y, por lo que expresa, se sintió capaz de poder resolver la tarea y de hacerla bien sin la presión de que tenía que hacer todo (… *si sacás un número no es que vayas a sacar todos los números…)*. Tal como lo plantea Zaslavsky (1995), este tipo de tareas lleva a que cada estudiante trabaje de acuerdo a sus posibilidades. Nicolás logró completar algunos casilleros de acuerdo a su interpretación que, más allá de los errores cometidos al realizar las sumas, tenía sentido. En un estudiante como Nicolás, con las particularidades que tiene, sin duda el solo hecho de haber podido completar algún casillero con su criterio lo dejó contento y lo motivó a intervenir y plantear sus resultados.

Respecto a cómo se sintió con la actividad expresó: "*Me encanta el modo de trabajar con Ana. Además es una manera diferente de trabajar en la clase. Me sentí bien. Porque se puede trabajar o aprender de cualquier manera.*"

Pensamos que el estudiante sintió que podía trabajar con libertad. Esto, más allá de no haber comprendido en un principio la consigna, lo hizo sentirse bien y sentir que aprendía. De hecho esto sucedió ya que a partir de los errores cometidos se pudo trabajar nuevamente en las reglas para la suma de enteros, algo que sin dudas no tenía muy claro y de esta manera reforzar este concepto.

Equipo 2

"En nuestro grupo tuvimos diferentes ideas. Por ejemplo: Uno quería llegar al resultado por filas. Otro con el mismo resultado en todos los casilleros. Y otro con casilleros desordenados."

La estudiante E_1 hace que cuatro casilleros le den –10 y los otros cinco, 1.

Otra estudiante del equipo decidió que buscaría que las sumas iguales tuvieran un mismo resultado por columna. En la entrevista con la alumna ella comenta que usó diferentes estrategias. Para la segunda columna, primero pensó en que quería que todas las sumas le dieran 4 y de esa manera completó los espacios vacíos. Pero en la tercera columna hizo diferente ya que según dice "*como no vi que me daba muy bien traté de buscar otra solución".* Lo primero que hizo fue poner 15 en el primer casillero y obtuvo –10 y luego completó el resto para que le diera –10.

Aparentemente, la estudiante quiso seguir la misma estrategia que en la columna anterior y pensó el número que quería que fuera la suma de los casilleros de la columna, pero al querer completar los espacios vacíos para que la suma le diera ese número no supo hacerlo y es por eso que cambió la estrategia y decidió poner en el primer casillero de la tercer columna el número 15 y hallar la suma y luego completar los siguientes casilleros para que le diera esa suma que encontró.

La primera columna la dejó sin completar porque no le dio el tiempo y esto la llevó a pensar que no había cumplido con la consigna. Si bien la consigna se cumplió debido a que encontró sumas que le dieron igual, parecería que el hecho de dejar sin completar algunos de los espacios vacíos es lo que la lleva a pensar que no cumplió con lo que se pedía. Es como si para que esté bien, debe estar todo completo y correctamente.

En la entrevista manifiesta que le pareció divertido, que jugando se aprende.

E_2, eligió el 6, que fue el primer número que se le vino a la cabeza y trató de que todos le dieran 6. Pero en el último casillero, donde dice 5 – __, puso –11 y como resultado, –6. Esto no la preocupó porque todos los demás casilleros tenían sumas que daban 6 y la consigna se había cumplido. De todas maneras vemos que tiene, como en casos anteriores, la necesidad de completar todos los casilleros para sentir que cumplió con la consigna a pesar de que coloca un número en el último que no da lugar a una suma que sea igual a la de algún otro casillero.

La imposibilidad de poner en el caso 5 – __ un número para que esa suma diera 6, se trabajó luego con todo el grupo. En la entrevista expresó que le gustó mucho el trabajo.

E_3 eligió el 1 como resultado de las sumas. Sin embargo hay algunos que dan 1 y otros –1. De la entrevista se deduce que lo que él quería es que todos los resultados tuvieran como valor absoluto el 1, así que le daba lo mismo si daba 1 o –1.

En la entrevista, E_3 expresa “*Ana me ayudó a aprender a separar términos; yo quería que venga todos los martes y viernes.”* Si bien la separación de términos es un tema ya trabajado en clase, posiblemente el estudiante no estuviera muy seguro al respecto. La tarea permitió, tal como lo plantea Zaslavsky (1995), hacer conexiones diferentes entre estos conceptos y por lo tanto habilitó a que este tema se trabajara con él y a su vez que él sintiera haberlo aprendido. Posiblemente el trabajo con tareas de final abierto permitió a que el estudiante se sintiera más libre de pensar y, en consecuencia, a aprender. También queda de manifiesto en lo que expresa el alumno, su interés por aprender matemática.

E_4 planteó que quería que le den todas 5. Pero en realidad completó seis de los nueve casilleros donde dos de ellos le dio –5, tres de ellos 5 y uno de ellos con error ya que puso – 5 + –10, pensando que esto daría 5. Siente que no cumplió con la consigna porque no le dieron todos 5 como ella quería y porque dejó casilleros sin completar.

Nuevamente, vemos el hecho de que si todos los resultados no eran el mismo y no estaba todo completo, el estudiante piensa que está mal lo que hizo.

Equipo 3

"Sumando 2 números naturales los sumandos van a ser limitados. Mas no entre sumandos enteros que ahí pueden ser inilimitados, ejemplo:
(naturales)
3 + 2 = 5
2 + 2 + 1 = 5
4 + 1 = 5
1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5
(enteros)
–1 + 6 = 5
–2 + 7 = 5
–30 + 35 = 5
–95 + 100 = 5
Etc …
(hay infinitos sumandos)"

En la puesta en común los alumnos explican que primero pensaron en cómo formar el número 5 con sumas usando solo sumandos naturales. Y por eso dicen que con números naturales las sumas son limitadas. Plantean las distintas formas de formar el número 5 pero no tienen en cuenta el 0. Luego plantean que si quisieran formar el número 5 como suma de enteros, usando enteros positivos y negativos, entonces podrían hacerlo de infinitas maneras. Esta idea surge a partir del trabajo de uno de los estudiantes del equipo que pensó esto y lo propuso. Los otros integrantes habían completado los casilleros para que les diera un mismo número en todas las sumas o directamente no habían encontrado ninguna suma. Aparentemente, esta idea les pareció novedosa y fue por eso que decidieron plantearla como conclusión.

A partir de las observaciones que fueron surgiendo y del intercambio de ideas que se establece, el grupo llega a la conclusión de que si querían que todas las sumas fueran números positivos, solo podían usar naturales menores que 5 por el caso 5 – __; en cambio si las sumas son negativas no estaría acotado para este caso.

Vemos que a partir del trabajo en conjunto y el debate que se suscitó, los estudiantes pudieron detectar errores cometidos y a partir del trabajo con estos errores, llegar a conclusiones que no habían tenido en cuenta previamente.

Equipo 4

"Es más difícil llegar a que todas las operaciones tengan el mismo resultado a que todas sean de distintos resultados.
Todos llegamos a la conclusión de llegar al mismo resultado en todas las operaciones, pero con distintos números."

En este equipo todos los estudiantes pensaron números para que las sumas les dieran todas iguales. En general, eligieron a priori el número que querían que les dieran todas las sumas.

María buscó números para que las sumas le dieran 16 pero se equivoca en –7 + __ ya que pone –7 + **9**, en –5 + __ ya que pone –5 + **11** y en 5 – __ que pone 5 – **21**.

En la puesta en común se da cuenta de sus errores. Al trabajar con el último caso en el que puso 5 – **21**, se establece el siguiente diálogo:

P: Si quiero que me dé 16, ¿qué hacemos?
M: No hay chance.
P: ¿Por qué?
M: Porque el resultado es mayor que el 5, no hay chance.

Se dan cuenta que el segundo sumando debe ser negativo para que sea una suma, es decir que el signo que aparece es el del segundo sumando y que por lo tanto el valor absoluto no puede ser mayor que 5.

Equipo 5

"Lo que pensamos nosotros fue, si cambian un número de la suma se altera el resultado y lo que hicimos fue que la suma, dé el mismo resultado."

En este equipo cuatro de los integrantes buscaron que todas las sumas fueran iguales.

Aclaran que *"si cambiás de lugar el número, cambia el resultado"*.

Se refieren a intercambiar los valores absolutos. Ponen como ejemplo que poner –7 + 10 es diferente de –10 + 7.

Esta situación dio lugar al trabajo con la propiedad conmutativa en la adición de enteros debido a que cuando hablaron de *cambiar el número*, un estudiante nombró dicha propiedad y la mayoría de los estudiantes acordó que era esa propiedad. Parecería que el hecho de hablar de "cambiar de lugar" ya los induce a pensar en la propiedad conmutativa. Esto nos invita a pensar que los estudiantes aprenden de forma meramente instrumental en el sentido de Skemp (1976) y que posiblemente muchas veces al hablar de una propiedad, como en este caso la conmutativa, no hayan entendido realmente a lo que refiere, e interpretan por lo que "les suena" del enunciado de la propiedad.

El trabajo con esta actividad dio lugar a que surgiera este tema y pudiera trabajarse.

4. 1. 2 Análisis de la puesta en escena en segundo año

El grupo es muy inquieto y difícil de motivar. Los estudiantes pueden trabajar bien cuando se les presentan tareas cortas o actividades orales, pero suelen dispersarse con facilidad.

Hubo buena recepción a que la clase fuera dictada por otro docente. Se les entrega la consigna. La leen. Se les pregunta qué entienden. Primero dijeron que todas las sumas sean iguales, luego a partir de la intervención de algunos estudiantes, vieron que no tenían por qué ser todas iguales.

Cuando trabajan en forma individual les cuesta pensar en forma autónoma, poner, por ejemplo, un número cualquiera y empezar a probar. Parecería que necesitan que sea el docente el que dé la pauta del comienzo o que les avale que pueden probar poniendo cualquier número en cualquier casillero. Acá podemos ver claramente la diferencia entre las tareas que tienen un único resultado correcto y las tareas de final abierto propuestas por Zaslavsky (1995), con varios resultados correctos. Los estudiantes, al estar acostumbrados a las primeras, pierden la libertad de pensar. Parecería que están condicionados para la búsqueda de ese resultado al que tienen que llegar y quizá sea por eso que prefieran un aprendizaje más instrumental que les permita llegar a dicho resultado. Las tareas de final abierto, por el contrario, permiten pensar con otra libertad lo que sin duda ayuda en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

En general, la mayoría, al trabajar en forma individual, lograron al menos un par de sumas que dieran lo mismo. Pero lo interesante se dio cuando trabajaron en equipos. Si bien vieron que todos los integrantes habían logrado sumas iguales y diferentes a las de los demás, a la hora de decidir qué compartir con el resto de la clase, decidieron elegir el caso en que todas las sumas dieran el mismo resultado.

Uno de los equipos planteó que si bien todos lo habían hecho bien y diferente, luego se corrigieron entre todos e hicieron que todos los resultados dieran cero. Es interesante observar que ellos dijeron que "se corrigieron" como si lo que habían hecho estuviera mal.

Vemos que nuevamente los estudiantes prefieren que todos los resultados sean iguales.

Algunos confunden el hecho de que al decir por ejemplo, __ – 2, sea una suma. Creen que es una resta.

A continuación presentamos las conclusiones a las que llegó cada equipo.

Equipo 1

"Conclusión:

Buscamos ciertos números para que dé el mismo resultado en todas o algunas cuentas entre sí.

Ej: 15 + 15 = 30

29 + 1 = 30

41 – 11 = 30

El resultado de las demás cuentas da 30."

Este equipo eligió que todas las sumas dieran 30. Al pasar al pizarrón a compartir sus resultados con los compañeros se dieron cuenta que había un error en el 5 – __. Esto suscitó un debate entre todos los estudiantes del grupo.

Un alumno planteó que se podía poner 5 – (–25) para llegar a 30. A partir de esta intervención se suscitó un debate acerca de si estaba bien o mal y si cumplía con la consigna o no. Finalmente llegan a que el "–" que allí aparece corresponde al signo del segundo sumando y por lo tanto no podían encontrar un entero negativo que sumado con 5 dé 30. De todas maneras, una vez que se llegó a esta conclusión un estudiante planteó que podría ponerse así: $5 + (-5)^2$ y que la suma diera 30, usando un entero negativo. A partir de esto hubo un nuevo debate en la clase hasta que arribaron que poner $(-5)^2$ equivalía a poner directamente 25 y que no sería un número negativo.

En este tipo de intercambio que se estableció en varios momentos de la puesta en común, podemos ver claramente lo que señala Zaslavsky (1995) respecto a que las tareas de final abierto alientan a comparar respuestas, verificar su validez y buscar posibles relaciones entre ellas.

Equipo 2

"Conclusión: todos lo hicimos bien y diferente
Nos corregimos entre todos
Luego hicimos que todas las cuentas valieran 0
Ej:
–7 + 7   15 + –15"

En la puesta en común los estudiantes plantearon que si bien todos lo habían hecho bien, aunque diferente, a la hora de mostrar el resultado de lo que realizaron optaron por dar la respuesta en la que todas las sumas daban lo mismo.

Nuevamente aparece el "corregirse" como si el hecho de que todas las sumas den lo mismo fuera lo que está bien.

Se les preguntó si para obtener sumas iguales en todos los casilleros el único resultado posible sería 0.

A partir de esto un alumno dijo que para que todas dieran un número positivo, en la última 5 – __ el valor absoluto del número debía ser menor a 5. Y en ese caso podrían buscarse sumas todas iguales que no fueran 0.

Equipo 3

“Todos razonamos diferente y las cuentas nos dieron diferentes.”

En la puesta en común comentaron los diferentes razonamientos. Algunos pusieron un número cualquiera en cualquier casillero y buscaron otro que les diera lo mismo. En estos casos a veces, encontraban fácilmente otro que también diera igual. En otros casos pensaron el resultado al que querían arribar y colocaron el número correspondiente en el espacio en blanco. Otros se enfrentaron, en cualquiera de los casos anteriores, a que tanto el número que habían puesto o la suma que querían que les diera les complicaba los cálculos y cambiaron sobre la marcha.

Equipo 4

“Llegamos a la conclusión de que todas las cuentas dan el mismo resultado.”

En este caso vemos la necesidad que tuvo el grupo en plantear que “todas las cuentas den el mismo resultado”. Consideramos que el énfasis en la importancia de que a todos les dé lo mismo llevó a los estudiantes a incluir esta idea como conclusión.

Equipo 5

“Concluimos que todos los resultados fueron diferentes. A los números negativos le sumábamos positivos. Tratamos de que todos los resultados fueran iguales. No hicimos muchos razonamientos.”

Si bien los estudiantes ven que todos los resultados obtenidos en forma individual son diferentes, tratan, a la hora de dar un resultado, que todos fueran iguales, hecho que la mayoría de los equipos realizó.

Cuando hablan de que no hicieron muchos razonamientos se refieren al tipo de problemas de letra, es ahí donde creen que hay “razonamientos”, el hecho de que en esta tarea tengan que poner simplemente números y que juega el azar, los hace pensar que no hay razonamientos en el proceso.

Equipo 6

“Todas las cuentas pueden dar 0. Lo que hicimos fue buscar distintas formas de hacer las cuentas. A todos nos da diferente.”

En este equipo, si bien vieron que podían colocar números para que todas las sumas dieran 0, optaron por dejar los diferentes resultados a los que había llegado cada uno.

Los razonamientos para llegar a estos resultados fueron los mismos que se han visto en el resto; unos pensaron que querían que les diera la suma y luego buscaron los números, otros colocaron números, vieron lo que les daba la suma y luego buscaron los otros números.

En general, la mayoría de los equipos vio que en forma individual obtuvieron diferentes resultados; sin embargo, a la hora de plantear conclusiones optaron por cambiar y pusieron que todas las sumas den lo mismo.

4. 1. 3 Análisis de la puesta en escena en tercer año

El grupo es muy trabajador y participativo. Acostumbrado al trabajo en equipos y con excelente disposición frente a las propuestas. Muy entusiastas, receptivos a las actividades y colaboradores con el docente.

Al presentarles la tarea la primera reacción fue "*qué fácil*".

Luego comenzaron a dudar qué poner porque había muchas formas. Cuando se lee la consigna y se pregunta qué entienden, lo primero que dicen es "*que todas tienen que tener el mismo valor*".

Se pregunta si eso está bien y dicen que sí. Se les pregunta si es la única posibilidad, dicen que no. Entonces se les pregunta qué más entienden para que haya sumas iguales. Contestan "*que tres den 9 y las otras seis den 2*".

Un alumno dice "*no vamos a llegar a un resultado verdadero*" al darse cuenta que hay muchos. Se infiere que el alumno solo valida las respuestas únicas. Para él lo válido, lo *verdadero*, es que haya un resultado único.

Nuevamente el 5 – __ trae conflictos. Presentan dificultades para identificar las sumas cuando hay signos negativos "en el medio".

En primer lugar porque lo que buscan es que todas las sumas den lo mismo y entonces si eligen por ejemplo que todas den 30, al llegar a este punto lo solucionan poniendo 5 – (–25), y no reparan en que esto es una resta.

A continuación presentamos las conclusiones a las que llegó cada equipo.

Equipo 1

"CONCLUSIÓN:
Hay infinitas sumas de dos sumandos que dan el mismo resultado.
Cuando tenemos un sumando y el resultado, solo existe un número que puede ser el otro sumando."

Al preguntárseles qué quisieron decir con las conclusiones, explican que si no estuvieran los números que aparecen en los casilleros y si tuvieran que hacer sumas de dos sumandos que den un número especial, hay infinitas, por ejemplo, –1 – 4 = –5; 5 – 10 = –5; etc. Pero que en este caso al tener por ejemplo 15 + __ si quieren que les dé 20, la única posibilidad es poner 5.

Equipo 2

"Llegamos a la conclusión de que se puede hacer de distintas formas y también al poder agregar signos y paréntesis es más fácil lograr que todos los resultados sean iguales."

Buscan que todos les dieran el mismo resultado. Hubo quienes eligieron que todas las sumas les dieran 2.

Una de las estudiantes empezó poniendo un número en el primero para que la suma le diera dos en –7 + __. Allí puso 9, para que le diera 2. Y a partir de ahí siguió con todas para que le diera 2.

Dice otro estudiante: "*Yo tengo un 15 y tengo un signo de + no puedo que me dé*". Discuten porque dicen que como no dice nada, pueden poner paréntesis.

Un tercer estudiante dice que en el último caso, 5 – __, el signo de "–" se lo ponen al número porque si no, no es suma y plantea que en el caso 5 – 3 es lo mismo que (+5) + (–3).

Equipo 3

"Existen varias maneras, estas dependen de la persona.
En estos casos se deben de emplear restas y sumas, dependiendo del caso y el resultado deseado."

Esas varias maneras explican que es porque unos buscan como resultado el 2, otros el 0, depende de la persona.

Dice un estudiante: “*en __ – 2, si pones un 4, 4 – 2 es una resta*”.

Otro estudiante dividió en los que el primer sumando es un negativo y en los que el primer sumando fuera positivo. Expresa: “*Yo hice una forma distinta a los demás, lo hice dependiendo del comienzo y del final de la operación. Hay comienzos que empiezan con enteros negativos y otros con enteros positivos*”. Comenta: “*Por ejemplo las que empezaban con un entero negativo enfrente, hice que su resultado global valiera 1*0. *En –7 + __ puse un 17 para que me diera 10 y la otra –5 + __ puse un 15 para que me diera 10. Y en los que empezaban con positivo, hice que me dieran 30, 15 + __, puse 15.”*

Se le pregunta si esto lo hizo por algo en especial pero dice que no.

Equipo 4

“La suma de opuestos da 0.”

Un estudiante plantea que ellos lo que hicieron en todas las sumas fue sumarle el opuesto para que todas les dieran cero.

Pregunto si todos lo hicieron así. Dicen que no.

Luego el mismo estudiante plantea que él hizo que todas las sumas le den 1.

Lo que sucedió fue que cuando se reunieron en el equipo vieron que si sumaban en todos los casos el opuesto les daría cero y decidieron que esto era lo más importante a la hora de compartir.

Equipo 5

“Notamos que se pueden obtener números distintos y a la vez números iguales. Podemos obtener los mismos razonamientos, diferente resultado.”

Dos de ellos hicieron que todas les dieran el mismo resultado y dos lo hicieron por parejas.

Uno de los integrantes del equipo plantea que él hizo que todas las sumas dieran 43. Cuando se le pregunta cómo hizo en el caso 5 – __, contesta que puso 5 – (–38) y otro compañero del equipo le hace ver que lo que él puso es una resta.

Nuevamente podemos observar que, tal como señala Zaslavsky (1995), las tareas de final abierto permiten que aparezcan concepciones erróneas y promueven el trabajo en equipos, el debate y la contraposición de ideas y argumentos.

Equipo 6

"Conclusiones:
Los resultados son infinitos.
Si sumás o restás dos números los cuales posean distintos símbolos (positivo o negativo) la operación se invertirá.
3 + (–2) = 3 – 2
3 – (–2) = 3 + 2
Utilizando esta misma tabla que usted nos dio nosotros podemos colocar cualquier número ya sea para igualar dos cuentas distintas a un número o todas a otro número y ese número puede ser cualquier número, infinito, positivo o negativo, pero cualquier número. Siempre y cuando que haya pares o de a tres o de a cuatro que sean iguales."

Vemos, otra vez, que al principio todos creen que tienen que ser todas las sumas iguales. Este fue uno de los grupos que tenía más claro el planteo de la resta.

4. 1. 4 Análisis de las entrevistas a los estudiantes

Lo primero que nos llama la atención y que nos parece importante destacar es que a pesar de la diferencia de grado, lo que sucedió en los tres grupos fue similar, no se notaron diferencias ni en las estrategias utilizadas ni en las dificultades que se presentaron. Si bien en tercer año hubo grupos que tenían claro el planteo de cuándo están frente a una suma y cuándo frente a una resta con números enteros, en los tres grupos apareció la misma dificultad de reconocer que en todos los casilleros había sumas. Esto nos lleva a pensar que los estudiantes estudian para recordar los diferentes temas con un objetivo inmediato, que podría ser, que les vaya bien en las pruebas para aprobar el año; pero una vez pasada esta etapa, viene el olvido ya que los conceptos no fueron realmente aprendidos. Es posible que esto se deba a la forma en que estos conceptos han sido trabajados en clase, posiblemente desde un enfoque instrumental.

Creemos que este tipo de tareas, tal como lo plantea Zaslavsky (1995), promueve la reflexión y el debate entre los estudiantes, ayudando a que el aprendizaje se realice de otra manera.

En todos los grupos y a pesar de sus diferencias de niveles, el trabajo se desarrolló, en general, con gran motivación por parte de los alumnos y se dio lo que Zaslavsky (1995) señala como uno de los atributos de las tareas de final abierto: los estudiantes discutieron, plantearon hipótesis y justificaron sus conclusiones; esto es, se favoreció la conversación matemática en el aula. Sin embargo, se pudo apreciar que el grupo que trabajó mejor y llegó a mejores conclusiones, fue el de primer año. La tarea era sencilla, con un tema que atraviesa los tres años y, sin embargo, no se apreciaron diferencias en las estrategias, en los razonamientos ni en las dificultades. En este punto podríamos plantearnos ¿cuál es el motivo por el que esto ocurre?; esto abriría una nueva línea de estudio. En principio, podríamos pensar que como la adición y la sustracción en Z es un tema que se comienza a estudiar en primer año, es en este curso que lo tienen más presente. Pero sabemos que estos temas se trabajan en forma permanente a lo largo de todos los años y, por lo tanto, los estudiantes de segundo y tercer año deberían tener un mayor dominio.

Pudimos apreciar también que no fueron desplegadas estrategias algebraicas ni en segundo ni en tercer año, lo que también advierte que el álgebra no constituye para los alumnos una herramienta de trabajo.

Observamos que todos los estudiantes, tanto los de primer año como los de segundo y tercero entendieron, al comienzo de la actividad, que alcanzaba con encontrar un par de sumas que dieran lo mismo para que la tarea estuviera bien resuelta; sin embargo, los estudiantes tienden a buscar que todas las sumas les den el mismo resultado y que todos los casilleros hayan sido completados. Parecería que les da mayor seguridad para hacerlo bien. Esto nos lleva a pensar que si bien entienden que alcanza con encontrar algunos números para que algunos casilleros den la misma suma, el buscar que todos los casilleros den el mismo resultado sería como una forma de encontrar un único resultado. Posiblemente esto esté ligado a que están acostumbrados a trabajar con tareas en las que el resultado correcto es único.

También se observó otro de los atributos que Zaslavsky (1995) señala de este tipo de tareas. La tarea de final abierto promovió la comunicación matemática entre los estudiantes a partir del intercambio de ideas y el arribo a conclusiones.

En todos los grupos surgió la dificultad con el caso de 5 – __. Prácticamente no hubo diferencia entre los estudiantes de primer, segundo y tercer año. En los tres grupos costó ver que al trabajar con enteros y plantear que era una suma, el signo "–" debía ser el signo del segundo sumando. Por lo tanto en este caso se cometieron varios errores, principalmente cuando quisieron que la suma les diera un entero positivo mayor que 5. Por ejemplo, algunos equipos eligieron que todas las sumas dieran 30. Esto dio lugar a discusión ya que en el caso 5 – __, no hay un número entero negativo que sumado a 5 dé 30. Plantearon poner 5 – **(–25)**, que si bien da 30, no cumple con la consigna de ser una suma. Se trabajó sobre esto en todos los grupos. Finalmente vieron que al ser el "–" el signo del segundo sumando, no podían encontrar un entero negativo que sumado a 5 dé 30 y esto dio lugar a que llegaran a la conclusión de que para que en ese casillero la suma fuera un número positivo solo podían colocar números cuyo valor absoluto fuera menor que 5.

Cabe destacar que la docente en esta instancia ofició meramente de guía con preguntas para que fueran los propios estudiantes quienes validaban o rechazaban las conclusiones a las que arribaban.

Ningún estudiante de segundo y tercer año utilizó el álgebra para trabajar a pesar de que varias veces se les dificultaba encontrar el número que querían. Por ejemplo en el caso 15 + __ si querían que les diera 11, probaban y hacían la suma mentalmente o con calculadora y equivocaban el resultado, pero ninguno planteó una ecuación para resolver.

La actividad propuesta promovió la autonomía de pensamiento de varios estudiantes y suscitó que cada uno trabajara de acuerdo a sus posibilidades. Esto se vio reflejado en varios estudiantes. Destacamos el caso de Nicolás (de primer año) que trabajó con muchísimo entusiasmo y motivación. En la puesta en común y luego de haber entendido la consigna seguía levantando la mano para dar otras respuestas.

Se observó, además, cómo el trabajo con este tipo de actividades ayudó a estudiantes en su relacionamiento con sus compañeros. Se observaron dos casos. Una estudiante que en general oficia como líder negativa en el grupo y su rol fue totalmente lo contrario; se interesó por la tarea y se preocupó de que su equipo trabajara. Otra estudiante que generalmente no interviene por timidez e inseguridad fue la que, a la hora de compartir los resultados a los que llegó su equipo, llevó la voz cantante. Posiblemente, la modalidad de trabajo unida a un trabajo en el que el equipo tuvo un rol importante, le haya dado más confianza en sí misma.

El trabajo con la tarea propuesta dio lugar a repensar varios temas que ya habían sido trabajados en el año y de esa manera reafirmar conocimientos.

Los temas que surgieron y con los que se trabajó en la puesta en común fueron:

- sumas y restas de enteros,
- multiplicación de enteros y las reglas de los signos,
- diferencia entre las reglas de la suma y las de la multiplicación,
- trabajo con el 0 y su propiedad de neutro en la adición en Z,
- algunas propiedades de las operaciones en Z,
- separación de términos,
- prioridad operatoria.

Sin duda que el trabajo con tareas de final abierto, además de favorecer la autonomía de los estudiantes, habilita a que los estudiantes puedan trabajar de acuerdo a sus posibilidades y que promuevan el debate, entre otras cosas, constituyen una buena herramienta para la labor docente porque permite el trabajo de diferentes conceptos a partir de una misma tarea. En general, el docente tiende a dar los temas compartimentados; se da un tema, se trabaja sobre el mismo, se evalúa. Es posible que esta forma de trabajo promueva que el estudiante sienta que determinados temas y formas de pensar son exclusivamente de la asignatura matemática. Sin embargo, cuando se trabaja con tareas de final abierto, como la que se propuso, no solo varios de los temas trabajados en el año aparecen en una misma actividad, sino que surgen otros. Esto permite que el estudiante obtenga una visión más completa y unificada de los temas que se aprenden. Tal como lo señala Zaslavsky (1995), estas tareas permiten hacer conexiones entre diferentes conceptos e ideas matemáticas en diferentes niveles de generalización y abstracción.

4. 1. 5 Cuadro comparativo de estrategias desplegadas en los distintos niveles

Como ya mencionamos, en los tres niveles las estrategias desplegadas fueron prácticamente las mismas. Cabe destacar que entre los estudiantes de segundo y tercer año, que ya manejan el álgebra, solo uno de ellos utilizó las ecuaciones para buscar alguna respuesta. Las estrategias que detectamos para resolver la tarea planteada fueron las siguientes:

A – piensan un número cualquiera e intentan que todos los casilleros den como suma ese número.

B – colocan un número cualquiera en un casillero, hacen la suma y buscan números para que todos los casilleros den esa misma suma.

C – Ponen un número cualquiera en un casillero al azar y buscan otros casilleros que les dé ese número de forma “fácil”; luego repiten el procedimiento con otros casilleros.

D – Colocan un número al azar, hacen la suma e intentan que todas las sumas den lo mismo pero al colocar números en otros casilleros y hacer la suma con la calculadora, ven que no les da lo mismo y entonces buscan otros casilleros que les dé lo que este les dio.

E – Buscan que todos los casilleros den la misma suma.

F – Buscan al azar sumas diferentes para diferentes casilleros.

A continuación presentamos un cuadro en el que se puede observar una síntesis de las estrategias detectadas:

Nivel	*Cantidad de alumnos*	*Aparición de distintas estrategias*					*Uso del álgebra*
		A	B	C	D	E	
1º	25	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
2º	24	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
3º	26	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Un caso

4. 2 Análisis de las entrevistas a los docentes, practicantes y a la educadora popular

4. 2. 2 Entrevistas a los docentes

Se entrevistaron a los tres docentes a cargo de los grupos de primero, segundo y tercero en donde fue aplicada la tarea de final abierto.

El cuestionario que se elaboró para cada entrevista fue el mismo.

A continuación recordamos las preguntas formuladas.

1. ¿Conocía las tareas de final abierto propuestas por Zaslavsky?
2. En caso de conocerlas, ¿había aplicado anteriormente tareas de final abierto en el grupo?
3. ¿Qué reflexiones acerca de su práctica de aula promovió la propuesta realizada en el grupo?
4. ¿En qué cambió su visión respecto a la enseñanza de la matemática el trabajo con las tareas de final abierto?
5. ¿Qué cree que le aporta a los estudiantes el trabajo con este tipo de tareas?
6. Durante la propuesta de las actividades, ¿observó cambios en la actitud en clase o en la actitud frente a la materia de alumnos que intervienen poco o que no se interesan en general por la misma? Si es así, ¿cuáles?

De las entrevistas surge que:

1. Dos de los tres docentes a cargo de los grupos en los que la tarea de final abierto fue propuesta manifestaron no conocer a Orit Zaslavsky.
2. La docente que conocía lo propuesto por Zaslavsky respecto a las tareas de final abierto no las había aplicado.
3. Al reflexionar sobre sus prácticas de aula los profesores manifestaron que el trabajo con este tipo de tareas los ayudó a reflexionar sobre el rol del docente a la hora de generar oportunidades para todos los estudiantes, respetando los diferentes tiempos y las individualidades, y también dándoles protagonismo.

También manifestaron que a partir de ahora las tendrán presentes para repensar sus planificaciones.

Se cuestionaron la necesidad de proponer actividades que fomenten la discusión desde otro lugar, es decir, no solo la discusión del porqué un ejercicio está bien o cómo se resolvió, sino la discusión en la que no hay respuestas equivocadas. Consideran que esto favorece la escucha, el diálogo y anima a todos a participar en clase.

4. Una de las docentes expresa que si bien no cambió su visión respecto a la enseñanza de la matemática, reafirmó la idea de poner énfasis en “hacer” matemática y no en “entrenar” en matemática.

Otro docente expresa: “*este tipo de tareas genera diferentes oportunidades para los estudiantes atendiendo los tiempos de cada uno. Les dan a los estudiantes confianza para expresar sus razonamientos y presentar sus diferentes estrategias porque todo lo que digan puede ser utilizado para generar aprendizaje. El error no es un obstáculo sino que por el contrario se transforma en una oportunidad para generar conocimiento*”.

5. Los docentes afirman que este tipo de tareas anima a los estudiantes a participar, los alienta a explicar y justificar sus respuestas debido a que hay muchas respuestas que pueden ser correctas.

Vemos que se pone de manifiesto lo que Zaslavsky (1995) señala respecto a que las tareas de final abierto contribuyen a elaborar argumentos tendientes a justificar las soluciones encontradas lo que sin duda contribuye a mejorar la comunicación matemática.

Dice uno de los docentes: “*Esta modalidad de trabajo empodera a los estudiantes generando oportunidades y libertad de pensamiento ya que sienten que pueden expresar lo que realmente piensan. No es necesario simular que se entiende y decir lo que el profesor quiere escuchar porque todo razonamiento es válido en este tipo de propuestas*”.

Aporta otra de las docentes*: “Me parece muy importante que “vean” otras formas de resolver situaciones y que se llegue a generar un debate sobre las mismas. Además de la posibilidad de retomar contenidos que quizá no sean los que se están trabajando en el curso en esa instancia*”.

Vemos nuevamente cómo este tipo de tareas produce mayor libertad de pensamiento. Los estudiantes se despojan del “tener que decir o hacer” para poder expresar lo que realmente piensan sin miedo a que lo que digan pueda estar mal. Esto contribuye, sin lugar a dudas, a que la actividad matemática se vuelva más “humana”. Esto facilita un mejor desarrollo de los procesos de aprendizaje.

6. Notaron que algunos estudiantes tuvieron mayor protagonismo como es el caso de estudiantes con adecuación curricular o estudiantes con muy baja autoestima que generalmente no se atreven a intervenir en clase. Notaron que la participación de estos estudiantes fue más intensa.

De lo conversado en las entrevistas con los docentes se desprende que el trabajo con tareas de final abierto fue para ellos algo novedoso que motivó su reflexión respecto a sus prácticas de aula principalmente en qué tipo de tareas proponer a sus estudiantes. En este sentido podemos pensar que uno de los objetivos que nos propusimos al comienzo se cumplió.

Los docentes también pudieron observar el hecho de que los estudiantes están acostumbrados a que prácticamente se les diga qué hacer en cada situación; vieron cómo este tipo de actividades descoloca a los alumnos ya que los deja en libertad y esto les produce cierta inseguridad. Esto nos hace preguntamos hasta qué punto podemos influir en la forma de pensar de los estudiantes a partir de las tareas que proponemos. Sin duda, las tareas a las que los estudiantes están acostumbrados a enfrentarse, en las que hay una única respuesta correcta, condiciona su forma de pensar. El hecho de que los docentes hayan podido constatar, a partir del trabajo con estas tareas, que los estudiantes necesitan que se les diga qué hacer nos parece muy positivo debido a que esto nos hace reflexionar acerca de nuestra actitud como docentes en el aula. Posiblemente, un poco por como aprendimos y otro poco por el apuro en dar los temas, dejemos poco tiempo a que el estudiante trabaje libremente y no somos concientes de que le estamos diciendo por dónde encarar cada tarea casi al mismo momento en que se las proponemos.

Es interesente apreciar el hecho de que una de las docentes manifestó que al enfrentarse a la tarea ella lo que hizo fue colocar los números que faltaban para que todas las sumas dieran cero. Si bien se trata de una docente que está permanentemente reflexionando sobre sus prácticas y modificándolas para mejorarlas, parecería que la forma en que ella aprendió está muy arraigada y se ve reflejada en algunos aspectos de su forma de enseñar. Ella, al igual que muchos de los estudiantes a los que se les planteó la tarea, buscó que todas las sumas dieran lo mismo y que no quedaran casilleros vacíos.

Sin embargo, observó lo que sucedía con sus estudiantes cuando se enfrentaron a una tarea de final abierto. Ella expresa: "*Cuando vos les tirás* *algo así no se animan ni siquiera a empezar; por eso a veces uno piensa que no entienden la consigna, o piensa, este chiquilín tiene dificultades porque no entiende las consignas. Pero es que están poco acostumbrados a poder hacer lo que quieran, y lo que salga. Me llevó a pensar que muchas veces cuando ellos te dicen no entiendo, es porque necesitan que alguien valide eso que tienen que hacer. Ni siquiera se animan a empezar*".

Vemos que el haber vivenciado esta propuesta con tareas de final abierto conduce a la docente a una reflexión acerca de lo que sucede con los estudiantes y de cómo el docente actúa frente a determinadas circunstancias que cree de una manera y son de otra.

4. 2. 3 Entrevista a los practicantes

Uno de los practicantes hace su práctica docente en el primer año del Ciclo Básico en el que se aplicó la tarea y el otro en el segundo año.

Ambos manifestaron no conocer a Zaslavsky ni las tareas de final abierto. Expresaron quedar muy interesados en el tema para modificar las tareas que proponen. "*Da más libertad y más seguridad y eso es positivo*" comentó uno de ellos. Por otra parte, manifestó haber aprendido muchísimo de cómo trabajar con otro tipo de tareas en la clase y darse cuenta del potencial de las mismas. Comentó también que pudo vivenciar cómo el docente puede trabajar oficiando de guía para que sean los propios estudiantes quienes validen sus respuestas y lleguen a las mismas y que esto fue totalmente nuevo para él.

Observó que cuatro alumnos que presentan características especiales, como ser: líder negativa, adecuación curricular, problemas emocionales y una estudiante que nunca habla en clase, se animaron a intervenir con mayor seguridad. Respecto a la última estudiante mencionada, el practicante comentó que le cuesta el diálogo con las personas y que, sin embargo, el día de la aplicación de la tarea, hizo un quiebre, pasó adelante con sus compañeros y fue la que contó lo que se había trabajado en el equipo.

El estudiante cursa segundo año del IPA y es su primer año de práctica docente. Por el entusiasmo con que se lo vio durante la clase y en las instancias posteriores, se infiere que sin duda para él, conocer las actividades de final abierto fue innovador y motivador. Consideramos que es muy importante trabajar con los estudiantes que dan sus primeros pasos en la enseñanza ya que es de esta manera que promovemos la reflexión acerca de las tareas a proponer a los estudiantes y a cómo desenvolverse en el aula. Es con los practicantes que se puede comenzar a realizar un verdadero cambio en las prácticas de aula. Suponemos que él compartirá su experiencia con otros estudiantes del profesorado. Esto puede conducir a motivarlos, a interesarse por la búsqueda y la propuesta de otro tipo de tareas, como las de final abierto.

4. 2. 4 Entrevista a la educadora popular

A continuación presentamos lo que surgió de la entrevista.

En primer lugar se le preguntó qué características presentaron los grupos.

Plantea que en el corto tiempo es muy difícil aventurar características particulares de cada grupo pero que, en general, los vio receptivos, de comportamiento variable, más dispersos unos, más participativos otros. Notó que los estudiantes usaban los celulares para realizar sumas del estilo 3 + 5, lo que sin duda le llamó la atención.

Al preguntársele si conocía las tareas de final abierto propuestas por Zaslavsky, plantea que no las conocía y que tampoco había vivenciado alguna propuesta similar a la que se llevó a cabo, en su pasaje por la enseñanza media.

Respecto a los aportes que este tipo de tareas proporcionan a las prácticas de aula, establece: "*Creo que la preparación de este tipo de tareas tal vez requiera para el docente más tiempo e imaginación. "Costos" que se verán ampliamente desquitados con la ganancia de generar en un grupo un debate matemático que habilita a viajar buscando opciones y respuestas a un planteo de trabajo que así lo requiere*".

Frente a la pregunta: ¿En qué cambió su visión respecto a la enseñanza de la matemática el trabajo con las tareas de final abierto? La educadora responde: "*Muchísimo. Por primera vez pude experimentar que esa rígida estructura que llamaba matemática, podía ser maleable, discutida, pensada, alejándose de repetir y memorizar para acercarse a la posibilidad de integrar verdaderamente un nuevo conocimiento*".

Respecto a qué cree que le aporta a los estudiantes este tipo de tareas, manifestó: "*Una vez que comprenden la consigna de la tarea, creo que lo más importante es la libertad de pensamiento con la que se pueden manejar, hecho del cual no son conscientes, pero que se observa a través del entusiasmo y los lugares a los que llegan. Despliegan rápidamente una enorme cantidad de opciones y posibilidades buscando respuestas a la tarea indicada. Al mismo tiempo surgen afirmaciones o dudas que tocan otros temas y casi sin darse cuenta también se están afirmando otros conceptos*".

En relación a la actitud de los estudiantes frente a este tipo de tareas, manifestó que al principio la tarea generó un poco de desconcierto ya que les costó entender que existen varias respuestas correctas incluso al juntarse en los equipos, luego de haber trabajado en forma individual, les costó aceptar los diferentes caminos que tomaron para llegar al resultado y que, además, fueran diferentes resultados. Plantea la educadora: "*Por momentos parecía que necesitaban algo más acotado, más concreto".*

En la entrevista la educadora finaliza reflexionando:

"*Creo que esta forma de aprendizaje abarca a un número mucho mayor de estudiantes, cada uno con sus posibilidades. Del trabajo individual al grupal hay un proceso de enriquecimiento, a través del cual lo que cada uno construyó no se pierde sino que se revaloriza. Todo cambio que significa el aprendizaje con sus miedos e inseguridades, en este tipo de planteo se sobrelleva de manera natural e integradora. En contraposición a "hacer lo justo para pasar al otro nivel", este tipo de tareas fomenta el pensamiento y la creatividad. Valoro de manera muy positiva esta experiencia porque logra conjugar la simplicidad con la profundidad, logrando que los estudiantes salgan de su zona de confort para volar*".

La mirada de una persona ajena al área de la matemática nos parece muy importante. En este caso sus apreciaciones no difieren de lo observado por los docentes de los grupos. Y se puede constatar a partir de lo que ella expresa que sin duda estas actividades y la forma de trabajo que conllevan, hace que se llegue a todos los estudiantes infundiéndoles confianza en sí mismos.

4. 7 Análisis global de las entrevistas a docentes, practicantes y educadora popular

Podemos ver que en las respuestas tanto de docentes, practicantes como educadora, de alguna manera se repiten los mismos conceptos. Conceptos algunos que son señalados por Zaslavsky (1995) y otros que nos habíamos planteado al comienzo de este proyecto.

Los conceptos volcados en las respuestas que son considerados como atributos de las tareas de final abierto propuestos por Zaslavsky (1995) son:

- estimulan el debate matemático,
- permiten vincular diferentes conceptos aprendidos interrelacionándolos entre ellos,
- contribuyen a mejorar el discurso matemático,
- permiten la confrontación de ideas y la búsqueda de argumentos que validen las respuestas a las que llegó cada uno,
- promueven el trabajo en equipo estableciendo la fuerza del grupo como un todo y empoderando a cada uno de los integrantes,
- aceptan el error como disparador para el aprendizaje,
- permiten manejar las diferencias individuales de los estudiantes,

Otros conceptos que podemos agregar:

- permiten que los estudiantes piensen con mayor libertad,
- colaboran a considerar la matemática desde un punto de vista más “humano” lo que contribuye a la pérdida del miedo que esta genera a muchos de los estudiantes,
- promueven la participación activa de los estudiantes,
- colaboran a que el docente pueda comprender y conocer más tanto a sus estudiantes como sus procesos de razonamiento.

Consideramos que a partir de la propuesta trabajada se desarrollaron elementos que aportaron a la reflexión de los docentes a sus prácticas de aula y generaron el entusiasmo y las ganas de incorporar cambios en las mismas de modo de trabajar la enseñanza de la matemática desde un lugar donde el aprendizaje sea “más real”. Esto nos convoca a trabajar en talleres para docentes y futuros docentes en los que se pueda compartir la experiencia y llegar a que más docentes conozcan las tareas de final abierto propuestas por

Zavslaky (1995), de forma de aportar a un trabajo diferente dentro del aula. De esta forma podremos ir cambiando la forma de enseñar matemática de manera que esta sea una materia mirada desde otro punto de vista y que se pueda contribuir a que cada vez sean menos los estudiantes que le teman o que elijan carreras por el hecho de que no hay prácticamente matemática.

Capítulo 5
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES DIDÁCTICAS

5. 1 Conclusiones

El análisis de los resultados y las entrevistas realizadas nos permiten sacar algunas conclusiones respecto a diferentes temas relacionados al estudio realizado.

En relación a nuestro primer objetivo pudimos observar que las tareas de final abierto, tal como lo señala Zaslavsky (1995), atienden las individualidades de los estudiantes de forma que cada uno puede trabajar de acuerdo a sus posibilidades. Esto pudo constatarse en los tres grupos donde fue propuesta la tarea. En los tres grupos había estudiantes con adecuación curricular, estudiantes con problemas de relacionamiento y estudiantes con problemas emocionales. Todos estos estudiantes trabajaron con entusiasmo y manifestaron sentirse muy bien con la propuesta. Se los notó, en general, distendidos y si bien al principio les costó soltarse y hacer uso de la libertad de pensamiento que la tarea promovía, luego de que entendieron que lo podían hacer, pudieron expresarse sin dificultad y exponer sus ideas. Además, varios manifestaron que les había gustado el trabajo y que sintieron que habían aprendido jugando. Creemos que la dinámica que se promueve a partir de estas tareas crea en el aula un clima distendido y de sana competencia que se asemeja a lo producido por los juegos. Esto, sin duda, ayuda al estudiante a que se acerque más a una materia que, a priori, es temida por la mayoría y que muchos estudiantes creen no poder abordar. Los estudiantes tienden a ver la matemática como una materia dura, aislada del resto de las asignaturas lo que les produce diferentes emociones adversas hacia la misma: miedo, ansiedad, frustración, ira, baja autoestima, vergüenza y desesperanza; todo esto con la consecuente pérdida de motivación. Es por eso que creemos que el hecho de acercarles tareas que contribuyan a una visión más humanista de la matemática ayuda a promover en los estudiantes otra actitud frente a la matemática.

Por otro lado pudimos constatar, a través del intercambio que se estableció en varios momentos de la puesta en común, que las actividades de final abierto, tal como lo señala Zaslavsky (1995), alientan a comparar respuestas, verificar su validez y buscar posibles relaciones entre ellas. Esto hace que promuevan el debate matemático. La comparación de las respuestas y la necesidad de elaborar justificaciones convincentes ayuda a la comunicación matemática así como también al trabajo colaborativo. Se pudo observar, además, que los estudiantes pudieron detectar errores cometidos sin la intervención del docente y ser ellos mismos quienes llegaron a la conclusión de qué era lo correcto. Nuevamente podemos observar lo que Zaslavsky (1995) señala acerca de que las tareas de final abierto permiten que aparezcan concepciones erróneas y promueven el trabajo en equipos, el debate y la contraposición de ideas y argumentos.

En cada uno de los grupos se establecieron debates que motivaron a los estudiantes a pensar, sacar conclusiones y elaborar justificaciones para transmitir a los compañeros. Creemos que esto es fundamental y que sería esperable que sea una práctica común en la enseñanza de la matemática. Observamos cómo a partir de una tarea sencilla, los estudiantes pudieron reforzar muchos conceptos que no tenían muy claros tanto del tema que la tarea abordaba en sí misma como de otros temas relacionados.

Conjuntamente con lo anterior encontramos que los docentes, que no habían trabajado con este tipo de tareas, pudieron constatar la riqueza de las mismas; no solamente en lo que refiere al trabajo matemático de los estudiantes sino en lo que respecta a los razonamientos y a las actitudes de los estudiantes frente a una tarea. Esto nos permite pensar que las tareas de final abierto ayudan a que el docente tenga otra mirada de sus estudiantes, puedan observar individualidades, formas de razonar y de relacionarse.

En referencia a nuestro segundo objetivo vemos que respecto a las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver tareas de final abierto, no hubo grandes diferencias en los tres niveles. Las estrategias utilizadas fueron las mismas y la forma de razonar muy similar. Llama la atención ya que el tema tratado en la actividad propuesta era adición y sustracción en el conjunto de los números enteros, tema que atraviesa los tres años del Ciclo Básico. Se supone que, por este motivo, los estudiantes que cursan segundo año tienen mayor dominio del tema que los que cursan primero y los que cursan tercero aún mas. Sin embargo, esto no se dejó traslucir; en los tres grupos los errores y las dudas fueron similares. Esto nos lleva a preguntarnos por qué sucede esto. La respuesta no es inmediata y ameritaría un estudio aparte. De igual forma, pensamos que uno de los motivos que lleva a que esto suceda es el hecho de que los docentes trabajan en sus aulas de manera similar a como ellos aprendieron, replicando, de alguna forma, el mismo estilo. Sin duda que la forma de relacionarse, las propuestas y las exigencias son diferentes. Pero existe un componente que va más allá y que los docentes repiten casi sin darse cuenta que es la intención con que se trabaja. Una de las docentes se cuestionaba, ¿enseño matemática o entreno en matemática? Posiblemente la manera que ellos han aprendido se asemeje más a un entrenamiento, a promover un pensamiento instrumental donde el fin último de las tareas es llegar a un resultado único que asegura a los estudiantes una buena nota y, en consecuencia, su pasaje de grado.

Pensamos que el trabajo realizado con una tarea de final abierto, tal como era nuestro tercer objetivo, permitió una mirada introspectiva a su labor y su postura en el aula y aportó elementos para una reflexión profunda por parte de los docentes sobre sus prácticas de aula, lo que sin duda promoverá cambios en ellas.

Por otro lado, los practicantes también manifestaron que pudieron constatar el poder que tiene este tipo de tareas para acercar a los estudiantes a la matemática, tener más confianza en sus posibilidades y abrirse a una asignatura que, a priori, la mayoría siente que no podrá con ella. Creemos que esta mirada de los practicantes es muy importante, no solamente por ver lo que las tareas de final abierto implican y promueven sino como un disparador para abrirse a la búsqueda de nuevas propuestas y nuevas formas de abordar la enseñanza de la matemática.

6. 2 Recomendaciones didácticas

Plantearemos algunas recomendaciones didácticas que surgen a partir del trabajo realizado.

En primer lugar, sugerimos a los docentes que incorporen tareas de final abierto como herramienta didáctica en sus clases de matemática. Si bien sería recomendable que los cursos se desarrollen a través de este tipo de tareas u otras similares, sabemos que esto requiere repensar los cursos en su totalidad y profundizar en un terreno poco conocido para la mayoría, lo que implica gran incertidumbre y produce cierto temor. Nuestra sugerencia, entonces, es que se comiencen a incorporar este tipo de tareas de forma gradual pero constante. Ofrecer a los estudiantes tareas de final abierto donde los estudiantes se sientan libres de pensar, sin la presión que implica llegar a un único resultado correcto. Creemos que a través de este tipo de tareas se pueden crear ricos procesos de aprendizaje. Su incorporación en las prácticas de aula obliga al docente a rever sus conocimientos y lo anima a plantearse la enseñanza de la matemática de otra manera.

Pensando en lo anterior, sugerimos, como forma de facilitar la tarea para comenzar con el trabajo con actividades de final abierto, que los docentes hagan una revisión de los libros de texto que habitualmente usan para sus cursos y seleccionen actividades para transformarlas en tareas de final abierto. Creemos que es una manera de introducirse en el tema y, a su vez, lograr tener actividades ya pensadas para proponer en las clases.

Por otro lado, sugerimos la implementación de talleres con profesores, maestros y estudiantes del profesorado y magisterio en los que se pueda experimentar el trabajo con tareas de final abierto, de forma de transitar un proceso similar al que luego transitarán los estudiantes cuando les propongan este tipo de tareas. De esta manera, los docentes podrán ampliar su conocimiento acerca de los procesos individuales de los estudiantes, el rol del error y la importancia de trabajarlo como disparador para el aprendizaje y la trascendencia del trabajo colaborativo que empodera a cada individuo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chan, M. y Clarke, D. (2017). Structured affordances in the use of open-ended tasks to facilitate collaborative problem solving. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 951–963.

Charnay, R. (1995). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz, (Eds.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51–63). Buenos Aires: Paidós Educador.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching*, *26*(3), 9–15.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning, Mathematics Teacher Education 9*. New York: Springer.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 15–20.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. *Invited presentation at the Topic Study Group (TSG34) on Research and Development on Task Design and Analysis, the 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11*), Monterrey, Mexico.

Este libro reporta una experiencia en la que se diseñó una tarea de final abierto, se puso en escena en tres grupos de enseñanza media de liceos de Montevideo y se analizó la producción de los estudiantes con foco en las diferentes estrategias que utilizan al resolver este tipo de tareas y poniendo énfasis en los procesos de razonamiento.

Las evidencias indican que este tipo de tareas promueve un trabajo más participativo y genera un ambiente que favorece procesos ricos de aprendizaje en los que los estudiantes pueden pensar con más libertad y de acuerdo a sus posibilidades, en un ámbito en el que el debate y el intercambio de ideas matemáticas aparecen de forma natural.

9 789974 877993